GZXX

· 高级中学选修课教材 ·

GAOJI ZHONGXUE XUANXIUKE JIAOCAI

一元二次函数与一元二次方程

人民教育出版社中学数学室　编著

人民教育出版社

高级中学选修课教材

一元二次函数与一元二次方程

人民教育出版社中学数学室　编著

人民教育出版社

高级中学选修课教材

一元二次函数与一元二次方程

人民教育出版社中学数学室　编著

*

人民教育出版社出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：787 毫米×1 092 毫米　1/32　印张：4.125　字数：85 000

1993 年 1 月第 1 版　2006 年 2 月第 16 次印刷

印数：376 401～379 400

ISBN 7－107－01696－2
G·3226　定价：2.40 元

出版说明

为了更好地贯彻教育方针，在使学生全面的打好基础的前提下，发展他们的兴趣和特长，增强适应社会生活和生产的能力，解决当前普通高中存在的文理分科，学生知识结构不尽合理，学生课业负担过重，不利于全面提高学生素质的问题，国家教育委员会颁布了《现行普通高中教学计划的调整意见》.

这个《调整意见》规定学科课程采取必修课与选修课两种形式. 同时指出普通高中开设两种不同形式的选修课. 一种是高中三年级开设的分科性选修课，一种是高中一、二年级开设的单课性选修课.

为满足各地实施《调整意见》的需要，我社编辑出版了部分供高中一、二年级开设单课性选修课教材，供各地选用. 它包括语文、数学、外语等学科，还包括计算机、环境教育、职业指导等学科. 从内容上看，这些选修课基本上可以分为以下两种类型：(1)与必修课相关的选修课教材，内容是必修课内容的拓宽和加深，如《文言文选读》、《简易逻辑和平面向量》、《一元二次函数与一元二次方程》；(2) 与必修课联系不太密切，但对学生今后发展很有用的知识性或综合性选修课教材，如《数学实用问题》、《环境教育》、《程序设计》、《职业指导》等.

为了编好这套选修课教材，我社组织了由长期从事教材

编写的专业人员和具有丰富教学经验的教师，以及有关的专家、学者、科研人员组成编写队伍．其中有些教材经过几年来的教学实践，取得了良好的效果，受到师生的好评和欢迎．

为适应教学需要，我社还将继续组织出版一部分选修课教材以及与其配套的教学参考书．为了使选修课教材更加完善与充实，热烈欢迎广大教师、学生和关心教育的各界人士提出宝贵意见．

人民教育出版社

1993.1

前　言

为了适应高中开设选修课的需要，我室编写了《一元二次函数与一元二次方程》，供高中一年级单课性选修课选用.

一元二次函数是学习函数概念后较早学习的一类重要函数，它的性质和研究方法都具有重要意义. 它与一元二次不等式、一元二次方程的关系极为密切. 本书这部分内容有一元二次函数的图象及其性质，利用一元二次函数图象求一元二次不等式的解集，以及讨论一元二次函数在闭区间上的最大值和最小值等.

这些内容是在初中学习了函数概念及二次函数初步知识之后学习的，起着初中内容与高中内容的衔接作用. 既有复习和巩固的内容，也有拓宽和提高的内容. 本书对二次函数的性质不仅由图象直观地得出，并且给予了解析法证明. 图象直观是一种易于接受而又行之有效的方法，解析法证明又可使感性认识上升到理论高度来理解. 学生通过这部分内容的学习不仅对提高数学学习的成绩有着重要的影响，同时对提高学生的分析问题和解决问题的能力具有十分重要的意义.

实系数一元二次方程是方程内容最基础的内容. 一元二次方程根的判别式和根与系数的关系是它的重要内容，本书这部分内容为实系数一元二次方程有不相等的两实根、有相等的两实根、没有实根时各自的充要条件，根与系数的关系，

实根符号的判定，利用判别式求某些函数的值域或最大值和最小值，实系数一元二次方程的实根分布，整系数一元二次方程的有理根或整数根的讨论等.

为了讲上述内容，本章开头先学习准备知识——充要条件，它既可以使该部分内容讨论深入一步，又可以为同学们周密思考问题提供一个依据，提高学生的逻辑思维能力. 实系数一元二次方程根的性质还可以为进一步学习如解析几何内容的学习，打下一定的基础.

本书的特点是将知识的学习和能力的培养密切结合起来，努力在知识发生过程中和运用知识解决问题的过程中培养学生的能力，注意数学的基础理论和实际问题结合起来，使学生受到从实际问题中抽象数学模型和运用知识解决力所能及的问题的训练. 本书特别注意利用图象的直观，研究性质和解决有关的问题，同时也注意数学的思想方法的运用.

本书配有较多的基础训练题和有一定难度的综合题. 习题分以下三类:

习　题: 主要供课堂练习和课外作业用.

复习题: 主要供复习全章内容时选用.

思考题: 结合正文，具有一定的思考价值，主要的目的是加深对知识的理解.

本书是人民教育出版社数学室组织编写，编者曾宪源，责任编辑方明一

人民教育出版社中学数学室

1993. 1

目　　录

第一章　一元二次函数

1.1　一元二次函数的图象及其性质

我们知道，形如 $y=ax^2+bx+c$（其中 a,b,c 是实[1]数，且 $a\neq0$）的函数，叫做一元二次函数，这里 x 是自变量，$y=ax^2+bx+c$ 是函数的解析表达式，简称解析式.

研究函数首先要指明函数的定义域，对于用解析式表示的函数，如果不加特别限制，函数的定义域就是使函数的解析式有意义的自变量的集合. 对于一元二次函数来说，如果不加特别限制，它的定义域是全体实数，也就是实数集 R.

为了方便起见，在研究函数时常常用到区间的概念.

设 a,b 是两个实数，且 $a<b$，我们规定：

(1) 满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做**闭区间**，表示为 $[a,b]$；

(2) 满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做**开区间**，表示为 (a,b)；

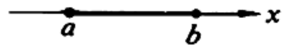
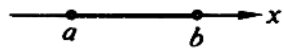
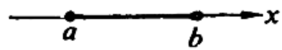
(3) 满足 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的集合和满足 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合都叫做**半开半闭区间**，分别表示为 $[a,b)$，$(a,b]$.

这里的实数 a,b 都叫做相应区间的**端点**.

在数轴上，这些区间都可以用一条以 a 和 b 为端点的线

[1] 本书中的文字系数，如不另加限制，都是指实数.

段来表示(如下表),在线段中,包括在区间内的端点用实心点表示,不包括在区间内的端点用空心点表示.

定　　义	名　　称	符　号	数　轴　表　示
$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	
$\{x\mid a<x<b\}$	开区间	(a,b)	
$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	半开半闭区间	$[a,b)$	
$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	半开半闭区间	$(a,b]$	

实数集R也可以用区间表示为$(-\infty,\ +\infty)$,“∞”读作“无穷大”,“$-\infty$”读作“负无穷大”,“$+\infty$”读作“正无穷大”.我们还把满足$x\geqslant a, x>a, x\leqslant b, x<b$的实数$x$的集合分别表示为$[a,+\infty),(a,+\infty),(-\infty,b],(-\infty,b)$.

因此,我们也可以说函数$y=ax^2+bx+c$的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

研究函数,既可以从函数的解析表达式出发来研究,也可以从函数的图象来研究,后者往往是更直观更易接受的一种方法.

我们已初步学过一元二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象及其性质.现在简要地复习一下.我们知道:

1. 函数$y=ax^2$的图象. 它是一条以$(0,0)$为顶点,以y

轴为对称轴的抛物线．当 $a>0$ 时，抛物线开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下(参看图 1-1)．

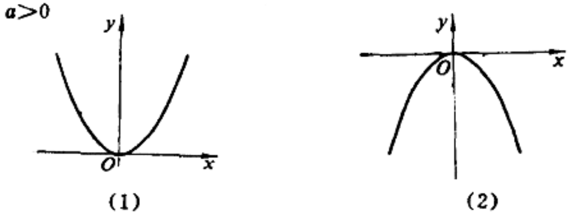


图 1-1

2．函数 $y=ax^2+y_0$ 的图象．它是一条以$(0,y_0)$为顶点，以 y 轴为对称轴的抛物线．当 $a>0$ 时，抛物线开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下(参看图 1-2)．

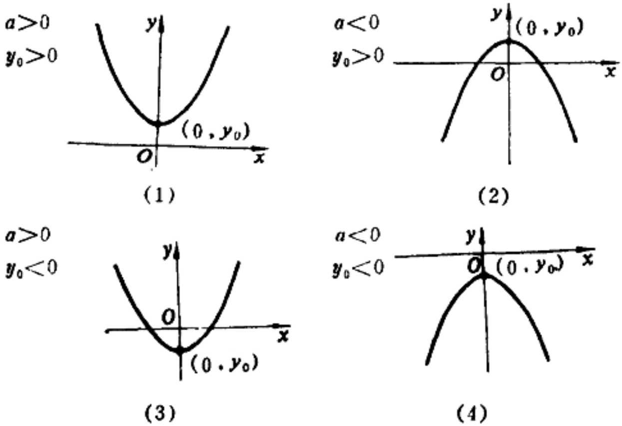


图 1-2

这一图象相当于把图 1-1 中的图象沿 y 轴向上（当 $y_0>0$ 时．参看图 1-2(1)、(2))或向下(当 $y_0<0$ 时，参看图 1-2

(3),(4))平行移动$|y_0|$个单位而得出的.

3. 函数 $y=a(x-x_0)^2$ 的图象. 它是一条以$(x_0,0)$为顶点,以直线 $x=x_0$ 为对称轴的抛物线. 当 $a>0$ 时,抛物线开口向上;当 $a<0$ 时,抛物线开口向下(参看图 1-3).

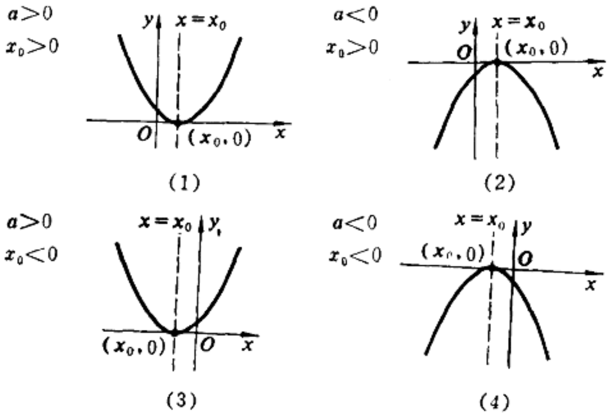


图 1-3

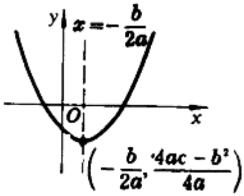
这一图象相当于把图 1-1 中的图象沿 x 轴向右(当 $x_0>0$ 时. 参看图 1-3(1)、(2))或向左(当 $x_0<0$ 时,参看图 1-3(3)、(4))平行移动$|x_0|$个单位得出的.

现在我们再来看函数$y=a(x-x_0)^2+y_0$的图象. 从以上图象之间的关系,可以看出,$y=a(x-x_0)^2+y_0$的图象相当于把 $y=a(x-x_0)^2$ 的图象沿 y 轴向上(当 $y_0>0$ 时)或向下(当 $y_0<0$ 时)平行移动$|y_0|$个单位得出的. 因此它的图象是一条以(x_0,y_0)为顶点,以直线 $x=x_0$ 为对称轴的抛物线. 当 $a>0$ 时,抛物线开口向上;当 $a<0$ 时,抛物线开口向下.

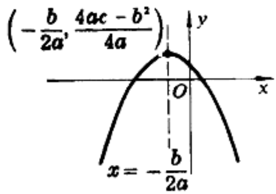
把函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$,经过配方,改写成

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

它就是 $y=a(x-x_0)^2+y_0$ 的形式，这时 $x_0=-\frac{b}{2a}$，$y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$. 因此函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象是一条以 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 为顶点，以直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 为对称轴的抛物线. 当 $a>0$ 时，抛物线开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下. 图 1-4(1)，(2) 分别是函数 $y=ax^2+bx+c$ 当 (1) $a>0$，$-\frac{b}{2a}>0$，$\frac{4ac-b^2}{4a}<0$，(2) $a<0$，$-\frac{b}{2a}<0$，$\frac{4ac-b^2}{4a}>0$ 时的示意图.



(1)



(2)

图 1-4

从二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象，直接可以得出二次函数的一些性质：

(1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 当 $a>0$ 时，函数的最小值是 $\frac{4ac-b^2}{4a}$，函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有最大值. 因此函数的值域是 $\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$.

当 $a<0$ 时，函数的最大值是$\frac{4ac-b^2}{4a}$，函数在$(-\infty,+\infty)$上没有最小值. 因此函数的值域是$\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$.

(3) 当 $a>0$ 时，函数图象对应的抛物线的开口向上，且向上无限伸展. 这时，当 $x\in\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$时，$y$ 值随 x 值的增加而减少，也就是说，函数 y 在$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$上是递减的；当$x\in\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$时，$y$ 值随着 x 值的增加而增加，也就是说，函数 y 在$\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$上是递增的[1].

当 $a<0$ 时，函数图象对应的抛物线的开口向下，且向下无限伸展. 这时，当 $x\in\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$时，$y$ 值随 x 值的增加而增加，也就是说，函数 y 在$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$上是递增的；当$x\in\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$时，$y$ 值随 x 值的增加而减少，也就是说，函数 y 在$\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$上是递减的.

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的这些性质也可以从函数的解析式出发来得出. 例如，要得出当 $a>0$ 时函数 y 在

---

[1] 上面的叙述换句话说就是：函数 y 在$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$上是减函数，在$\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$上是增函数.

$\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right]$ 上是递减的，只要能证明对任意两点 x_1，$x_2\in$ $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$，且 $x_2>x_1$ 时，对应于 x_2 的函数值 y_2 小于对应于 x_1 的函数值 y_1. 下面，我们来证明一下.

把 $y=ax^2+bx+c$ 改写为

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

对任意两点 $x_1,x_2\in\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$，对应的函数值分别为

$$y_1=a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},y_2=a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad y_2-y_1&=a\left[\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2\right]\\&=a(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)+\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)\right].\end{aligned}$$

当 $x_1,x_2\in\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 且 $x_2>x_1$ 时，$x_2+\frac{b}{2a}\leqslant 0$，$x_1+\frac{b}{2a}\leqslant 0$，且等号不能同时成立，所以 $\left[\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)+\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)\right]<0$，而 $x_2-x_1>0$，又 $a>0$，因而

$$y_2-y_1<0，即\ y_2<y_1.$$

同学们可试着证明一下函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 在 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上是递增的.

例 1 求出函数 $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-1$ 所对应的抛物线的对称轴和顶点，并画出函数的图象.

解: $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-1$

$=-\frac{1}{3}(x^2-6x+3)$

$=-\frac{1}{3}[(x-3)^2-6]$

$=-\frac{1}{3}(x-3)^2+2.$

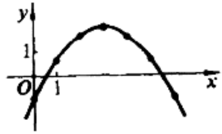


图 1-5

所以抛物线的对称轴是直线 $x=3$,顶点是(3,2).

利用对称性选点如下表:

x	…	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	5	6	…
y	…	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{23}{12}$	2	$\frac{23}{12}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	-1	…

描点,连成光滑曲线,即得所求图象(图 1-5).

也可以先画出 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的图象,再将图象向右平行移动 3 个单位,得出 $y=-\frac{1}{3}(x-3)^2$ 的图象,然后将此图象向上平行移动 2 个单位,最后得出 $y=-\frac{1}{3}(x-3)^2+2$ 的图象(图 1-6).

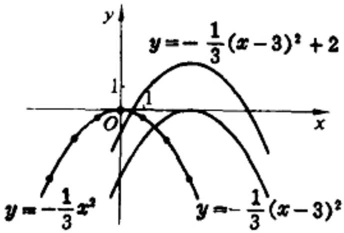


图 1-6

例 2　画出函数 $y=x^2+8x+7$ 的大致图象，并求函数的最大值或最小值.

解：由 $y=x^2+8x+7$

$$=(x+4)^2-9,$$

可知它是以 $x=-4$ 为对称轴，以 $(-4,-9)$ 为顶点且开口向上的抛物线. 当 $x=0$ 时，$y=7$，所以抛物线经过点 $(0,7)$，又

$$y=(x+1)(x+7),$$

所以抛物线又经过 $(-1,\ 0)$ 和 $(-7,0)$ 两点. 由此可画出函数 $y=x^2+8x+7$ 的大致图象(图 1-7).

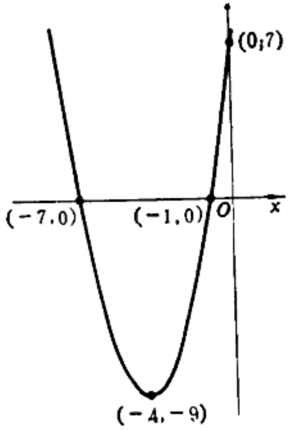


图　1-7

由图可以看出，函数在定义域上有最小值 -9，但没有最大值.

例 3　已知二次函数的图象通过 $A(1,\ 6)$，$B(2,\ 15)$，$C(-1,0)$ 三点，求这个二次函数.

解：设二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c$，将点 $A(1,6)$，$B(2,15)$，$C(-1,0)$ 的坐标代入上述函数式，得到关于 a，b，c 的联立一次方程组：

$$\begin{cases}a+b+c=6,\\4a+2b+c=15,\\a-b+c=0.\end{cases}$$

解得 $a=2,b=3,c=1$.

因此，所求的二次函数为

$$y=2x^2+3x+1.$$