考试通

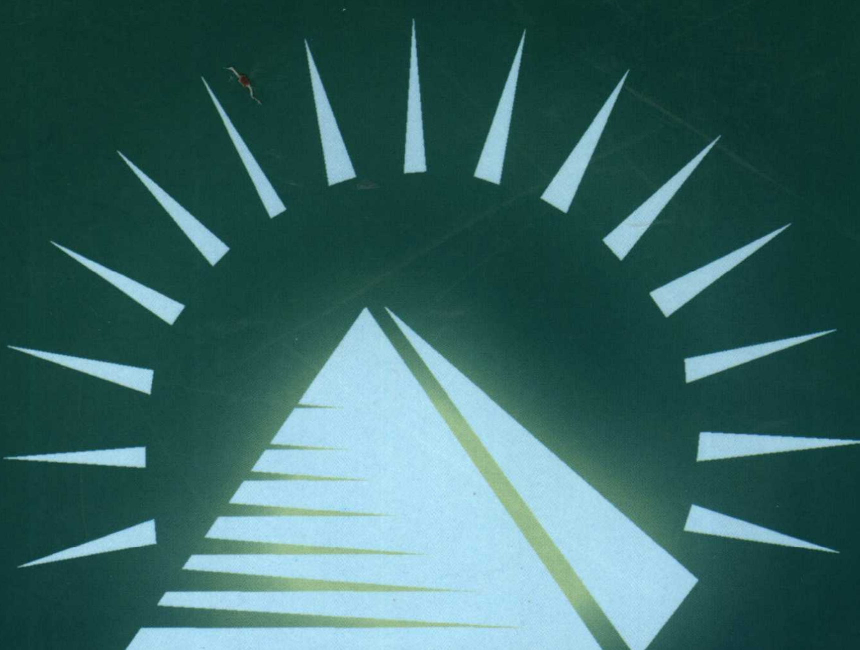
全国硕士研究生入学考试

真题

详解与样题精选

(数学一)

汪志宏　编著



清华大学出版社

全国硕士研究生入学考试
真题详解与样题精选
(数学一)

汪志宏　编著

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书参照教育部最新制定的全国硕士研究生入学考试大纲(数学一)编写而成，对近16年来全国硕士研究生入学考试(数学一)的真题进行了深入的分析，然后将真题按章节分类编排，并按考试大纲的要求逐考点地对真题进行详细的分析，对相关知识点进行详尽的介绍。通过对真题的分类、分析和相关考点的理论链接，使考生能够熟悉全国硕士研究生入学考试(数学一)的内容，并抓住考试的重点与难点，掌握考试中经常出现的题型和每种题型的解法，同时也使考生熟悉专家们的出题思路、命题规律，从而提高应试复习的效率和命中率。另外，本书还提供了10套样卷。样卷的命题形式、考点分布、难易程度等均与等级考试的真实试卷相当，便于考生考前实战冲刺，体验真实训练。

本书特别适合参加全国硕士研究生入学考试(数学一)的考生作考前复习，也可作为理工科数学的教学辅导和参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试真题详解与样题精选(数学一)/汪志宏编著.—北京：清华大学出版社，2006.5
ISBN 7-302-12901-0

Ⅰ.全…　Ⅱ.汪…　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题　Ⅳ.G643

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第037462号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
组稿编辑：章忆文
文稿编辑：张彦青
排 版 者：朱　康
印 装 者：北京国马印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×260　**印张**：22.5　**字数**：534千字
版　次：2006年5月第1版　2006年5月第1次印刷
书　号：ISBN 7-302-12901-0/O·528
印　数：1～4000
定　价：32.00元

读者回执卡

欢迎您立即填妥回函

您好！感谢您购买本书，请您抽出宝贵的时间填写这份回执卡，并将此页剪下寄回我公司读者服务部。我们会在以后的工作中充分考虑您的意见和建议，并将您的信息加入公司的客户档案中，以便向您提供全程的一体化服务。您享有的权益：

★ 免费获得我公司的新书资料；
★ 寻求解答阅读中遇到的问题；
★ 免费参加我公司组织的技术交流会及讲座；
★ 可参加不定期的促销活动，免费获取赠品；

读者基本资料

姓　　名________ 性　　别□男　　□女 年　　龄________
电　　话________ 职　　业________ 文化程度________
E-mail________ 邮　　编________
通讯地址________

请在您认可处打✓（6至10题可多选）

1、您购买的图书名称是什么：________
2、您在何处购买的此书：________
3、您对电脑的掌握程度： □不懂 □基本掌握 □熟练应用 □精通某一领域
4、您学习此书的主要目的是： □工作需要 □个人爱好 □获得证书
5、您希望通过学习达到何种程度： □基本掌握 □熟练应用 □专业水平
6、您想学习的其他电脑知识有： □电脑入门 □操作系统 □办公软件 □多媒体设计 □编程知识 □图像设计 □网页设计 □互联网知识
7、影响您购买图书的因素： □书名 □作者 □出版机构 □印刷、装帧质量 □内容简介 □网络宣传 □图书定价 □书店宣传 □封面，插图及版式 □知名作家（学者）的推荐或书评 □其他
8、您比较喜欢哪些形式的学习方式： □看图书 □上网学习 □用教学光盘 □参加培训班
9、您可以接受的图书的价格是： □ 20元以内 □ 30元以内 □ 50元以内 □ 100元以内
10、您从何处获知本公司产品信息： □报纸、杂志 □广播、电视 □同事或朋友推荐 □网站
11、您对本书的满意度： □很满意 □较满意 □一般 □不满意
12、您对我们的建议：________

请剪下本页填写清楚，放入信封寄回，谢谢！

1 0 0 0 8 4

贴邮票处

北京100084—157信箱

读者服务部　　　　收

邮政编码：□□□□□□

前　言

全国硕士研究生入学考试数学试题是广大工作在第一线的数学教师和命题组专家教授集体智慧的结晶。它不仅展示了全国硕士研究生入学考试数学课程考试的全貌，也直接反映了命题的指导思想、规律和命题趋势。发现规律，把握试题特点、考试重点难点及命题规律，可使读者明确复习方向，抓住要领，避免浪费宝贵的时间，大大有利于读者复习迎考。针对这样的需要，我们参照教育部最新制定的全国硕士研究生入学考试大纲(数学一)，结合在工科数学考研辅导和工科数学教学学习中的实际情况，编写了这本参考书。

本书紧密围绕帮助考生复习迎考这一中心任务，对近 16 年来的考研试题(数学一)按考点进行了全面的分类，重点讲述和分析试题的解题方法及技巧，以培养考生的解题能力；对各考点进行了理论链接，直观展现了考点所涉及的知识点，归纳了所考考点及知识点中的重点、难点和典型题的解法，并指出解题中易出现的错误，特别适合于备考全国硕士研究生入学考试的读者使用。

本书除展现出历年试题全貌、内容叙述清楚易懂等特点外，还有以下特色：

1. 注重解题思路及技巧的培养。本书不仅对考研试题解题思路及技巧进行了重点分析，还对每一考点每类题型进行了理论链接，注意知识点的精确表述和一题多解、举一反三，有利于备考人员扩大知识面，更全面地掌握所学知识；着力培养备考人员的数学思维，提高解决问题的能力。

2. 所列考点全面，注意前后考点知识点的连贯性。这样，有利于备考人员对所学知识的巩固，克服了前后知识脱节的缺点，有助于备考人员形成严密的知识体系；同时也讲解了以往容易混淆和忽略的问题。

3. 着眼于备考人员的实际需要。所附 10 套精选样卷均给出详细的解答，以方便备考人员更快地发现和更好地解决自己学习及解题中遇到的问题。

4. 通过“真题→精解→知识点→样卷练习”这一过程的学习和训练，使备考人员更快更好地掌握全国硕士研究生入学考试数学试题的命题重点和规律，快速提高备考人员的应试解题能力。

本书由全国硕士研究生入学考试命题研究组(数学一)专项组主编，汪志宏、田玉敏、李业联、田俊峰执笔编写，汪志宏统稿，何光明负责本书的策划与整体框架设计。另外，潘保国、王家杰、胡贵安、彭宜青、李文军、姜海波、李文涛、石雪梅、杨明、杨萍、赵传申、王国全、陈智等同志参与了资料整理工作，并提出了很多宝贵意见，谨在此一并表示感谢。

由于水平有限，书中难免出现疏漏及不妥之处，敬请读者及数学界同仁批评指正。

编者

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

考点 1　函数的复合　★★★

考点点拨　考查函数的复合，主要是利用函数的性质，采用代入法或分析法解题. 求函数值域及定义域.

【试题 1】(1990 年，3 分)设函数 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$______.

分析　由于 $f(x)$ 值域为集合 $\{0,1\}$，即 $|f(x)|$ 不超过 1，则易得出结果.

解答　由于对于一切 x，总有 $|f(x)|\leqslant 1$，所以 $f[f(x)]=1$，

理论链接　求复合函数的一般方法：在利用函数有界性、单调性、周期性、奇偶性等性质的同时，对于初等函数与初等函数的复合，可采用代入法，如 $f(x)=x^2$，$g(x)=\sin x$，则 $f[g(x)]=\sin^2 x$，$x\in\mathbf{R}$；对于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合，可采用分析法，如试题 1. 注意：g 与 f 构成复合函数 $f\cdot g$ 的条件是函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域 D_f 内，即 $g(D)\subset D_f$. 否则，不能构成复合函数.

考点 2　极限四则运算法则　★★★★★

考点点拨　考查数列和函数极限的四则运算法则，主要是结合常用的数列前 n 项求和公式等常用公式，将数列或函数通过适当变形，使得数列或函数满足四则运算法则的条件，然后计算.

【试题 2】(1992 年，3 分)当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限应________。

(A) 等于 2　　(B) 等于 0　　(C) 为 ∞　　(D) 不存在但不为 ∞

分析　由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，所以要分别求左右极限.

解答

因为

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

所以当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限不存在但不为 ∞，选(D).

理论链接

1. 收敛数列的运算法则：

设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，那么

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$；

(3) 当 $y_n\neq 0\,(n=1，2，\cdots)$ 且 $B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

2. 函数极限四则运算法则：

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$，$(B\neq 0)$

3. 必须牢牢记住运算法则前提条件是已知的数列极限存在：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$；或函数的极限存在：$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$；并且分母不为零.

4. 实际往往是将极限四则运算法则与根据求函数左右极限来求极限、洛必达法则求极限、化成定积分求极限、夹逼定理、等价无穷小量理论等混合运用.

【试题 3】(2000 年，5 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$.

分析　由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$；　$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=1$，所以要分别求左右极限.

解答　由于

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\frac{2+0}{1+0}+(-1)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{0+0}{0+1}+1=1,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=1.$$

理论链接

1. 函数的左右极限存在且相等，是函数的极限存在的充要条件.

2. 函数的左右极限只要有一个不存在(包括极限没有或为∞)或左右极限都存在但不相等，则函数的极限就不存在. 极限$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$，$\lim\limits_{x\to\infty}a^x(a>0)$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$，$\lim\limits_{x\to 0}\cot x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$，$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arccot} x$，$\lim\limits_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}\frac{1}{x}$都不存在极限，所以一般函数里若含有这些函数，并且自变量的趋近方式与上面列出的一致，则必须求左右极限.

【试题 4】(1997 年，3 分)已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$______.

分析　对函数简单变形，即分子分母同时除以x，再利用特殊极限和无穷小量定义便可得解.

解答　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\frac{\ln(1+x)}{x}}=\dfrac{3}{2}$.

【试题 5】(2003 年，4 分)设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有

(A) $a_n<b_n$对任意n成立　　(B) $b_n<c_n$对任意n成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

(　)

分析　利用函数极限的性质和无穷大量的定义即可得解.

解答　$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$，即极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在，选(D).

理论链接　无穷大量乘以一有界不变号的量还是无穷大量. 无穷大量与无穷大量的乘积还是无穷大量.

考点 3　两个重要极限　★★★★★

考点点拨　考查两个重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$及其简单变形，在变形过程中注意四则运算法则的条件.

【试题 6】(1995 年，3 分)$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$______.

分析　由于极限是1^∞形式，所以要用特殊极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$求解.

解答　$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{6x}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}}=e^6$.

理论链接

1. 两个重要极限在使用时可以变形，

如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin x}=1$， 当 $\varphi(x)\to 0$ 时， $\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$，当 $\varphi(x)\to\infty$ 时，$\lim\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$；$\varphi(x)\to 0$ 时，$\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$ 等.

2. 易得出公式： $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$ 时， 有 $\lim\limits_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^{f(x)}=\mathrm{e}^{A}$； $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 时， 有 $\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{1}{x})^{x}]^{f(x)}=\mathrm{e}^{A}$.

【试题 7】(1990 年，3 分)设 a 是非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=$______.

分析 $a\neq 0$，极限是 1^{∞} 形式，所以要用特殊极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 转化形式求解.

解答 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{2a}$.

【试题 8】(1996 年，3 分)设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=8$，则 $a=$______.

分析 极限是 1^{∞} 形式，所以要用特殊极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 转化形式求解.

解答 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{3a}=8$，则 $a=\ln 2$.

理论链接 以上几题都可以化成 $\lim\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$ ($\varphi(x)\to\infty$)或 $\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$ ($\varphi(x)\to 0$)形式，较直观简单.

【试题 9】(1991 年，5 分)求 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

分析 极限是 1^{∞} 形式，要用特殊极限求解. 为此，须凑出 $\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$ ($\varphi(x)\to 0$)形式.

解答 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{\pi}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\{[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}\}^{\frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.

【试题 10】(1993 年，5 分)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

分析　极限是1^∞形式，要用特殊极限求解．为此，须凑出$\lim\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=$ e$(\varphi(x)\to\infty)$形式.

解答　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}}\right]^{x(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)}$，

而

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=2+0=2,$$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^2$.

【试题 11】(2003 年，4 分)$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$______.

分析　极限是1^∞形式，要用特殊极限求解. 为此，须凑出$\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=$ e$(\varphi(x)\to0)$形式.

解答　$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}$，

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

理论链接　求1^∞型极限不但可以用重要极限求解，还可以用洛必达法则求解，此法则要求先取自然对数. 如试题 11 还可有以下解法：

令$y=(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$，则$\ln y=\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$，而

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{2x}{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1+x^2}{2}\frac{\tan x}{x}\right)=-\frac{1}{2},$$

故$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

考点 4　单调有界准则　★★★

考点点拨　考查单调有界数列必有极限.

【试题 12】(1996 年，5 分)设$x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ $(n=1, 2, \cdots)$，试证数列$\{x_n\}$的极限存在，并求此极限.

分析　由于数列非负，所以只要证明单调有上界即可.

解答　首先利用数学归纳法证数列$\{x_n\}$单调递减，即证对于一切自然数，有$x_n > x_{n+1}$.

$x_1 = 10$，$x_2 = \sqrt{6+x_1} = \sqrt{16} = 4$，$x_1 > x_2$，所以$n=1$时有$x_n > x_{n+1}$.

假设$n=k$时有$x_n > x_{n+1}$，则$x_{k+1} > \sqrt{x_k+6} > \sqrt{x_{k+1}+6} = x_{k+2}$，所以$n=k+1$时有$x_n > x_{n+1}$，即对于一切自然数，有$x_n > x_{n+1}$.

而$0 < x_n \leqslant 10$，即数列$\{x_n\}$有界. 由于单调有界数列必有极限，所以数列$\{x_n\}$的极限存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对$x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$两边取极限，有$a = \sqrt{6+a}$，所以$a=3$($a=-2$舍去).

【**试题 13**】(2006 年，12 分)设数列$\{x_n\}$满足$0 < x_1 < \pi$，$x_{n+1} = \sin x_n$.

(1) 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$存在，并求极限. (2) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

分析：利用单调有界数列必有极限证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$存在，再求极限；利用洛必达法则和等价无穷小量代换求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解答：

(1) 当$x_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$时，$x_2 = \sin x_1 < x_1$，则$x_2 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

类推，$x_{n+1} = \sin x_n < x_n$，$x_n \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$。故数列$\{x_n\}$单调递减.

而$|x_{n+1}| = |\sin x_n| \leqslant 1$，即有界. 所以数列$\{x_n\}$的极限存在，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$，即$a = \sin a$，所以$a=0$.

当$x_1 \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$时，$x_2 = \sin x_1 \leqslant 1 < \dfrac{\pi}{2}$，则$x_2 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. 类似上面所解，有$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = 0$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = 0$.

(2) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

而$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left[\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)+1\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\frac{\sin x}{x})}=e^{-\frac{1}{6}}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

理论链接　“单调有界数列必有极限”定理还可以叙述为：“单调递减有下界数列必有极限”或“单调递增有上界数列必有极限”．同时注意：若数列$\{x_n\}$极限存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}$，其中$k$为有限整数.

考点 5　无穷小的阶　★★★★

考点点拨　考查高阶无穷小量、同阶无穷小量、等价无穷小量，重点考查等价无穷小量在求极限中的应用.

【试题 14】(1991 年，3 分)已知当$x\to 0$时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小，则常数$a=$______.

分析　利用常见的等价无穷小以及等价无穷小定义：如果$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则$\beta$与$\alpha$是等价无穷小.

解答　当$x\to 0$时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{a}{3}x^2$，$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2a}{3}=1,\quad a=-\frac{3}{2}.$$

【试题 15】(1994 年，5 分)设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中$a^2+c^2\neq 0$，则必有

(A) $b=4d$　　(B) $b=-4d$　　(C) $a=4c$　　(D) $a=-4c$

(　　)

分析　函数分子分母同时除以x，再利用等价无穷小.

解答　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{a\tan x}{x}+\frac{b(1-\cos x)}{x}}{\frac{c\ln(1-2x)}{x}+\frac{d(1-e^{-x^2})}{x}}$，而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x}{x}=a$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b(1-\cos x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2bx^2}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c\ln(1-2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2cx}{x}=-2c$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{d(1-e^{-x^2})}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2d}{x}=0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\frac{a}{-2c}=2,\quad a=-4c，选(D).$$

【试题 16】(2006 年，4 分) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$______.

分析：利用等价无穷小量计算极限.

解答：由于当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

理论链接 主要考查了高阶无穷小、同阶无穷小以及等价无穷小量.

1. 高阶无穷小

(1) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta=0(\alpha)$；

(2) 应用(举例说明)：若 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0$.

2. 同阶无穷小

(1) 定义：如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则 β 与 α 是同阶无穷小；

(2) 应用(举例说明)：若 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=A\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0$.

3. 等价无穷小量

(1) 定义：如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，就说 β 与 α 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$；

(2) 等价代换定理：设 α，α'，β，β' 是同一极限过程中的无穷小，且满足 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，及 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在或为无穷大，则：$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$；

也有：若在某变化过程下，$\alpha(x)\sim\bar{\alpha}(x)$，则 $\lim f(x)\alpha(x)=\lim f(x)\bar{\alpha}(x)$.

(3) 等价无穷小量在极限运算中占有重要地位，常见的等价无穷小量有：当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$ 等；

常见的等价无穷小可以推广为：如当 $\varphi(x)\to 0$ 时，有 $\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$，

$\sqrt[n]{1+\varphi(x)}-1\sim\dfrac{\varphi(x)}{n}$，$1-\cos\varphi(x)\sim\dfrac{\varphi^2(x)}{2}$ $\quad\ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$ 等.

(4) 关于无穷小的等价代换定理需要注意的问题.

① 在求无穷小的商的极限时，可将分子、分母通过等价代换，将函数化简后再求极限；

② 等价代换可以只对分子或分母进行，即 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha}{\beta'}$，也可以只对部分乘积因子进行；但对于加、减中的每一项不能分别作代换.

试题 15 还可用以下方法求解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{a\tan x}{x}+\dfrac{b(1-\cos x)}{x}}{\dfrac{c\ln(1-2x)}{x}+\dfrac{d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}{x}},$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x}{x}=a$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b(1-\cos x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b\sin x}{1}=0$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c\ln(1-2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2c}{1-2x}=-2c$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xd\mathrm{e}^{-x^2}}{1}=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=\dfrac{a}{-2c}=2$， $a=-4c$， 选(D).