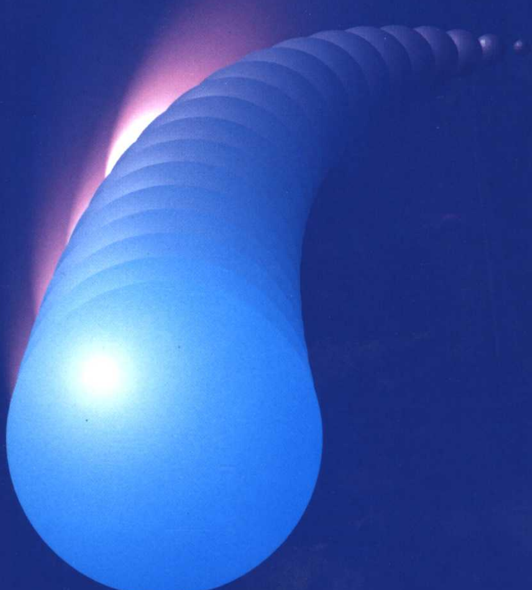
新世纪高等院校精品教材

下册

微积分学

吴迪光　张　彬　编著



浙江大學出版社

新世纪高等院校精品教材

微积分学

下册

吴迪光 张 彬 编著

浙江大學出版社

微积分学

下　册

吴迪光　张　彬　编著

责任编辑　樊晓燕

*　*　*

浙江大学出版社出版
（杭州浙大路38号　邮政编码310027）
（E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
浙江大学出版社电脑排版中心排版
德清县第二印刷厂印刷
浙江省新华书店经销

*　*　*

787×1092　16开　20.25印张　518千字
1995年10月第1版　2006年7月第7次印刷
印数：16501—18000

ISBN 7-308-01539-4/O・178　定价：20.00元

目 录

第八章　矢量代数与空间解析几何

矢量在科学技术中是一类十分普遍的量，从力学、物理学中的一些基本法则抽象概括出来的矢量的代数运算，成为学习物理学、力学和电学等的基础知识，也是讨论几何问题的有力工具. 本章介绍矢量及其代数运算，并用它来讨论空间解析几何问题. 为与中学数学衔接，先介绍一点行列式作为预备知识.

§1　预备知识 —— 二阶与三阶行列式

1.1　二阶行列式

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & (1.1) \\ a_2x + b_2y = c_2. & (1.2) \end{cases}$$

用加减消去法解，$(1.1) \times b_2 - (1.2) \times b_1$，得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2,$$

$(1.2) \times a_1 - (1.1) \times a_2$，得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1,$$

当 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 时，可得方程组的唯一解

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{1.3}$$

为便于记忆，我们引入一种符号来表示这组解的公式(1.3).

分母都是 $a_1b_2 - a_2b_1$，只与方程组的系数有关，其中的各个乘数按它们原来在方程组中的位置排列成正方形，即

$$\begin{matrix} a_1 & & b_1 \\ & \times & \\ a_2 & & b_2 \end{matrix}$$

可以看出 $a_1b_2 - a_2b_1$ 是正方形中实线表示的对角线(叫做**主对角线**)上两个数的积，再添加正号与虚线表示的对角线(叫做**副对角线**)上两个数的积，再添上负号所构成的两项之和. 我们引进符号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

来表示代数式　$a_1b_2 - a_2b_1$，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \triangleq a_1b_2 - a_2b_1. \tag{1.5}$$

称符号(1.4)为**二阶行列式**，a_1, a_2, b_1, b_2 称为行列式的**元素**. 这四个元素排列成二行二列(横排叫**行**，竖排叫**列**). 利用对角线把二阶行列式表示成(1.5)式，叫做行列式的**展开式**. 这种展开方法称为**对角线法则**.

这样二元线性方程组在系数行列式 $D \triangleq \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 的条件下，解的公式可写成

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}. \tag{1.6}$$

其中 $D_x \triangleq \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$D_y \triangleq \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

公式(1.6)称为解二元线性方程组的**克莱姆**(Cramer)**规则**.

例 1 解线性方程组 $\begin{cases} 2x - 2y = -3, \\ x + 4y = 1. \end{cases}$

解 这时 $D = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times (-2) = 10,$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \times 4 - 1 \times (-2) = -10,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 1 \times (-3) = 5.$$

因系数行列式 $D \neq 0$，所以方程组的唯一解是

$$x = \frac{D_x}{D} = -1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{2}.$$

1.2 三阶行列式

再用消去法解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \tag{1.7}$$

先从前两个方程消去 z，后两方程消去 z，得到只含 x,y 的二元线性方程组；再从这两个方程消去 y，就得到

$$\begin{aligned} &(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)x \\ &= b_1c_2d_3 + b_2c_3d_1 + b_3c_1d_2 - b_1c_3d_2 - b_2c_1d_3 - b_3c_2d_1, \end{aligned}$$

当 x 的系数

$$D \triangleq (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1) \neq 0$$

时，解得 x，同理可求得 y 和 z：

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{D}(b_1c_2d_3 + b_2c_3d_1 + b_3c_1d_2 - b_1c_3d_2 - b_2c_1d_3 - b_3c_2d_1), \\ y &= \frac{1}{D}(a_1c_3d_2 + a_2c_1d_3 + a_3c_2d_1 - a_1c_2d_3 - a_2c_3d_1 - a_3c_1d_2), \\ z &= \frac{1}{D}(a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3 - a_3b_2d_1). \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

所以，当 $D \neq 0$ 时，(1.7)的唯一解就是(1.8).

为便于记忆，我们引进三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

并规定它表示所有取自不同行不同列的三个元素的乘积，冠上一定的正负号的六项代数和：

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1,$$

即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \triangleq a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1, \tag{1.9}$$

称(1.9)为三阶行列式的**展开式**. 展开三阶行列式也可采用对角线法则：凡是主对角线(从左上角到右下角及与其平行的对角线，如图 8-1 中的实线所示)上三个元素乘积再冠上正号；副对角线(从右上角到左下角及与其平行的对角线，如图 8-1 中的虚线所示)上三个元素的乘积再冠上负号. 三阶行列式就表示这六项之和.

这样(1.8)中的分母都是三元线性方程组(1.7)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

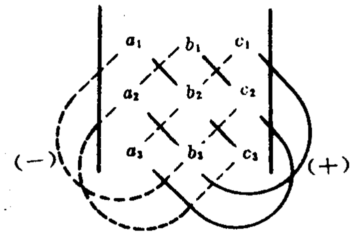


图 8-1

而分子是把行列式 D 中的第 1,2,3 列分别换成常数项 d_1, d_2, d_3 得到的行列式 D_x, D_y, D_z，即

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

因此三元线性方程组(1.7)在系数行列式 $D \neq 0$ 条件下的唯一解(1.8)就可以简记成

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}. \tag{1.10}$$

这称为三元线性方程组的克莱姆规则.

例 2 用对角线法则计算三阶行列式

解
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1\times5\times6 + 2\times3\times(-3) + (-7)\times4\times0 - (-7)\times5 \times(-3) - 1\times3\times0 - 2\times4\times6$$
$$= 30 - 18 + 0 - 105 - 0 - 48 = -141.$$

例 3 解线性方程组 $\begin{cases} 2y + 3z = -8, \\ x + 3y - 2z = 2, \\ 2x - 3y + 7z = -9. \end{cases}$

解 这时

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -49, \quad D_x = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -9 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -49,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 0 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -9 & 7 \end{vmatrix} = 49, \quad D_z = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 98.$$

因为系数行列式 $D \neq 0$，故方程组的唯一解是

$$x=\frac{D_x}{D}=1,\quad y=\frac{D_y}{D}=-1,\quad z=\frac{D_z}{D}=-2.$$

用对角线法则计算行列式，有时运算较繁，尤其是这种方法对于三阶以上的行列式不再成立，所以需要寻求别的计算方法. 这个问题将在《线性代数》课程中通过对行列式的一般定义与性质的讨论得到多种方法，这里仅介绍所谓按行展开法.

将(1.9)式的右边按 a_1,b_1,c_1 集项

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2),$$

再用二阶行列式记括号内的代数式，便得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{1.11}$$

其中三个二阶行列式 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ 是三阶行列式中第一行的元素 a_1,b_1,c_1 分别划去它们各自所在行及所在列的元素后余下的二阶行列式，分别称为元素 a_1,b_1,c_1 的**余子**(行列)式. 公式(1.11)称为三阶行列式**按第一行的展开式**. 这样，三阶行列式的计算便降为二阶行列式的计算. 展开式(1.11)中应注意第二项 b_1 与它的余子式 $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 的积必须冠上负号.

例 4 用按行展开法重新计算例 2.

解
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -7 & 3 & 6 \end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}-4\times\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}+(-3)\times\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$$
$$=30-48-123=-141.$$

例 5 验证三阶行列式交换任意两行元素的位置，行列式的值只相差一个负号.

证 记三阶行列式为 D，并按第一行展开，有

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-b_1a_2c_3+b_1a_3c_2+c_1a_2b_3-c_1a_3b_2. \tag{1.12}$$

若将上式右边六项按 a_2,b_2,c_2 集项，得

$$D=a_2(b_3c_1-b_1c_3)-b_2(a_3c_1-a_1c_3)+c_2(b_1a_3-b_3a_1)$$
$$=-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}.$$

把负号括出，并用按第一行元素展开公式(1.11)就是

$$D=-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

即得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

这表明交换行列式第一行与第二行的元素,行列式要变号.

同理,若将(1.12)式右边的六项按 a_3,b_3,c_3 集项,可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

这表明交换第一行与第三行的元素,行列式也要变号.

余下只须证明交换第二行与第三行的元素命题也成立.这点不难,接连使用三次上面已证的结论就可得证.

证毕

§2　矢量概念及其线性运算、矢量的投影

2.1　矢量概念

在科学技术中经常遇到的量有两类,一类是只有大小可以用实数表示的量,叫做**数量**(或**标量**),如时间、温度、功、质量、长度等.另一类是既有大小又有方向的量叫做**矢量**(或**向量**),如速度、加速度、力、位移、电场强度等.矢量用拉丁字母上加箭头表示,如 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$,或用黑体字表示如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$.矢量的大小又叫矢量的**模**,用 $|\vec{a}|$(或 $|\boldsymbol{a}|$) 表示矢量 $\vec{a}$(或 $\boldsymbol{a}$) 的模.

矢量在几何上采用空间的一个有向的线段表示,以这个线段的长度表示矢量的模,以它的方向表示矢量的方向,如图 8-2.特别是起点为 P 终点是 Q 的矢量,记为$\overrightarrow{PQ}$,其模记作 $|\overrightarrow{PQ}|$,如图 8-3.

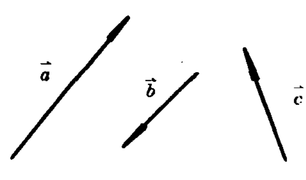


图 8-2

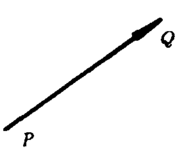


图 8-3

矢量的本质属性是大小和方向,数学中研究的矢量只考虑其大小和方向,而与起点位置无关,这类矢量叫做**自由矢量**.于是两个大小相等,方向相同的矢量 $\vec{a},\vec{b}$ 称为**相等矢量**.记作 $\vec{a}=\vec{b}$.它们经过平行移动是能够重合的.

矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 经过平行移动使起点重合时所构成的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,称作**矢量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角**.特别当 $\theta=0$ 或 π 时,称**矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行**,记作 $\vec{a}\parallel\vec{b}$;当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,称**矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相互垂直**(或**正交**),记作 $\vec{a}\perp\vec{b}$.

模为 1 的矢量,称为**单位矢量**,方向与 $\vec{a}$ 相同的单位矢量记作$\vec{a^0}$.模为零的矢量,称为**零矢量**,记作 $\vec{0}$,零矢量的方向可以任意选取.

如果一组矢量平行于同一条直线(或同一个平面),则称它们是**共线**(或**共面**) **矢量**.由此可知平行矢量一定是共线的.

2.2 矢量的线性运算

(一) 矢量的加减法

根据力的合成原理，我们定义矢量的加法运算.

定义 经过平行移动使矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的起点重合，以它们为邻边的平行四边形的对角线矢量 $\vec{c}$(如图 8-4)，称为矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**和矢量**. 记作 $\vec{a}+\vec{b}$，即 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. 这种运算叫做**矢量的加法**.

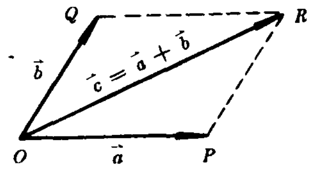


图 8-4

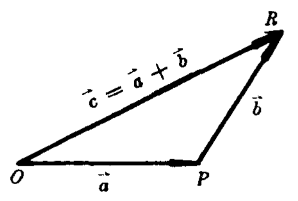


图 8-5

求和矢量的这一方法称为**平行四边形法则**.

若记 $\overrightarrow{OP}=\vec{a}$， $\overrightarrow{OQ}=\vec{b}$， $\overrightarrow{OR}=\vec{c}$，于是

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR},$$

由平行四边形知 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PR}$，故有

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}, \quad \text{即} \quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{c}.$$

这样，矢量 $\vec{a}$ 的终点连接 $\vec{b}$ 的起点，从 $\vec{a}$ 的起点到 $\vec{b}$ 的终点所引的矢量就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和矢量 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$(如图 8-5). 因而就把求和矢量的平行四边形法则简化成**三角形法则**.

特别当 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 共线时，如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 同向，那么它们的和矢量的模 $|\vec{a}+\vec{b}|$ 就是两个矢量模的和 $|\vec{a}|+|\vec{b}|$，即 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$(如图 8-6)；如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向相反，那么和矢量的模为 $|\vec{a}+\vec{b}|=||\vec{a}|-|\vec{b}||$，而方向指向与模较大的矢量的方向一致(如图 8-7).

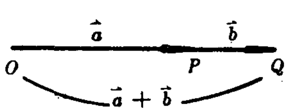


图 8-6

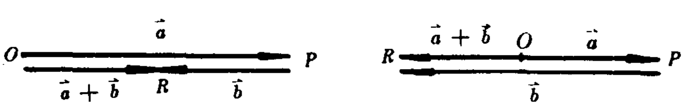


图 8-7

如果空间有多个矢量(不论它们是不是共平面!)相加，根据三角形法则，只要把它们依次尾头相接，然后从第一个矢量的起点到最后一个矢量的终点所引的矢量，就是它们的和矢量，如图 8-8 所示.

从图 8-4 和图 8-9 看出矢量的加法运算满足下列规则：

(1) **交换律** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

(2) **结合律** $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

类似于数的减法是加法的逆运算，用矢量加法的逆运算来定义矢量的减法.

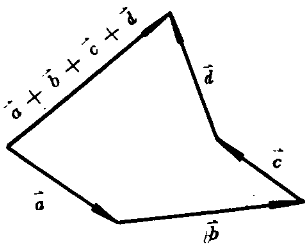


图 8-8

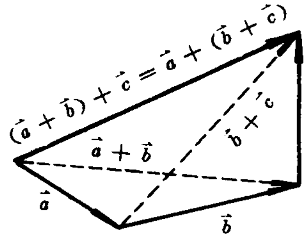


图 8-9

定义　若 $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$，则称 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**差矢量**，记作 $\vec{a}-\vec{b}$，即 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. 这种运算叫做**矢量的减法**.

由加法的三角形法则推出差矢量的作法为：平行移动矢量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，使它们的起点重合，则两终点的连线，方向指向被减的矢量 $\vec{a}$，就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差矢量 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. 如图 8-10 所示.

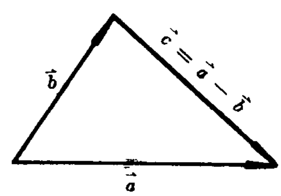


图 8-10

(二) 数量与矢量的乘法

设有 5 个相同的力 $\vec{F}$ 作用在同一个质点上，力学知识告诉我们，它等效于 $\vec{F}$ 的 5 倍力 $5\vec{F}$ 作用的结果，仿此可定义数量与矢量的乘法.

定义　实数 m 与矢量 $\vec{a}$ 的乘积是一个矢量，记作 $m\vec{a}$，其大小为 $|\vec{a}|$ 的 $|m|$ 倍，其方向是：当 $m>0$ 时，$m\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向；当 $m<0$ 时，$m\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向；当 $m=0$ 时，$m\vec{a}=\vec{0}$，方向任意. 这种运算叫做**数量与矢量的乘法**（或简称**数乘矢量**）.

例如，已知矢量 $\vec{a}$，要作矢量 $3\vec{a}$，$\frac{1}{2}\vec{a}$，$-2\vec{a}$. 只须将 $\vec{a}$ 的模扩大 3 倍，并方向保持不变就得 $3\vec{a}$；将 $\vec{a}$ 的模缩小一半，方向保持不变就是 $\frac{1}{2}\vec{a}$；将 $\vec{a}$ 的模扩大 2 倍，方向相反就是 $-2\vec{a}$（图 8-11）.

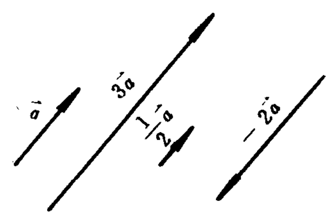


图 8-11

特别　$(-1)\cdot\vec{a}\triangleq-\vec{a}$，这是一个与 $\vec{a}$ 的模相同，方向相反的矢量，称它为 $\vec{a}$ 的**负矢量**. 这样就有

$$\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b},\quad \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}.$$

由数乘矢量的定义，与非零矢量 $\vec{a}$ 同方向的单位矢量是

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\quad \text{或者}\quad \vec{a}=|\vec{a}|\,\vec{a}^0.$$

数量与矢量的乘法满足以下运算规则：

(1) 分配律　$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$.

(2) 分配律　$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$.

(3) 结合律　$m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$.

证(1) 根据三角形法则，$\vec{a}+\vec{b}$ 作 $\triangle OAB$，每边放大 $|m|$ 倍后得 $\triangle OA'B'$（图 8-12），由相似三角形判定定理知 $\triangle OA'B' \sim \triangle OAB$. 于是 $\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B'}$，即 $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$. 从而得证分配律(1)成立. 其实分配律(1)就是相似三角形性质的代数形式.

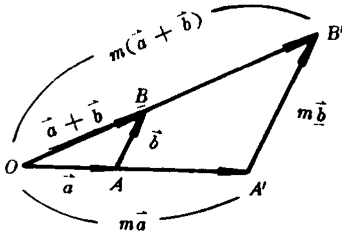


图 8-12

分配律(2)请读者自己完成.

(3) 因 $|m(n\vec{a})|=|m||n\vec{a}|=|m||n||\vec{a}|=|mn||\vec{a}|$，故 $m(n\vec{a})$ 与 $(mn)\vec{a}$ 的模相等. 当 $m>0, n>0$ 时，$mn>0$，所以 $(mn)\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向. 另一方面 $n\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向，$m(n\vec{a})$ 与 $\vec{a}$ 同向. 从而 $(mn)\vec{a}$ 与 $m(n\vec{a})$ 同向. 同理当 $m<0, n<0$ 时亦有 $m(n\vec{a})$ 与 $(mn)\vec{a}$ 同向. 当 $m>0, n<0$ 时，$mn<0$，所以 $(mn)\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向，另一方面 $n\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向，$m(n\vec{a})$ 与 $\vec{a}$ 反向，从而 $m(n\vec{a})$ 与 $(mn)\vec{a}$ 同向. 同理当 $m<0, n>0$ 时亦有 $m(n\vec{a})$ 与 $(mn)\vec{a}$ 同向.

综上讨论，得证结合律 $m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$ 成立. 证毕

根据数量与矢量的乘法定义，矢量 $m\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 是共线的. 于是，对于非零矢量 $\vec{a}$，如果 $\vec{b}=m\vec{a}$，那么 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 一定共线. 反之，如果 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 共线，那么也一定存在唯一实数 m，使得 $\vec{b}=m\vec{a}$. 这是因为 $|\vec{a}|\neq 0$，令 $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=k$，即 $|\vec{b}|=k|\vec{a}|$. 当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向时取 $m=k$，反向时取 $m=-k$. 从而有 $\vec{b}=m\vec{a}$. 且 m 由 $\vec{a}, \vec{b}$ 唯一确定，假如不然，还有一个 m_1 使 $\vec{b}=m_1\vec{a}$，那么两式相减得 $\vec{0}=(m-m_1)\vec{a}$，因 $m-m_1\neq 0$，必定 $\vec{a}=\vec{0}$，这与题设矛盾，所以 m 唯一，这样就得出如下结论：

定理一 设 $\vec{a}$ 为非零矢量，矢量 $\vec{b}$ 与矢量 $\vec{a}$ 共线的充要条件是，存在唯一实数 m，使得 $\vec{b}=m\vec{a}$.

例 1 用矢量方法证明对角线相互平分的四边形是平行四边形.

证 如图 8-13，设点 M 为四边形 $ABCD$ 两对角线的交点，且已知 $AM=MC, BM=MD$. 由于

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB});$$

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}),$$

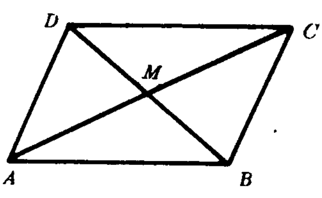


图 8-13

得 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

所以，$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，从而得证 $ABCD$ 是平行四边形. 证毕

例 2 设 $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, \vec{r}$ 分别为空间任一点 M 到 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B, C 及其重心 G 所引的矢量. 试证

$$\vec{r}=\frac{1}{3}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C).$$

证 设 D 为边 BC 的中点（如图 8-14）.

$$\overrightarrow{MG} = \vec{r}_A + \overrightarrow{AG} = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}, (\because\ |\overrightarrow{AG}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{AD}|)$$

$$= \vec{r}_A + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$= \vec{r}_A + \frac{2}{3}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) + \frac{1}{3}(\vec{r}_c - \vec{r}_B)$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C).$$

证毕

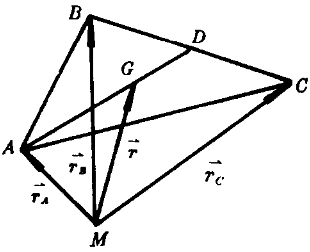


图 8-14

（三）矢量的线性组合和矢量的分解

以上定义的两个矢量的加减法以及数乘矢量的运算，统称为矢量的线性运算，这类运算可以推广到两个以上矢量的情形，例如，有一组矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$，经过数乘矢量与加减运算后得到的表达式

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n. \tag{2.1}$$

称(2.1)式为矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ 的**线性组合**，其中 $\lambda_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 都是实数.

在科学技术中常会遇到相反的问题，需要把一个矢量分解成几个矢量之和，关于矢量的分解有如下几个基本结论.

定理二 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线，则矢量 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}, \vec{b}$ 共面的充要条件是，存在唯一的两个实数 λ, μ 使得

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \tag{2.2}$$

成立.

就是说，**当 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线时，任意一个与 $\vec{a}, \vec{b}$ 共面的矢量 $\vec{c}$ 一定可以沿 $\vec{a}, \vec{b}$ 方向进行分解**.

证 必要性. 若 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}, \vec{b}$ 共面，平行移动使它们的起点重合于 O 点，过 $\vec{c}$ 的终点 R 分别引平行于 $\vec{a}$ 的直线交 $\vec{b}$ 所在的直线于 Q 点，引平行于 $\vec{b}$ 的直线交 $\vec{a}$ 所在的直线于 P 点(如图 8-15).

因 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\vec{a}$ 共线，由定理一，存在唯一实数 λ，使得 $\overrightarrow{OP} = \lambda\vec{a}$；因 $\overrightarrow{OQ}$ 与 $\vec{b}$ 共线，存在唯一实数 μ，使得 $\overrightarrow{OQ} = \mu\vec{b}$.

由矢量加法的平行四边形法则，便得

$$\vec{c} = \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}.$$

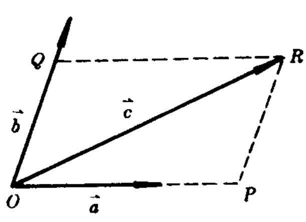


图 8-15

充分性. 设 $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ 成立，由四边形法则，矢量 $\vec{c}$ 与 $\lambda\vec{a}$，$\mu\vec{b}$ 共面. 而 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 共线，$\mu\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 共线，从而得证 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}, \vec{b}$ 共面. 证毕

定理三 若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三矢量不共面，则对于空间任一矢量 $\vec{d}$，总存在唯一的一组实数 λ, μ, γ，使得

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c} \tag{2.3}$$

成立.

就是说，**任意一个矢量总可以沿不共面的三个矢量的方向进行分解**.

证 平行移动使矢量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 的起点重合于 O 点. 过矢量 $\vec{d}$ 的终点 R 分别作平行于 $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 决定的平面，平行于 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 决定的平面，平行于 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 决定的平面，分别与 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$（或其延长

线）交于点 A,B,C（图 8-16），则$\overrightarrow{OR}$就是以 OA,OB,OC 为棱的平行六面体的对角线矢量，由矢量的加法得

$$\vec{d}=\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}. \qquad (2.4)$$

根据定理一，因$\overrightarrow{OA}$与 $\vec{a}$ 共线，存在唯一实数 λ，使得$\overrightarrow{OA}=\lambda\vec{a}$；因$\overrightarrow{OB}$与 $\vec{b}$ 共线，存在唯一实数 μ，使$\overrightarrow{OB}=\mu\vec{b}$；因$\overrightarrow{OC}$与 $\vec{c}$ 共线，存在唯一实数 γ，使得$\overrightarrow{OC}=\gamma\vec{c}$. 把它们代入(2.4)式，就是

$$\vec{d}=\overrightarrow{OR}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\gamma\vec{c}.$$

证毕

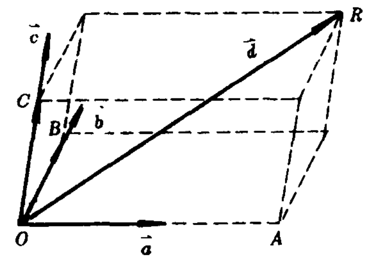


图 8-16

例 3 设 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 非零不共面矢量，验证 $\vec{a}=3\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{b}=4\vec{e}_2+3\vec{e}_3$, $\vec{c}=-4\vec{e}_1+\vec{e}_3$ 共面.

证 设 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，其中 λ,μ 为待定实数，把已知的矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 代入，得等式

$$-4\vec{e}_1+\vec{e}_3=\lambda(3\vec{e}_1+\vec{e}_2)+\mu(4\vec{e}_2+3\vec{e}_3).$$

即

$$(3\lambda+4)\vec{e}_1+(\lambda+4\mu)\vec{e}_2+(3\mu-1)\vec{e}_3=\vec{0}.$$

于是得

$$\begin{cases}3\lambda+4=0,\\ \lambda+4\mu=0,\\ 3\mu-1=0.\end{cases}$$

这方程组显然存在解 $\lambda=-\dfrac{4}{3}$, $\mu=\dfrac{1}{3}$，从而等式

$$\vec{c}=-\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

成立. 依定理二知矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

证毕

2.3 矢量的投影

设有一点 A 及一轴 l，过点 A 作轴 l 的垂直平面与轴 l 交于 A'，称 A' 为点 A 在轴 l 上的**投影**.

设一矢量$\overrightarrow{AB}$的起点 A 与终点 B 在轴 l 上的投影分别为 A' 和 B'（图 8-17），则称有向线段$\overline{A'B'}$的值 $A'B'$ 为**矢量$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影**. 记作

$$P_{r_{j_l}}\overrightarrow{AB}\xlongequal{\text{或}}(\overrightarrow{AB})_l=A'B'.$$

矢量$\overrightarrow{AB}$在轴 l 上的投影等于它的模乘以它与轴 l 的夹角的余弦，即

$$(\overrightarrow{AB})_l=|\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{AB},l).①$$

事实上，过点 A 作平行于 l 的轴 l' 与过点 B 且垂直于轴 l

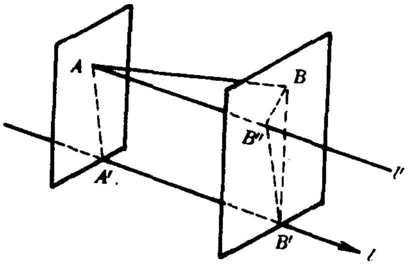


图 8-17

① 记号$(\overrightarrow{AB},l)$表示矢量$\overrightarrow{AB}$与轴 l 正向的夹角. 同样，今后$(\vec{a},\vec{b})$表示矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 正向的夹角.