全日制普通高级中学

高三年级使用

SHUXUE ZONG FUXI

数学总复习

（上）

■ 天津市教育教学研究室 编

天津教育出版社 出版

说　　明

《数学总复习(上)》是根据《全日制普通高级中学数学教学大纲》所规定的高中数学必修课和选修课内容而编写的,考虑到高考改革的形势及天津市高中数学教学的实际,我们对原书重新作了修订,供我市高中三年级学生在复习备考中使用.

《数学总复习(上)》一书按教材内容的顺序分章编排,每一章安排了两部分内容:第一部分是"基础知识自学指导",它给出了本章的知识结构框图和知识简表,可使学生通过自学就能够明确这一章内容的重点和难点、重要的结论和规律以及常用的解决问题的方法等;同时通过教师的必要指导能够理清知识脉络,掌握知识之间的内在联系,建立良好的知识结构,为技能的训练、能力的培养、智力的开发奠定必要的基础.第二部分是例题讲解与训练,这一部分为方便教学,以专题的形式设置若干讲,每讲大约安排3至5个例题,这些例题都是精心选定的,通过[思路点拨]、[解答示范]、[归纳点评]三个栏目对例题进行分析和讲解,试图帮助学生总结和剖析知识的规律,引导学生掌握运用所学知识分析问题和解决问题的方法,使学生的思维能力得到发展,数学素养进一步提高;例题之后,围绕本章内容和复习要求,有针对性的配置了一定数量的练习题,作者希望同学们独立完成,并在解题过程中能根据问题的条件,寻求合理的解题途径,能运用所学数学知识、思想和方法,合乎逻辑地、准确地、清楚地阐述自己的观点和思想.为使学生及时获得练习后的反馈信息,本书最后给出练习题的答案和解答,以供参考.

参加本书编写和修订工作的有于大中、李永茂、杨玲、张明、吉学静、张延江、邵德彪、王业春、哈欣、王连笑、刘志红、王世堃、闫国胜、李果民、申铁、刘金英等同志.

责任编者　李果民、申铁.

本书由天津市基础教育教材审查委员会审定.

天津市教育教学研究室

2006年3月

目　录

必修内容

选修内容

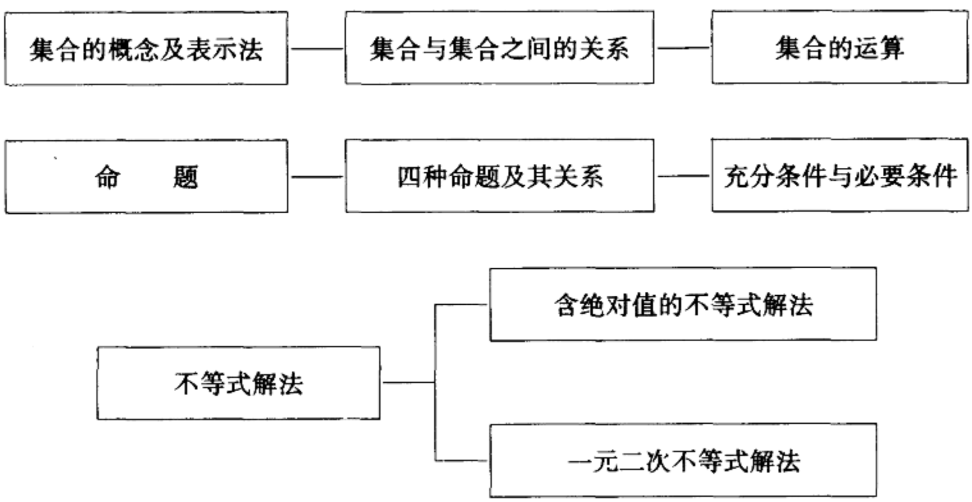
参考答案

必修内容

第一章　集合与简易逻辑

第一部分　基础知识自学指导

一、本章知识结构



二、本章知识简表

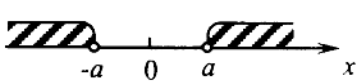
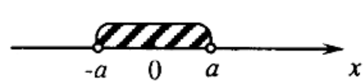
(一)集合

集合的基本概念	集合表示法	(1)列举法、(2)描述法、(3)图示法
	集合与元素的从属关系	a 不是集合 A 的元素，叫做 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. a 是集合 A 的元素，叫做 a 属于 A，记作 $a\in A$.
	空　集	不含任何元素的集合叫空集，记作 $\varnothing$.
	常见数集	**N**(自然数集)、**N***(正整数集)、**Z**(整数集)、**Q**(有理数集)、**R**(实数集).

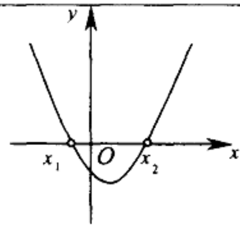
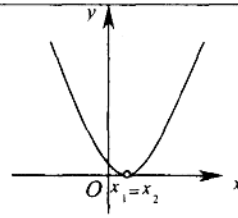
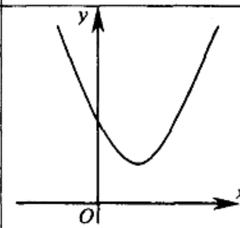
<table>
<tr><th colspan="3"></th><th>定义(意义)及表示</th><th>性　质</th></tr>
<tr><td rowspan="6">集合与集合的关系</td><td rowspan="3">包含关系</td><td>子集</td><td>如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们就说集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A，记为 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).</td><td rowspan="3">①任何一个集合是它本身的子集，记为 $A\subseteq A$.
②空集是任何集合的子集．记为 $\varnothing\subseteq A$.
③空集是任何非空集合的真子集.
④如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.
⑤含有 n 个元素的集合的所有子集数为 2^n 个.</td></tr>
<tr><td>真子集</td><td>如果 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，我们就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).</td></tr>
<tr><td>相等</td><td>如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么 $A=B$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">运算关系</td><td>并集</td><td>$A\cup B=\{x\mid x\in A，或\ x\in B\}$</td><td>①$A\cup A=A$
②$A\cup\varnothing=A$
③若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$</td></tr>
<tr><td>交集</td><td>$A\cap B=\{x\mid x\in A，且\ x\in B\}$</td><td>①$A\cap A=A$
②$A\cap\varnothing=\varnothing$
③若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$</td></tr>
<tr><td>补集</td><td>$\complement_S A=\{x\mid x\in S，且\ x\notin A\}$，$S$ 为全集</td><td>①$\complement_S(\complement_S A)=A$
②$(\complement_S A)\cup A=S$
③$(\complement_S A)\cap A=\varnothing$
④$\complement_S(A\cup B)=(\complement_S A)\cap(\complement_S B)$
⑤$\complement_S(A\cap B)=(\complement_S A)\cup(\complement_S B)$</td></tr>
</table>

(二)不等式的解法

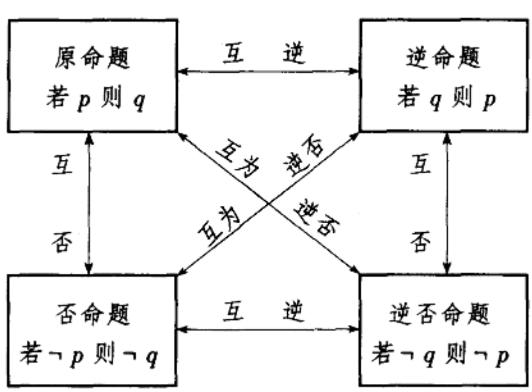
①含绝对值的不等式

<table>
<tr><th></th><th>$|x|>a$</th><th>$|x|<a$</th></tr>
<tr><td>$a=0$</td><td>$\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq0\}$</td><td>$\varnothing$</td></tr>
<tr><td>$a<0$</td><td>$\mathbf{R}$</td><td>$\varnothing$</td></tr>
<tr><td>$a>0$</td><td>$\{x\mid x<-a，或\ x>a\}$

</td><td>$\{x\mid -a<x<a\}$

</td></tr>
</table>

②一元二次不等式的解集及与一元二次方程、二次函数的关系如下表：

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a > 0)$的解集	有两相异实根 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_1 < x_2$	有两相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实根
$ax^2 + bx + c > 0$ $(a > 0)$的解集	$\{x \mid x < x_1$，或 $x > x_2\}$	$\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2 + bx + c < 0$ $(a > 0)$的解集	$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

(三)简易逻辑

<table>
<tr><td rowspan="6">命题</td><td colspan="2">命题</td><td>可以判断真假的语句叫做命题.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">逻辑联结词</td><td>或</td><td>两个简单命题至少一个成立.</td></tr>
<tr><td>且</td><td>两个简单命题都成立.</td></tr>
<tr><td>非</td><td>对一个命题的否定.</td></tr>
<tr><td colspan="2">简单命题</td><td>不含逻辑联结词的命题，叫做简单命题.</td></tr>
<tr><td colspan="2">复合命题</td><td>由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.</td></tr>
<tr><td>四种命题及其关系</td><td colspan="3">
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>定　　义</th><th>从集合观点看</th></tr>
<tr><td rowspan="6">充要条件</td><td>①如 $p \Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件.</td><td>若集合 $p \subseteq q$，则 p 是 q 的充分条件.</td></tr>
<tr><td>②如 $p \Rightarrow q$，则 q 是 p 的必要条件.</td><td>若集合 $q \supseteq p$，则 q 是 p 的必要条件.</td></tr>
<tr><td>③如 $p \Rightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件.</td><td>若 $p \subsetneqq q$，则 p 是 q 的充分不必要条件.</td></tr>
<tr><td>④如 $q \Rightarrow p$ 且 $p \nRightarrow q$，则 p 是 q 的必要不充分条件.</td><td>若 $q \subsetneqq p$，则 p 是 q 的必要不充分条件.</td></tr>
<tr><td>⑤如 $p \Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充分必要条件.</td><td>若 $p = q$，则 p 是 q 的充分必要条件.</td></tr>
<tr><td>⑥如 $p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.</td><td>若 $p \not\subseteq q$ 且 $q \not\subseteq p$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.</td></tr>
</table>

第二部分　专题讲解与训练

第一讲　集　　合

知 识 点	集合、子集、交集、并集、补集
复习要求	理解集合、子集、交集、并集、补集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义；能正确解决有关问题.

例 1　(2004 年上海理)记函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)](a<1)$ 的定义域为 B.

(1)求 A；

(2)若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

[思路点拨]　这是两个函数定义域的关系的问题. $g(x)$ 的定义域由条件 $a<1$ 确定. "$B\subseteq A$"这一条件决定两个函数的定义域端点的大小关系，从而得到 a 的范围.

[解答示范]

解　(1)要使函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 有意义，须使 $2-\frac{x+3}{x+1}\geqslant 0$，

即　$\frac{x-1}{x+1}\geqslant 0$.

$\therefore$　$A=\{x\mid x<-1$ 或 $x\geqslant 1\}$.

(2)要使 $g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]$ 有意义，须使 $(x-a-1)(2a-x)>0$，

即 $[x-(a+1)](x-2a)<0$.

由于 $a<1$，可知 $a+1>2a$.

$\therefore B=\{x\mid 2a<x<a+1\}$.

又因 $B\subseteq A$，则有 $2a\geqslant 1$ 或 $a+1\leqslant -1$　即　$a\geqslant\frac{1}{2}$　或　$a\leqslant -2$.

又因 $a<1$，

所以，a 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[\frac{1}{2},1)$.

[归纳点评]

1. 考察简单不等式的解法.
2. 在集合之间关系中，子集是重要概念，注意与 $B\subseteq A$ 对应的不等式的表示.
3. 特别注意两种情况要分别讨论，再求并集.

例 2　已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+mx-y+2=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y+1=0,0\leqslant x\leqslant 2\}$，如果 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

[思路点拨]　首先认识这两个集合的几何意义：A 表示一族抛物线，B 表示一条线段，$A\cap B\neq\varnothing$，即是两曲线必有公共点. 转化为代数方程问题，即方程组

$\begin{cases} x^2+mx-y+2=0, \\ x-y+1=0 \end{cases}$ 在 $x\in[0,2]$ 内必有解.问题转化为一元二次方程根的分布问题.解决这类题有两个思路:其一,从函数角度考虑;其二,分离变量法求出变量 m 的范围.

[解答示范]

解法 1 由已知得 $\begin{cases} y=x+1, \\ y=x^2-mx+2, \end{cases}$

可得 $x+1=x^2+mx+2$,

即 $x^2+(m-1)x+1=0$.

令 $f(x)=x^2+(m-1)x+1, 0\leqslant x\leqslant 2$.

由条件得:

$$f(0)f(2)\leqslant 0 \text{ 或} \begin{cases} \Delta=(m-1)^2-4\geqslant 0, \\ 0<\dfrac{1-m}{2}<2, \\ f(0)>0, \\ f(2)>0. \end{cases}$$

即 $$[4+(m-1)2+1]\cdot 1\leqslant 0 \text{ 或} \begin{cases} (m-1)^2-4\geqslant 0, \\ 0<1-m<2, \\ 1>0, \\ 4+2(m-2)+1>0. \end{cases}$$

得 $$m\leqslant -\frac{3}{2} \quad \text{或} \quad \begin{cases} m\leqslant -1 \text{ 或 } m\geqslant 3, \\ -3<m<1, \\ m>-\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

$\therefore \quad m\leqslant -1$.

解法 2 (同前)由 $x^2+(m-1)x+1=0$, ①

$x=0$ 不是方程①的解,所以 $x\neq 0$.

变形为 $m=\dfrac{-1-x^2}{x}+1=-\dfrac{1}{x}-x+1$.

$m'_x=\dfrac{1}{x^2}-1=\dfrac{1-x^2}{x^2}=\dfrac{-(x+1)(x-1)}{x^2}$.

可知 $(-\infty,-1)$ 为减区间,$(-1,0)$,$(0,1)$ 为增区间,$(1,+\infty)$ 为减区间,

而当 $x\in(0,2]$ 时,

因 $x\to 0^+$ 时,$m\to-\infty$,$m_{最大值}=-1$

$\therefore \quad m\leqslant -1$.

[归纳点评]

1. 认清集合表达的元素是什么,以便转化.

2. 一元二次方程根的分布是集方程、函数、不等式三者为一体的问题.

例 3 (2001 年上海春招)已知 R 为全集,$A=\{x\mid \log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\}$,$B=\{x\mid \dfrac{5}{x+2}\geqslant 1\}$,求 $\complement_R A\cap B$.

[思路点拨] 解对数不等式及分式不等式,进行集合补及交的运算.

[解答示范]

解 由 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{-2}$,

得到 $\begin{cases}3-x>0,\\3-x\leqslant 4.\end{cases}$

$\therefore\ A=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$.

$\complement_R A=\{x\mid x<-1$,或 $x\geqslant 3\}$.

由 $\dfrac{5}{x+2}\geqslant 1$,得$\dfrac{5-x-2}{x+2}\geqslant 0$,即$\dfrac{x-3}{x+2}\leqslant 0$,

$\therefore B=\{x\mid -2<x\leqslant 3\}$.

$\therefore \complement_R A\cap B=\{x\mid -2<x<-1$,或 $x=3\}$.

[归纳点评] 解各类不等式是必备的基本能力.进行集合运算时,要注意特殊元素的处理,此题中 $x=3$ 就易漏.

练习 1.1

一、选择题

1.(2004 年全国Ⅰ)设 A、B、I 均为非空集合,且满足 $A\subseteq B\subseteq I$,则下列各式中错误的是(　　).

(A)$(\complement_I A)\cup B=I$　　(B)$(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

(C)$A\cap(\complement_I B)=\varnothing$　　(D)$(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I B$

2.(2005 年广东)若集合 $M=\{x\mid |x|\leqslant 2\}$,$N=\{x\mid x^2-3x=0\}$,则 $M\cap N$ 等于(　　).

(A)$\{3\}$　　(B)$\{0\}$　　(C)$\{0,2\}$　　(D)$\{0,3\}$

3.(2005 年全国Ⅱ)设Ⅰ为全集,S_1,S_2,S_3 是Ⅰ的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$,则下面论断正确的是(　　).

(A)$\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$　　(B)$S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

(C)$\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$　　(D)$S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

4.(2005 年浙江)设 $f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$,$P=\{1,2,3,4,5\}$,$Q=\{3,4,5,6,7\}$.记 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in P\}$,$\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in Q\}$,则$(\hat{P}\cap\complement_N\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_N\hat{P})=$(　　).

(A)$\{0,3\}$　　(B)$\{1,2\}$　　(C)$\{3,4,5\}$　　(D)$\{1,2,6,7\}$

5.(2005 年湖北)设 P、Q 为两个非空实数集合,定义集合 $P+Q=\{a+b\mid a\in P,b\in Q\}$,若 $P=\{0,2,5\}$,$Q=\{1,2,6\}$,则 $P+Q$ 中元素的个数是(　　).

(A)9　　(B)8　　(C)7　　(D)6

二、填空题

1.(2004 年上海)设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$集合 $B=\{a,b\}$,若 $A\cap B=\{2\}$,则 $A\cup B=$ ________.

2.(2003 年上海)设集合 $A=\{x\mid |x|<4\}$,$B=\{x\mid x^2-4x+3>0\}$,则集合$\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin A\cap B\}=$ ________.

3.(2004 年上海六校联考)求$\{x \mid y=\lg(4x^2-4)\}\cap\{y \mid y=2x^2-3\}$等于________.

4.(2003 年南京中学)已知集合 $A=\{(x,y) \mid \begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \theta\in[0,\pi]\}$,$B=\{(x,y) \mid y=kx+k+1\}$,若 $A\cap B$ 含有两个元素,则 $k\in$________.

5. 若 $x,y\in\mathbf{R}$,$A=\{(x,y) \mid \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1,a>0,b>0\}$,$B=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$,当且仅当 $A\cap B$ 只有一个元素时,a、b 满足的关系式是________.

三、解答题

1. 已知 $A=\{x \mid 2x^2+px+q=0\}$,$B=\{x \mid 6x^2+(2-p)x+5+q=0\}$,且 $A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$. 求 $A\cup B$.

2. 已知集合 $A=\{x \mid x^2+4x+p<0\}$与 $B=\{x \mid x^2-x-2>0\}$,满足 $A\subseteq B$,求实数 p 的取值范围.

3. 已知全集 $U=\{$小于 10 的自然数$\}$,M、N 是 U 的两个子集,且满足 $M\cap N=\{2\}$,$(\complement_U M)\cap N=\{4,6,8\}$,$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\{1,9,0\}$,求 M、N.

第二讲　一元二次不等式和含绝对值的不等式的解法

知识点	不等式的解法、含绝对值的不等式,一元二次不等式.
复习要求	熟练掌握一元一次不等式(组)的解法,能用集合观点,理解一元二次不等式、含绝对值的不等式的解法.

例 1　解下列关于 x 的不等式($a\in\mathbf{R}$):

(1)$x^2+3x>x(4x-1)-2$;　　　　(2)$x^2+ax+9>0$.

[解答示范]

解　(1)原不等式可变形为

$x^2+3x>4x^2-x-2$,即 $3x^2-4x-2<0$,

因为 $\Delta=(-4)^2-4\times3\times(-2)=40>0$,解方程 $3x^2-4x-2=0$,

得 $x_1=\frac{2-\sqrt{10}}{3}$,$x_2=\frac{2+\sqrt{10}}{3}$,

所以原不等式的解集是$\{x \mid \frac{2-\sqrt{10}}{3}<x<\frac{2+\sqrt{10}}{3}\}$.

(2)$\Delta=a^2-36$

$\therefore$当 $\Delta<0$ 时,即 $-6<a<6$ 时,原不等式解集为$\{x \mid x\in\mathbf{R}\}$.

当 $\Delta=0$ 时,即 $a=6$ 或 $a=-6$ 时,方程 $x^2+ax+9=0$ 的两根是相等的,$x=-3$ 或 $x=3$.

原不等式解集为$\{x\in\mathbf{R} \mid x\neq-\frac{a}{2}\}$,即$\{x\in\mathbf{R} \mid x\neq3,a=-6\}$或$\{x\in\mathbf{R} \mid x\neq-3,a=6\}$. .

当 $\Delta>0$ 时,即 $a<-6$ 或 $a>6$ 时,方程 $x^2+ax+9=0$ 的两根为

$x_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-36}}{2}$,$x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-36}}{2}$,

$\therefore$原不等式的解集是$\{x \mid x < \frac{-a-\sqrt{a^2-36}}{2}$,或$x > \frac{-a+\sqrt{a^2-36}}{2}\}$.

例2 解下列不等式:

(1)$|x^2+5x-1|>5$;　　(2)$|x^2-x|<\frac{1}{2}x$.

[解答示范]

解 (1)原不等式等价于$x^2+5x-1>5$或$x^2+5x-1<-5$,

即$x^2+5x-6>0$①或$x^2+5x+4<0$②,

由①得$x<-6$或$x>1$,由②得$-4<x<-1$.

因此,原不等式的解集是$\{x \mid x<-6$,或$-4<x<-1$,或$x>1\}$

(2)$\because |x^2-x| \geqslant 0$,$\therefore \frac{1}{2}x>0$,因此,原不等式等价于

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x>0, \\ -\frac{1}{2}x<x^2-x<\frac{1}{2}x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ 2x^2-x>0, \\ 2x^2-3x<0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<0 \text{ 或 } x>\frac{1}{2}, \\ 0<x<\frac{3}{2}. \end{cases}$$

$\therefore$原不等式的解集是$\left\{x \mid \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}$.

例3 (2004年全国)解关于x的不等式$\frac{x-a}{x-a^2}<0$ ($a \in \mathbf{R}$).

[思路点拨] 此题是分式不等式,可以转化为一元二次不等式$(x-a)(x-a^2)<0$,注意到根a^2与a,需要讨论两者的大小,因此要找到分类点即$a^2-a=a(a-1)=0$.要分成$a<0$,$a=0$,$0<a<1$,$a=1$,$a>1$来讨论.

[解答示范]

解 不等式$\frac{x-a}{x-a^2}<0$转化为$(x-a)(x-a^2)<0$.

1° $a<0$时,$a^2>a$,$\therefore$解集为$\{x \mid a<x<a^2\}$.

2° $a=0$时,原不等式化为$\frac{x}{x}<0$,$x \in \varnothing$.

3° $0<a<1$时,$a^2<a$,$\therefore$解集为$\{x \mid a^2<x<a\}$.

4° $a=1$时,原不等式化为$\frac{x-1}{x-1}<0$,$x \in \varnothing$.

5° $a>1$时,$a^2>a$,$\therefore$解集为$\{x \mid a<x<a^2\}$.

总之,$a<0$或$a>1$时$\{x \mid a<x<a^2\}$,$0<a<1$时$\{x \mid a^2<x<a\}$,$a=0$或$a=1$时$x \in \varnothing$.

[归纳点评]

1. 本节中解不等式分两类:含绝对值的不等式及一元二次不等式,注意转化为等价的不等式或不等式组来解.

2. 要注意分类讨论,一般是零点分段法.

3. 注意如下不等式的解法.

①$|f(x)|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a$.

②$|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)<-a$ 或 $f(x)>a$.

③$|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$.

④$|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow f(x)<-g(x)$ 或 $f(x)>g(x)$.

⑤$|f(x)|<|g(x)| \Leftrightarrow |f(x)|^2<|g(x)|^2$.

⑥对于 $|x-a|+|x-b|<m$, $|x-a|+|x-b|>m$, $|x-a|-|x-b|<m$, $|x-a|-|x-b|>m$ 一类问题，一般可利用函数图象，用数形结合方法来解，其他方法有：分类讨论和数轴上两点间的距离和差问题。

练习 1.2

一、选择题

1.(2004 年天津)不等式 $\frac{x-1}{x} \geqslant 2$ 的解集为(　　).

(A)$[-1,0)$　　(B)$[-1,+\infty)$

(C)$(-\infty,-1]$　　(D)$(-\infty,-1] \cup (0,+\infty)$

2.(2005 年上海)已知集体 $M=\{x \mid |x-1| \leqslant 2, x \in \mathbf{R}\}$, $P=\{x \mid \frac{5}{x+1} \geqslant 1, x \in \mathbf{Z}\}$，则 $M \cap P$ 等于(　　).

(A)$\{x \mid 0<x \leqslant 3, x \in \mathbf{Z}\}$　　(B)$\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, x \in \mathbf{Z}\}$

(C)$\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 0, x \in \mathbf{Z}\}$　　(D)$\{x \mid -1 \leqslant x<0, x \in \mathbf{Z}\}$

3.(2005 年天津)设集合 $A=\{x \mid |4x-1| \geqslant 9, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{x \mid \frac{x}{x+3} \geqslant 0, x \in \mathbf{R}\}$，则 $A \cap B=$ (　　).

(A)$(-3,-2]$　　(B)$(-3,-2] \cup [0, \frac{5}{2}]$

(C)$(-\infty,-3] \cup [\frac{5}{2},+\infty)$　　(D)$(-\infty,-3) \cup [\frac{5}{2},+\infty)$

4.(2004 年南京检测)关于 x 的不等式 $ax-b>0$ 的解集是 $(1,+\infty)$，则关于 x 的不等式 $\frac{ax+b}{x-2}>0$ 的解集是(　　).

(A)$(-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$　　(B)$(-1,2)$

(C)$(1,2)$　　(D)$(-\infty,1) \cup (2,+\infty)$

5.(2005 年湖南)集合 $A=\{x \mid \frac{x-1}{x+1}<0\}$, $B=\{x \mid |x-b|<a\}$，若“$a=1$”是“$A \cap B \neq \varnothing$”的充分条件，则 b 的取值范围可以是(　　).

(A)$-2 \leqslant b<0$　　(B)$0<b \leqslant 2$

(C)$-3<b<-1$　　(D)$-1 \leqslant b<2$

二、填空题

1.(2005 年重庆)集合 $A=\{x \in \mathbf{R} \mid x^2-x-6<0\}$, $B=\{x \in \mathbf{R} \mid |x-2|<2\}$，则 $A \cap B=$ ________.

2.(2004 年黄岗检测)已知不等式组 $\begin{cases} x^2-4x+3<0, \\ x^2-6x+8<0 \end{cases}$ 的解集是不等式 $2x^2-9x+a<0$ 的

解集的子集，则实数 a 的取值范围是_______.

3. 若 $a<0$，则不等式$\frac{3a}{x+a}>1$的解集是_______.

4. 不等式 $ax^2+5x+c>0$ 的解集是$(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$那么 a、c 的值分别是_______.

5. 不等式$|\frac{x}{x+2}|>\frac{x}{x+2}$的解集为_______.

三、解答题

1. 已知关于 x 的不等式$\frac{x+2}{m}>1+\frac{x-5}{m^2}$，

(1)解这个不等式；

(2)当此不等式的解集为$\{x|x>5\}$时，求实数 m 的值.

2. 解关于 x 的不等式$\frac{|x-a|}{a}<a-1$ $(a\neq0,a\in\mathbf{R})$.

3. 设全集 $U=\mathbf{R}$，

(1)解关于 x 的不等式$|x-1|+a-1>0$ $(a\in\mathbf{R})$；

(2)设 A 为(1)中不等式的解集，集合 $B=\{x|\sin(\pi x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\cos(\pi x-\frac{\pi}{3})=0\}$，若$(\complement_U A)\cap B$恰有 3 个元素，求 a 的取值范围.

第三讲　简易逻辑

知识点	命题、四种命题、充要条件
复习要求	了解命题概念；理解逻辑联结词的含义；掌握四种命题及其相互关系；充要条件；会用反证法.

例 1　把下列命题改写成“若 p 则 q”的形式，并写出它们的逆命题、否命题与逆否命题，再分别判断它们的真假：

(1)两个三角形全等，其对应线段相等；

(2)两个无理数的和还是无理数.

[思路点拨]　原命题：$p\Rightarrow q$，则其逆命题为 $q\Rightarrow p$；否命题为$\neg p\Rightarrow\neg q$；逆否命题为$\neg q\Rightarrow\neg p$.由于原命题与逆否命题等价，否命题与逆命题等价，所以判断真假时，可以互相印证.

[解答示范]

解　(1)原命题：若两个三角形全等，则这两个三角形的对应线段相等.(真)

逆命题：若两个三角形的对应线段相等，则这两个三角形全等. 逆命题为真.

否命题：若两个三角形不全等，则这两个三角形的对应线段不全相等. 否命题为真.

逆否命题：若两个三角形的对应线段不全相等，则这两个三角形不全等. 逆否命题为真.

(2)原命题：若 a、b 是无理数，则 $a+b$ 是无理数. 原命题为假.

逆命题：若 $a+b$ 是无理数，则 a、b 都是无理数. 逆命题为假.

否命题：若 a、b 不都是无理数，则 $a+b$ 不是无理数. 否命题为假.

逆否命题:若 $a+b$ 不是无理数,则 a、b 不都是无理数.逆否命题为假.

例2 (南通03年调研题)下列各组命题中,满足"p 或 q"为真,"p 且 q"为假,"非 p"为真的是(　　).

(A)$p:0=\varnothing$;$q:0\in\varnothing$

(B)p:$\triangle ABC$ 中,若 $\cos 2A=\cos 2B$,则 $A=B$;

　q:$y=\sin x$ 在第一象限单增

(C)$p:a+b\geqslant 2\sqrt{ab}\,(a、b\in\mathbf{R})$;

　q:不等式 $|x|>x$ 的解集为 $(-\infty,0)$

(D)p:圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 的面积被直线 $x=1$ 平分;

　q:椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的一条准线方程是 $x=4$

[思路点拨] 判断复合命题的真假,须理解:"p 或 q",p、q 有一为真,"p 或 q"必真,两假才假."p 且 q",p、q 都真"p 且 q"才真,有一个是假命题"p 且 q"必假.p 与非 p 两个命题互为真假.本题中"非 p"为真,那么首先找到 p 为假命题的选项.又由于 p 且 q 为假,"p 或 q"为真.那么,还须找到 q 为真的命题.也就是找到 p 假 q 真的选项.

[解答示范]

解 分析 A:p、q 均假. 分析 B:p 真. 分析 C:p 假,q 真. 分析 D:p 真.

由上述分析 C 是正确选项.

例3 从"充分而不必要条件"、"必要而不充分条件"与"充要条件"中选出适当的一种填空.

(1)"$x>1$"是"$\dfrac{1}{x}<1$"的________.

(2)已知 $m<n$,"$(x-m)(x-n)>0$"是"$x<m$ 或 $x>n$"的________________.

(3)"p 或 q 为真命题"是"p 且 q 为真命题"的________________.

[思路点拨] 判断充要条件时可用集合观点来处理.设 p 成立的集合为 A,q 成立的集合为 B.若 $A\subsetneqq B$,则 p 是 q 的充分不必要条件,若 $A\supsetneqq B$,则 p 是 q 的必要不充分条件,若 $A=B$,则 p 是 q 的充要条件.

若 A、B 不是包含或相等关系,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

[解答示范]

解 (1) 由 $\dfrac{1}{x}<1$,得 $x<0$ 或 $x>1$, $\because \{x\mid x>1\}\subsetneqq\{x\mid x<0,或\ x>1\}$,$\therefore$ "$x>1$" 是 "$\dfrac{1}{x}<1$"的充分而不必要条件.

(2) 由于 $(x-m)(x-n)>0\ (m<n)$ 的解集即是 $x<m$ 或 $x>n$.又考虑取大于 n 的 x 代入 $(x-m)(x-n)$,知 $x-m>0$, $x-n>0$,所以,$(x-m)(x-n)>0$ 成立,取小于 m 的 x 代入 $(x-m)(x-n)$,知 $x-m<0$, $x-n<0$, 所以, $(x-m)(x-n)>0$ 成立.

因此,应填"充要条件".

(3) 因 $p\cup q\supsetneqq p\cap q$,所以应填"必要而不充分条件."

另由"p 或 q 为真命题"可推出 p 真 q 真、p 真 q 假、p 假 q 真三种情况.而"p 且 q 为真命题"只有 p 真 q 真时,p 且 q 为真.所以,由"p 或 q 为真命题"推不出"p 且 q 为真命题",由"p