主编 徐泽洲 陈洁云 李金生 李济元

小学数学

奥林匹克读本

IMO

（最新修订本）

6年级

★源于基础

★高于课本

★启迪思维

★掌握方法

全国优秀畅销书

新增习题详解

江苏教育出版社

主编　徐泽洲　陈洁云　李金生　李济元

小学数学
奥林匹克读本

（最新修订本）

（六年级用）

江苏教育出版社

小学数学奥林匹克读本

（六年级用）

（最新修订本）

主　　编　　徐泽洲等

责任编辑　　眭双祥

出版发行：江 苏 教 育 出 版 社

（南京马家街31号，邮政编码：210009）

经　　销：江 苏 省 新 华 书 店

印　　刷：通 州 市 印 刷 总 厂

（通州市交通路55号，邮政编码：226300）

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 8.75　字数 181,900

2000年9月第3版　2001年7月第5次印刷

印数 804,191—829,220 册

ISBN 7—5343—1424—0

G·1263　　　　定价：8.50元

修 订 说 明

各级各类数学竞赛以及数学课外活动的蓬勃开展，激发了广大青少年学习数学的兴趣和积极性。为了探索一条既科学又简捷的培训路子，我们约请了有丰富经验的教师编写了这套辅导性的读本。这套读本体现了主编徐泽洲的“渗透现代数学思想，建立三维度的数学体系”的新思路。该书的指导思想是“源于基础，高于课本，启迪思维，掌握方法”。这套读本，在适当提高知识点的同时，注重进一步启迪学生思维，帮助学生掌握更多的数学方法，对提高学生的数学基本功十分有益。全套书分小学一至六年级和初中一、二、三年级共九册，适合相应年级的学生使用。

本书出版后，受到读者的广泛欢迎。1994 年被评为全国优秀畅销书。为了进一步提高质量，这次又作了修订再版，新增了习题的详细解答，以求更加完善和实用，使之更加便于辅导和自学。

著名数学家、中科院院士、上海复旦大学研究生院院长李大潜教授为这套读本撰写了序，充分肯定了这套读本。

本册读本由丁锦华、王涤、葛广德、李济元、蒋顺编写；由徐泽洲、陈洁云统稿终审；葛如英、葛广德、郭星、毛建强、张学成对读本的编写提出了十分宝贵的意见；此次出版得到了顾也慈同志的关心和支持，在此一并致谢。

由于时间急促，在读本中如有不当之处，恳请广大读者指正。

序

数学是一门重要的基础学科。她的重要性，按我自己肤浅的理解，曾经概括为下面三句话：数学是建设四化的武器，数学是其他科学的基础，数学是锻炼思维的体操。

要打好数学的基础，是应该从中、小学抓起的，就中、小学阶段应该掌握的数学知识来说，看起来千变万化、琳琅满目，但真正基本的东西其实并不是很多的。对这些基本的内容通过认真而严格的训练，真正做到充分理解，并能熟练运用，就为今后进一步的学习和工作打下了良好的基础，也一定能逐步培养起学生对数学的爱好和兴趣，变得更加聪明起来。既减轻学习负担，又提高学习质量，促进中、小学生生动活泼地全面成长，不仅非常必要，也是完全可能的。舍本求末，不注意基本知识的严格训练和真正掌握，不培养学生主动积极的思维能力，搞题海战术，用大量的难题、偏题或怪题把学生压得透不过气来，只会束缚学生的聪明才智，带来摧残人才的恶果。

这么说，是不是对一小部分学习优秀、对数学有兴趣并且确有余力的中、小学学生，不应该提出较高的要求并进行一些特殊的培养呢？当然不是这样。教师完全有责任根据因材施教的原则，帮助和促进这一小部分学生在全面发展的基础上，并在不过分加重课外学习负担的前提下，进一步提高对数学的兴趣，在增进知识和提高能力这两方面都得到进一步的培养。这是学校课外活动的一个重要任务，也是一件值得认真探索并总结经验的工作。

现在的这一本书，原先是“南通市青少年数学奥林匹克俱

乐部”开展活动时所用的教材，也曾为其他一些地区开展类似的活动时所采用。实践表明它对提高小学生的数学思维能力起了积极的作用，一部分学生并已在全国性及国际性的数学竞赛中取得了优异的成绩。参加1989—1990年度美国小学数学邀请赛的70人全部获得一或二等奖，参赛的两个队均获得最高成就奖，就是一个突出的例子。现在本书在经过好几年的试用并不断修改完善后正式出版，不仅是过去这方面工作成果的一个结晶，也相信会对今后进一步开展有关的活动起到推动作用。

这本由江苏教育出版社出版的书，是由我的故乡南通市的一批有多年实践经验并具有较高水平的中、小学数学教师编写的。主编徐泽洲、李金生两位同志并执教于我的母校南通中学。我为自己的故乡和母校有这样一批立志献身祖国基础数学教育事业的老师和同志们感到光荣和自豪，并预祝他们在已有成绩的基础上，再接再厉，为中、小学数学教育水平的提高作出更多的努力和更大的贡献。

李大潜

于复旦大学

1991.4.23晚

图书在版编目(CIP)数据

小学数学奥林匹克读本:六年级/徐泽洲等编著,—2 版,南京:江苏教育出版社,1999.7

ISBN 7-5343-1424-0

Ⅰ.小… Ⅱ.徐… Ⅲ.数学课-小学-教学参考资料 Ⅳ.G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 33742 号

目　录

一　巧算求和题

求和问题的关键是要巧算。方法得当，计算就会迅速、准确。

例1　计算：

$$\frac{1}{1986\times1987}+\frac{1}{1987\times1988}+\frac{1}{1988\times1989}+\frac{1}{1989\times1990}+\frac{1}{1990\times1991}+\frac{1}{1991\times1992}+\frac{1}{1992\times1993}+\frac{1}{1993}$$

分析：这道题若按照常规方法，先通分后再求和，计算起来很繁杂。但是我们把这道题目中的每一个加数与上面的式子对比一下，就会发现，除$\frac{1}{1993}$以外，其余的每一个加数的分母是相邻两个自然数的积，而分子正好都是1，如果把上面算式中的七个分数分成两个分数差的形式，就得到下面的形式：

$$\frac{1}{1986\times1987}=\frac{1}{1986}-\frac{1}{1987};\ \frac{1}{1987\times1988}=\frac{1}{1987}-\frac{1}{1988}$$

$$\cdots\cdots\frac{1}{1992\times1993}=\frac{1}{1992}-\frac{1}{1993}.$$

上面七个分数相加，很容易看出许多项因一加一减而结果为0，这一来把一个比较复杂的问题一下子变得十分简便。

解：
$$\frac{1}{1986\times1987}+\frac{1}{1987\times1988}+\frac{1}{1988\times1989}$$
$$+\frac{1}{1989\times1990}+\frac{1}{1990\times1991}+\frac{1}{1991\times1992}$$

$$+\frac{1}{1992\times1993}+\frac{1}{1993}$$

$$=\frac{1}{1986}-\frac{1}{1987}+\frac{1}{1987}-\frac{1}{1988}+\frac{1}{1988}-\frac{1}{1989}+\frac{1}{1989}$$

$$-\frac{1}{1990}+\frac{1}{1990}-\frac{1}{1991}+\frac{1}{1991}-\frac{1}{1992}+\frac{1}{1992}$$

$$-\frac{1}{1993}+\frac{1}{1993}$$

$$=\frac{1}{1986}$$

像这样的巧算求和，我们采用的是裂项法，使得其中一部分分数可以互相抵消，从而使计算简化。

例 2 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{97\times98}+\frac{1}{98\times99}+\frac{1}{99\times100}$

分析：直接利用约分的方法求和看来行不通，如果能把问题简化，结果是容易计算出来的。

$\because \frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\qquad \frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$

这个方法完全适合解这类题：

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{98\times99}+\frac{1}{99\times100}$$

$$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots\cdots+(\frac{1}{98}-\frac{1}{99})$$

$$+(\frac{1}{99}-\frac{1}{100})$$

$$=1-\frac{1}{100}$$

$$=\frac{99}{100}$$

所以像这类题可总结出如下的公式：

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

例 3 $\frac{1}{55}+\frac{2}{55}+\frac{3}{55}+\cdots\cdots+\frac{10}{55}-\frac{11}{155}-\frac{12}{155}-\frac{13}{155}-\cdots\cdots-\frac{20}{155}$

分析：先将同分母分数相加，然后用等差数列求和公式计算。

$$\frac{1}{55}+\frac{2}{55}+\frac{3}{55}+\cdots\cdots+\frac{10}{55}-\frac{11}{155}-\frac{12}{155}-\frac{13}{155}-\cdots\cdots-\frac{20}{155}$$

$$=(\frac{1}{55}+\frac{2}{55}+\frac{3}{55}+\cdots\cdots+\frac{10}{55})-(\frac{11}{155}+\frac{12}{155}+\frac{13}{155}+\cdots\cdots+\frac{20}{155})$$

$$=\frac{1+2+3+\cdots\cdots+10}{55}-\frac{11+12+13+\cdots\cdots+20}{155}$$

$$=\frac{(1+10)\times 5}{55}-\frac{(11+20)\times 5}{155}$$

$$=\frac{55}{55}-\frac{155}{155}$$

$$=0$$

例 4

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}{88888888\times 88888888}$$

分析：这题直接计算分子和分母的和、积是比较繁的，看来只有找到分子与分母公有的约数，通过约分来使计算简便。

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}{88888888\times88888888}$$

$$=\frac{(1+7)+(1+7)+(6+2)+(6+2)+(3+5)+(3+5)+(4+4)+8}{88888888\times88888888}$$

$$=\frac{8+8+8+8+8+8+8+8}{88888888\times88888888}$$

$$=\frac{8\times8}{88888888\times88888888}$$

$$=\frac{1\times1}{11111111\times11111111}$$

$$=\frac{1}{123456787654321}$$

例 5 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$

分析:把和里的每个加数作恒等变形。

如:$\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times2}$ $\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}$ $\frac{1}{90}=\frac{1}{9\times10}$

变形后就可以利用已学的知识求得:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$$

$$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}+\frac{1}{9\times10}$$

$$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots\cdots+(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{10}$$

$$=\frac{9}{10}$$

例 6 计算$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+99+100}$

分析:这道式子中的每一项的分子都是1,分母是n个数的和,而不是相邻两个自然数的积。但是各项的分母都是从1开始的连续若干个自然数的和,这样我们就可以运用$\frac{(1+n)\cdot n}{2}$,那么$\frac{1}{1+2+\cdots\cdots+n}=\frac{2}{n\times(n+1)}$。所以题目中的每一项都变成了一个分子为2,分母为两个自然数乘积的形式。

解:$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+100}$

$=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{2}{99\times100}+\frac{2}{100\times101}$

$=2\times(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{99\times100}$

$+\frac{1}{100\times101})$

$=2\times(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}+\frac{1}{100}$

$-\frac{1}{101})$

$=2\times(1-\frac{1}{101})$

$=2\times\frac{100}{101}$

$=\frac{200}{101}$

$=1\frac{99}{101}$

练 习 一

1. $\frac{1993}{1\times2}+\frac{1993}{2\times3}+\cdots\cdots+\frac{1993}{1992\times1993}$

2. $\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+\frac{1}{12\times13}+\cdots\cdots+\frac{1}{59\times60}$

3. $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots\cdots+\frac{1}{132}$

4. $\frac{1}{2\times7}+\frac{1}{7\times12}+\frac{1}{12\times17}+\cdots\cdots+\frac{1}{97\times102}$

5. $\frac{1}{2\times5}+3\,\frac{1}{5\times8}+5\,\frac{1}{8\times11}+7\,\frac{1}{11\times14}+9\,\frac{1}{11\times14}$

$+11\,\frac{1}{17\times20}$

6. $\frac{1985+1987+1989+\cdots\cdots+1999}{1986+1988+1990+\cdots\cdots+2000}$

7. $1\,\frac{1}{3}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}$

8. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{100}$

$+\frac{2}{100}+\cdots\cdots+\frac{100}{100}+\frac{99}{100}+\cdots\cdots+\frac{2}{100}+\frac{1}{100}$

9. $1-\frac{1}{10}-\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}-\cdots\cdots-\frac{1}{10000000000}$

10. $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots\cdots$

$+\frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+10}$

11. $99999^2+199999$

12. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\cdots\cdots+\frac{59}{60}$

13. $\frac{1993}{12346^2-12345\times12347}$

14. $211\times555+445\times789+555\times789+211\times445$

15. $\frac{1991\times1992+1992\times1993+1991\times1993+1}{1+2+3+4+\cdots\cdots+1991+1992}$

16. 如果 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$

那么 $15^2+16^2+17^2+\cdots\cdots+21^2=?$

二　抽屜放苹果

抽屜放苹果，问题很简单，然而，简单的问题却能变化出很多复杂的数学问题。

例如，给你 3 个苹果，让你把它们放到 2 个抽屜里，那么可以肯定有一个抽屜至少有 2 个苹果。

给你 5 块手帕，让你把这些手帕分给 4 个小朋友，那么可以肯定有一个小朋友至少拿了 2 块手帕。

6 只鸽子飞进 5 个鸽笼，那么一定有一个鸽笼至少飞进了两只鸽子。

以上三个问题，看上去很明显，但要完全清楚地说明白，就需给出证明。以第一个问题为例，先用两种方法证明如下：

(1)列举法：3 个苹果放在 2 只抽屜里，共 4 种不同的放法，见下表：

放法 / 抽屜	①	②	③	④
1	3	2	1	0
2	0	1	2	3

第①、②种放法，在第 1 只抽屜里，至少有 2 只苹果，而第③、④种放法，在第 2 只抽屜里，至少有 2 只苹果，这样可以肯定有一个抽屜至少有 2 只苹果。

(2)反证法：如果命题的结论不成立，这就是说，每个抽屉里至多放1只苹果。于是，2只抽屉里至多共有2只苹果。而已知有3个苹果放在2个抽屉里，这样与假设相矛盾。所以，命题得到证明。

以上所证明的数学原理叫“鸽笼原理”，也叫“抽屉原理”。基本的抽屉原理认为：

1. 如果把 x+1 个物体放到 x 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里有不止一个这种物体；

2. 把 xm+1 个物体放到 m 个抽屉里，那么肯定有一个抽屉里至少有 x+1 个物体。通俗地可以这样说：“东西多，抽屉少，那么至少有两个东西放在同一个抽屉里。”

抽屉原理的用处很广。如果能灵活运用，可以解决一些看上去相当复杂、觉得无从下手，然而却是相当有趣的数学问题。

例1 任意3个自然数，总有2个自然数的和是2的倍数。

证明：将3个自然数，按奇数和偶数分成两类(将这两类数看作是两个抽屉)，3个自然数中，总有2个自然数具有相同的奇、偶性，也就是有2个同为奇数或同为偶数，那么，这2个数的和肯定是偶数，即2的倍数。

根据上例，请你说明：任意给出的9个自然数中，能否找到这样2个自然数A和B，且A和B的差能被8整除。

(提示：A和B的差除以8，按余数的不同，可分成几类？即可构成几个抽屉？)