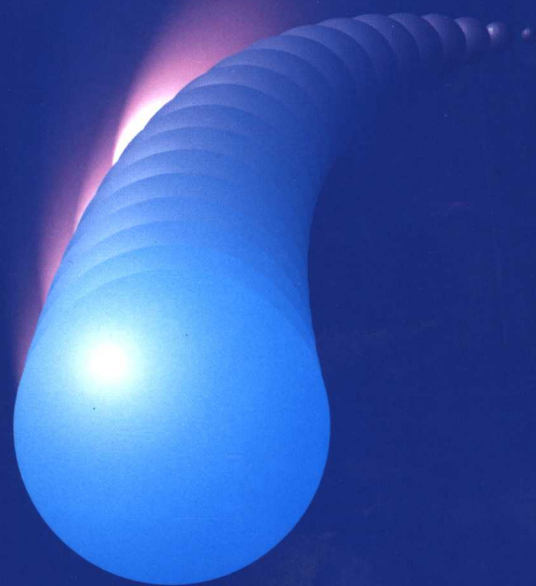


 新世纪高等院校精品教材

下册

微积分学

吴迪光 张 彬 编著



浙江大学出版社

新世纪高等院校精品教材

微积分学

下 册

吴迪光 张 彬 编著

浙江大學出版社

微积分学

下 册

吴迪光 张 彬 编著

责任编辑 樊晓燕

* * *

浙江大学出版社出版

(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)

(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

浙江大学出版社电脑排版中心排版

德清县第二印刷厂印刷

浙江省新华书店经销

* * *

787×1092 16 开 20.25 印张 518 千字

1995 年 10 月第 1 版 2006 年 7 月第 7 次印刷

印数: 16501—18000

ISBN 7-308-01539-4/O · 178 定价: 20.00 元

目 录

第八章	矢量代数与空间解析几何	(1)
§ 1	预备知识——二阶与三阶行列式	(1)
	1.1 二阶行列式(1) 1.2 三阶行列式(2)	
§ 2	矢量概念及其线性运算、矢量的投影	(5)
	2.1 矢量概念(5) 2.2 矢量的线性运算(6) 2.3 矢量的投影(10)	
§ 3	空间直角坐标系 矢量的坐标表达式	(11)
	3.1 空间直角坐标系(11) 3.2 矢量的坐标表达式(12)	
§ 4	矢量的乘法	(16)
	4.1 两矢量的数量积(16) 4.2 两矢量的矢量积(19) 4.3 三矢量的混合积(23) 4.4 二重矢积(25)	
§ 5	空间直线与平面的方程	(26)
	5.1 空间直线方程(26) 5.2 平面方程(27) 5.3 平面束方程(30) 5.4 有关平面和空间直线的问题(31)	
§ 6	曲面方程与空间曲线方程	(34)
	6.1 曲面方程与空间曲线方程的概念(34) 6.2 柱面方程(36) 6.3 锥面方程(37) 6.4 旋转曲面方程(38) 6.5 空间曲线在坐标平面上的投影(40)	
§ 7	二次曲面 坐标变换	(42)
	7.1 常见的二次曲面(42) 7.2 坐标变换(45)	
习题八		(48)
第九章	多元函数的微分学	(55)
§ 1	多元函数的基本概念	(55)
	1.1 空间(55) 1.2 多元函数的概念(57) 1.3 多元函数的极限与连续(59)	
§ 2	偏导数	(62)
	2.1 偏导数概念(62) 2.2 高阶偏导数(65)	
§ 3	多元复合函数的偏导数	(68)
	3.1 全增量公式(68) 3.2 复合函数的偏导数(69)	
§ 4	隐函数的偏导数	(74)
§ 5	全微分	(78)
	5.1 多元函数全微分的概念(78) 5.2 全微分形式的不变性(79) 5.3 全微分在近似计算与误差估计中的应用(82)	
§ 6	矢值函数与偏导数在几何上的应用	(83)
	6.1 矢值函数与导矢量(84) 6.2 空间曲线的切线与法平面(85) 6.3 曲面的切平面与法线(87)	
§ 7	多元函数的极值与条件极值问题	(91)

7.1 极值及其判别法(91)	7.2 最大最小值问题(92)	7.3 条件极值与拉格朗日乘数法(94)
7.4 二元函数的泰勒公式与极值的充分条件(99)		
§ 8 方向导数与数量场的梯度		(102)
8.1 数量场和矢量场(102)	8.2 方向导数(103)	8.3 数量场的梯度(105)
习题九		(107)
第十章 重积分		(116)
§ 1 点函数积分的概念		(116)
1.1 点函数积分的定义(116)	1.2 点函数积分的分类名称(117)	1.3 点函数可积的条件(118)
1.4 点函数积分的性质(118)		
§ 2 二重积分算法		(121)
2.1 二重积分在直角坐标系中的算法(121)	2.2 二重积分在极坐标系中的算法(125)	
§ 3 三重积分算法		(129)
3.1 三重积分在直角坐标系中的算法(129)	3.2 三重积分在柱坐标系中的算法(132)	3.3 三重积分在球坐标系中的算法(135)
§ 4 重积分在一般曲线坐标系中的算法		(137)
4.1 二重积分在一般曲线坐标系中的算法(137)	4.2 三重积分在一般曲线坐标系中算法(139)	
习题十		(141)
第十一章 曲面积分		(149)
§ 1 第一类曲面积分算法		(149)
1.1 曲面的面积(149)	1.2 第一类曲面积分的算法(150)	
§ 2 第二类曲面积分		(152)
2.1 双侧曲面(152)	2.2 第二类曲面积分的概念(152)	2.3 第二类曲面积分的性质(154)
2.4 第二类曲面积分的算法(154)		
§ 3 高斯公式		(157)
§ 4 矢量场的散度		(161)
4.1 矢量场的通量(161)	4.2 矢量场的散度(162)	
习题十一		(165)
第十二章 曲线积分		(170)
§ 1 第一类曲线积分的算法		(170)
1.1 平面曲线积分的计算公式(170)	1.2 空间曲线积分的计算公式(170)	
§ 2 第二类曲线积分		(172)
2.1 第二类曲线积分的概念(172)	2.2 第二类曲线积分的性质(174)	2.3 第二类曲线积分的算法(174)
§ 3 格林公式		(175)
§ 4 平面上单连通区域内曲线积分与路径无关的条件		(179)
4.1 曲线积分与路径无关的四个等价条件(179)	4.2 原函数的求法(181)	4.3 全微分方程(182)
4.4 对称型微分方程组(186)		

§ 5	斯托克斯公式	(187)
5.1	斯托克斯公式(187)	5.2 空间曲线积分与路径无关的条件(189)
§ 6	向量场的旋度	(190)
6.1	向量场的循环量(191)	6.2 旋度(191)
§ 7	有势场、无源场与调和场	(194)
7.1	有势场(194)	7.2 无源场(197) 7.3 调和场(198)
§ 8	算子 ∇ 与 Δ 的运算	(199)
8.1	∇ 算子(199)	8.2 Δ 算子(199) 8.3 ∇ 的运算规则(199)
* § 9	梯度、散度、旋度在正交曲线坐标系下的表达式	(201)
9.1	曲线坐标下三度与调和量的一般表达式(202)	9.2 柱坐标下三度与调和量的表达式(203)
9.3	球坐标下三度与调和量的表达式(203)	
习题十二		(204)
第十三章	无穷级数	(210)
§ 1	基本概念	(210)
1.1	级数收敛与发散的定義(210)	1.2 级数的基本性质(212) 1.3 级数收敛的条件(214)
§ 2	正项级数	(215)
2.1	比较判别法(215)	2.2 达朗贝尔比值判别法(218) 2.3 柯西根值判别法(220) 2.4 柯西积分判别法(221)
§ 3	变号项级数	(222)
3.1	交错级数收敛性判别法(222)	3.2 变号项级数的绝对收敛与条件收敛(224) 3.3 绝对收敛级数的运算性质(226)
§ 4	函数项级数	(228)
4.1	函数项级数的概念(228)	4.2 函数项级数的一致收敛性(229) 4.3 一致收敛判别法(231)
4.4	一致收敛级数的分析性质(233)	
§ 5	幂级数	(235)
5.1	幂级数的收敛半径与收敛区间(235)	5.2 幂级数的分析性质(240) 5.3 幂级数的四则运算(244)
§ 6	函数展开成幂级数	(245)
6.1	泰勒级数(245)	6.2 幂级数的若干应用(251)
§ 7	傅里叶级数	(256)
7.1	三角函数系的正交性(256)	7.2 傅里叶级数(257) 7.3 在区间 $[0, l]$ 上定义的函数的傅里叶级数展开(264) 7.4 贝塞尔不等式(267) 7.5 复数形式的傅里叶级数(268)
习题十三		(271)
* 第十四章	含参变量积分	(279)
§ 1	含参变量的定积分	(279)
1.1	含参变量定积分的定义(279)	1.2 含参变量定积分的分析性质(279)
§ 2	含参变量的广义积分	(283)
2.1	无穷区间上含参变量的广义积分的定义(283)	2.2 含参变量广义积分的一致收敛性(283)
2.3	一致收敛判别法(284)	2.4 一致收敛的广义积分的分析性质(286) 2.5 二重广义积分的交换积分次序(289) 2.6 无界函数的含参变量的广义积分(290)

§ 3 B(Beta)函数	(291)
3.1 $\Gamma(s)$ 与 $B(p, q)$ 的连续性(291)	
3.2 $\Gamma(s)$ 与 $B(p, q)$ 的可导性(292)	
3.3 $B(p, q)$ 的计算公式(292)	
习题十四	(295)
附 录	(296)
§ 1 微分方程解的存在唯一性定理	(296)
§ 2 高阶线性微分方程的通解	(300)
习题答案	(303)

第八章 向量代数与空间解析几何

向量在科学技术中是一类十分普遍的量,从力学、物理学中的一些基本法则抽象概括出来的矢量的代数运算,成为学习物理学、力学和电学等的基础知识,也是讨论几何问题的有力工具.本章介绍向量及其代数运算,并用它来讨论空间解析几何问题.为与中学数学衔接,先介绍一点行列式作为预备知识.

§ 1 预备知识 —— 二阶与三阶行列式

1.1 二阶行列式

二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, & (1.1) \\ a_2x + b_2y = c_2. & (1.2) \end{cases}$$

用加减消去法解, $(1.1) \times b_2 - (1.2) \times b_1$, 得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2,$$

$(1.2) \times a_1 - (1.1) \times a_2$, 得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1,$$

当 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 时, 可得方程组的唯一解

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \quad (1.3)$$

为便于记忆, 我们引入一种符号来表示这组解的公式(1.3).

分母都是 $a_1b_2 - a_2b_1$, 只与方程组的系数有关, 其中的各个乘数按它们原来在方程组中的位置排列成正方形, 即

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}$$

可以看出 $a_1b_2 - a_2b_1$ 是正方形中实线表示的对角线(叫做**主对角线**)上两个数的积, 再添加正号与虚线表示的对角线(叫做**副对角线**)上两个数的积, 再添上负号所构成的两项之和. 我们引进符号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

来表示代数式 $a_1b_2 - a_2b_1$, 即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \triangleq a_1b_2 - a_2b_1. \quad (1.5)$$

称符号(1.4)为**二阶行列式**, a_1, a_2, b_1, b_2 称为行列式的**元素**. 这四个元素排列成二行二列(横排叫行, 竖排叫列). 利用对角线把二阶行列式表示成(1.5)式, 叫做行列式的**展开式**. 这种展开方法称为**对角线法则**.

这样二元线性方程组在系数行列式 $D \triangleq \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 的条件下, 解的公式可写成

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}. \quad (1.6)$$

其中 $D_x \triangleq \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y \triangleq \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

公式(1.6)称为解二元线性方程组的**克莱姆(Cramer)规则**.

例1 解线性方程组 $\begin{cases} 2x - 2y = -3, \\ x + 4y = 1. \end{cases}$

解 这时 $D = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times (-2) = 10,$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \times 4 - 1 \times (-2) = -10,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 1 \times (-3) = 5.$$

因系数行列式 $D \neq 0$, 所以方程组的唯一解是

$$x = \frac{D_x}{D} = -1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{2}.$$

1.2 三阶行列式

再用消去法解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \quad (1.7)$$

先从前两个方程消去 z , 后两方程消去 z , 得到只含 x, y 的二元线性方程组; 再从这两个方程消去 y , 就得到

$$\begin{aligned} & (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)x \\ & = b_1c_2d_3 + b_2c_3d_1 + b_3c_1d_2 - b_1c_3d_2 - b_2c_1d_3 - b_3c_2d_1, \end{aligned}$$

当 x 的系数

$$D \triangleq (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1) \neq 0$$

时, 解得 x , 同理可求得 y 和 z :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{D}(b_1c_2d_3 + b_2c_3d_1 + b_3c_1d_2 - b_1c_3d_2 - b_2c_1d_3 - b_3c_2d_1), \\ y &= \frac{1}{D}(a_1c_3d_2 + a_2c_1d_3 + a_3c_2d_1 - a_1c_2d_3 - a_2c_3d_1 - a_3c_1d_2), \\ z &= \frac{1}{D}(a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3 - a_3b_2d_1). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

所以, 当 $D \neq 0$ 时, (1.7) 的唯一解就是(1.8).

为便于记忆, 我们引进三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

并规定它表示所有取自不同行不同列的三个元素的乘积, 冠上一定的正负号的六项代数数和:

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1,$$

即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \triangleq a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1, \quad (1.9)$$

称(1.9)为三阶行列式的**展开式**. 展开三阶行列式也可采用对角线法则: 凡是主对角线(从左上角到右下角及与其平行的对角线,如图8-1中的实线所示)上三个元素乘积再冠上正号;副对角线(从右上角到左下角及与其平行的对角线,如图8-1中的虚线所示)上三个元素的乘积再冠上负号. 三阶行列式就表示这六项之和.

这样(1.8)中的分母都是三元线性方程组(1.7)的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

而分子是把行列式 D 中的第 1, 2, 3 列分别换成常数项 d_1, d_2, d_3 得到的行列式 D_x, D_y, D_z , 即

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

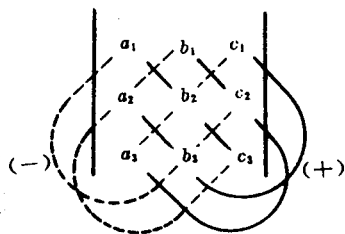


图 8-1

因此三元线性方程组(1.7)在系数行列式 $D \neq 0$ 条件下的唯一解(1.8)就可以简记成

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}. \quad (1.10)$$

这称为三元线性方程组的**克莱姆规则**.

例 2 用对角线法则计算三阶行列式

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -7 & 3 & 6 \end{vmatrix} &= 1 \times 5 \times 6 + 2 \times 3 \times (-3) + (-7) \times 4 \times 0 - (-7) \times 5 \\ &\quad \times (-3) - 1 \times 3 \times 0 - 2 \times 4 \times 6 \\ &= 30 - 18 + 0 - 105 - 0 - 48 = -141. \end{aligned}$$

$$\text{例 3 解线性方程组} \begin{cases} 2y + 3z = -8, \\ x + 3y - 2z = 2, \\ 2x - 3y + 7z = -9. \end{cases}$$

解 这时

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -49, & D_x &= \begin{vmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -9 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -49, \\ D_y &= \begin{vmatrix} 0 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -9 & 7 \end{vmatrix} = 49, & D_z &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 98. \end{aligned}$$

因为系数行列式 $D \neq 0$, 故方程组的唯一解是

$$x = \frac{D_x}{D} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = -1, \quad z = \frac{D_z}{D} = -2.$$

用对角线法则计算行列式,有时运算较繁,尤其是这种方法对于三阶以上的行列式不再成立,所以需要寻求别的计算方法.这个问题将在《线性代数》课程中通过对行列式的一般定义与性质的讨论得到多种方法,这里仅介绍所谓按行展开法.

将(1.9)式的右边按 a_1, b_1, c_1 集项

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2),$$

再用二阶行列式记括号内的代数式,便得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad (1.11)$$

其中三个二阶行列式 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ 是三阶行列式中第一行的元素 a_1, b_1, c_1 分别划去它们各自所在行及所在列的元素后余下的二阶行列式,分别称为元素 a_1, b_1, c_1 的余子(行列)式.公式(1.11)称为三阶行列式按第一行的展开式.这样,三阶行列式的计算便降为二阶行列式的计算.展开式(1.11)中应注意第二项 b_1 与它的余子式 $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 的积必须冠上负号.

例 4 用按行展开法重新计算例 2.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -7 & 3 & 6 \end{vmatrix} &= 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} + (-3) \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 30 - 48 - 123 = -141. \end{aligned}$$

例 5 验证三阶行列式交换任意两行元素的位置,行列式的值只相差一个负号.

证 记三阶行列式为 D ,并按第一行展开,有

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

若将上式右边六项按 a_2, b_2, c_2 集项,得

$$\begin{aligned} D &= a_2(b_3c_1 - b_1c_3) - b_2(a_3c_1 - a_1c_3) + c_2(b_1a_3 - b_3a_1) \\ &= -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

把负号括出,并用按第一行元素展开公式(1.11)就是

$$D = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

即得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

这表明交换行列式第一行与第二行的元素,行列式要变号.

同理,若将(1.12)式右边的六项按 a_3, b_3, c_3 集项,可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

这表明交换第一行与第三行的元素,行列式也要变号.

余下只须证明交换第二行与第三行的元素命题也成立.这点不难,接连使用三次上面已证的结论就可得证.

证毕

§ 2 矢量概念及其线性运算、矢量的投影

2.1 矢量概念

在科学技术中经常遇到的量有两类,一类是只有大小可以用实数表示的量,叫做**数量**(或**标量**),如时间、温度、功、质量、长度等.另一类是既有大小又有方向的量叫做**矢量**(或**向量**),如速度、加速度、力、位移、电场强度等.矢量用拉丁字母上加箭头表示,如 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$,或用黑体字表示如 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.矢量的大小又叫矢量的**模**,用 $|\vec{a}|$ (或 $|\mathbf{a}|$)表示矢量 \vec{a} (或 \mathbf{a})的模.

矢量在几何上采用空间的一个有向的线段表示,以这个线段的长度表示矢量的模,以它的方向表示矢量的方向,如图 8-2.特别是起点为 P 终点是 Q 的矢量,记为 \vec{PQ} ,其模记作 $|\vec{PQ}|$,如图 8-3.

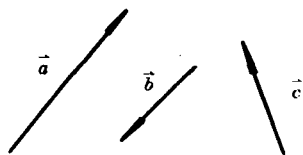


图 8-2

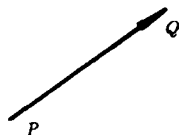


图 8-3

矢量的本质属性是大小和方向,数学中研究的矢量只考虑其大小和方向,而与起点位置无关,这类矢量叫做**自由矢量**.于是两个大小相等,方向相同的矢量 \vec{a}, \vec{b} 称为**相等矢量**.记作 $\vec{a} = \vec{b}$.它们经过平行移动是能够重合的.

矢量 \vec{a} 和 \vec{b} 经过平行移动使起点重合时所构成的夹角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$),称作**矢量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角**.特别当 $\theta = 0$ 或 π 时,称**矢量 \vec{a} 与 \vec{b} 平行**,记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$;当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时,称**矢量 \vec{a} 与 \vec{b} 相互垂直(或正交)**,记作 $\vec{a} \perp \vec{b}$.

模为 1 的矢量,称为**单位矢量**,方向与 \vec{a} 相同的单位矢量记作 \vec{a}^0 .模为零的矢量,称为**零矢量**,记作 $\vec{0}$,零矢量的方向可以任意选取.

如果一组矢量平行于同一条直线(或同一个平面),则称它们是**共线(或共面)矢量**.由此可知平行矢量一定是共线的.

2.2 矢量的线性运算

(一) 矢量的加减法

根据力的合成原理,我们定义矢量的加法运算.

定义 经过平行移动使矢量 \vec{a} 与 \vec{b} 的起点重合,以它们为邻边的平行四边形的对角线矢量 \vec{c} (如图 8-4),称为矢量 \vec{a} 与 \vec{b} 的**和矢量**.记作 $\vec{a} + \vec{b}$,即 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.这种运算叫做**矢量的加法**.

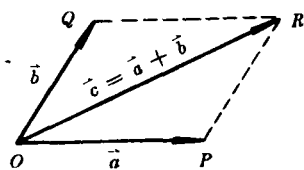


图 8-4

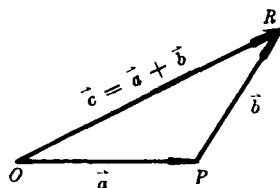


图 8-5

求和矢量的这一方法称为**平行四边形法则**.

若记 $\vec{OP} = \vec{a}$, $\vec{OQ} = \vec{b}$, $\vec{OR} = \vec{c}$,于是

$$\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR},$$

由平行四边形知 $\vec{OQ} = \vec{PR}$,故有

$$\vec{OP} + \vec{PR} = \vec{OR}, \quad \text{即} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}.$$

这样,矢量 \vec{a} 的终点连接 \vec{b} 的起点,从 \vec{a} 的起点到 \vec{b} 的终点所引的矢量就是 \vec{a} 与 \vec{b} 的和矢量 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (如图 8-5).因而就把求和矢量的平行四边形法则简化成**三角形法则**.

特别当 \vec{a}, \vec{b} 共线时,如果 \vec{a}, \vec{b} 同向,那么它们的和矢量的模 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 就是两个矢量模的和 $|\vec{a}| + |\vec{b}|$,即 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (如图 8-6);如果 \vec{a}, \vec{b} 方向相反,那么和矢量的模为 $|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||$,而方向指向与模较大的矢量的方向一致(如图 8-7).

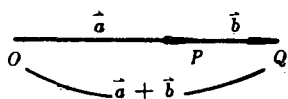


图 8-6

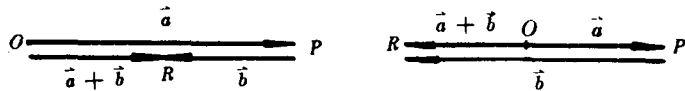


图 8-7

如果空间有多个矢量(不论它们是不是共平面!)相加,根据三角形法则,只要把它们依次尾头相接,然后从第一个矢量的起点到最后一个矢量的终点所引的矢量,就是它们的和矢量,如图 8-8 所示.

从图 8-4 和图 8-9 看出矢量的加法运算满足下列规则:

- (1) **交换律** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- (2) **结合律** $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

类似于数的减法是加法的逆运算,用矢量加法的逆运算来定义矢量的减法.

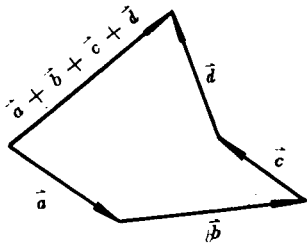


图 8-8

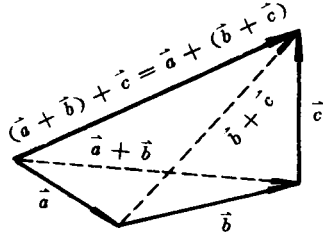


图 8-9

定义 若 $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$, 则称 \vec{c} 为 \vec{a} 与 \vec{b} 的差矢量, 记作 $\vec{a} - \vec{b}$, 即 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. 这种运算叫做矢量的减法.

由加法的三角形法则推出差矢量的作法为: 平行移动矢量 \vec{a} , \vec{b} , 使它们的起点重合, 则两终点的连线, 方向指向被减的矢量 \vec{a} , 就是 \vec{a} 与 \vec{b} 的差矢量 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. 如图 8-10 所示.

(二) 数量与矢量的乘法

设有 5 个相同的力 \vec{F} 作用在同一个质点上, 力学知识告诉我们, 它等效于 \vec{F} 的 5 倍力 $5\vec{F}$ 作用的结果, 仿此可定义数量与矢量的乘法.

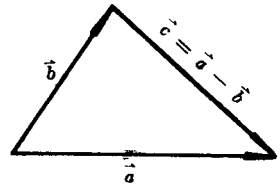


图 8-10

定义 实数 m 与矢量 \vec{a} 的乘积是一个矢量, 记作 $m\vec{a}$, 其大小为 $|\vec{a}|$ 的 $|m|$ 倍, 其方向是: 当 $m > 0$ 时, $m\vec{a}$ 与 \vec{a} 同向; 当 $m < 0$ 时, $m\vec{a}$ 与 \vec{a} 反向; 当 $m = 0$ 时, $m\vec{a} = \vec{0}$, 方向任意. 这种运算叫做数量与矢量的乘法(或简称数乘矢量).

例如, 已知矢量 \vec{a} , 要作矢量 $3\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-2\vec{a}$. 只须将 \vec{a} 的模扩大 3 倍, 并方向保持不变就得 $3\vec{a}$; 将 \vec{a} 的模缩小一半, 方向保持不变就是 $\frac{1}{2}\vec{a}$; 将 \vec{a} 的模扩大 2 倍, 方向相反就是 $-2\vec{a}$ (图 8-11).

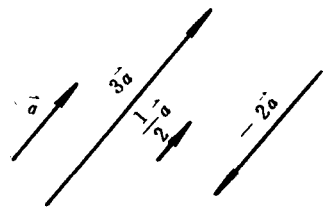


图 8-11

特别 $(-1) \cdot \vec{a} \triangleq -\vec{a}$, 这是一个与 \vec{a} 的模相同, 方向相反的矢量, 称它为 \vec{a} 的负矢量. 这样就有

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}.$$

由数乘矢量的定义, 与非零矢量 \vec{a} 同方向的单位矢量是

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \text{或者} \quad \vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}^0.$$

数量与矢量的乘法满足以下运算规则:

- (1) 分配律 $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$.
- (2) 分配律 $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$.
- (3) 结合律 $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$.

证(1) 根据三角形法则, $\vec{a} + \vec{b}$ 作 $\triangle OAB$, 每边放大 $|m|$ 倍后得 $\triangle OA'B'$ (图 8-12), 由相似三角形判定定理知 $\triangle OA'B' \sim \triangle OAB$. 于是 $\vec{OB}' = \vec{OA}' + \vec{A'B}'$, 即 $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$. 从而得证分配律(1) 成立. 其实分配律(1) 就是相似三角形性质的代数形式.

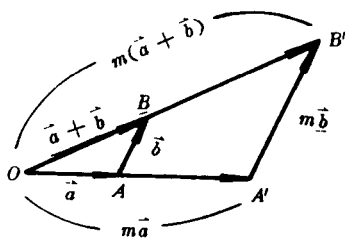


图 8-12

分配律(2) 请读者自己完成.

(3) 因 $|m(n\vec{a})| = |m||n\vec{a}| = |m||n||\vec{a}| = |mn||\vec{a}|$, 故 $m(n\vec{a})$ 与 $(mn)\vec{a}$ 的模相等. 当 $m > 0, n > 0$ 时, $mn > 0$, 所以 $(mn)\vec{a}$ 与 \vec{a} 同向. 另一方面 $n\vec{a}$ 与 \vec{a} 同向, $m(n\vec{a})$ 与 \vec{a} 同向. 从而 $(mn)\vec{a}$ 与 $m(n\vec{a})$ 同向. 同理当 $m < 0, n < 0$ 时亦有 $m(n\vec{a})$ 与 $(mn)\vec{a}$ 同向. 当 $m > 0, n < 0$ 时, $mn < 0$, 所以 $(mn)\vec{a}$ 与 \vec{a} 反向, 另一方面 $n\vec{a}$ 与 \vec{a} 反向, $m(n\vec{a})$ 与 \vec{a} 反向, 从而 $m(n\vec{a})$ 与 $(mn)\vec{a}$ 同向. 同理当 $m < 0, n > 0$ 时亦有 $m(n\vec{a})$ 与 $(mn)\vec{a}$ 同向.

综上所述, 得证结合律 $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$ 成立.

证毕

根据数量与矢量的乘法定义, 矢量 $m\vec{a}$ 与 \vec{a} 是共线的. 于是, 对于非零矢量 \vec{a} , 如果 $\vec{b} = m\vec{a}$, 那么 \vec{b} 与 \vec{a} 一定共线. 反之, 如果 \vec{b} 与 \vec{a} 共线, 那么也一定存在唯一实数 m , 使得 $\vec{b} = m\vec{a}$. 这是因为 $|\vec{a}| \neq 0$, 令 $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = k$, 即 $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$. 当 \vec{b} 与 \vec{a} 同向时取 $m = k$, 反向时取 $m = -k$. 从而有 $\vec{b} = m\vec{a}$. 且 m 由 \vec{a}, \vec{b} 唯一确定, 假如不然, 还有一个 m_1 使 $\vec{b} = m_1\vec{a}$, 那么两式相减得 $\vec{0} = (m - m_1)\vec{a}$, 因 $m - m_1 \neq 0$, 必定 $\vec{a} = \vec{0}$, 这与题设矛盾, 所以 m 唯一, 这样就得出如下结论:

定理一 设 \vec{a} 为非零矢量, 矢量 \vec{b} 与矢量 \vec{a} 共线的充要条件是, 存在唯一实数 m , 使得 $\vec{b} = m\vec{a}$.

例 1 用矢量方法证明对角线相互平分的四边形是平行四边形.

证 如图 8-13, 设点 M 为四边形 $ABCD$ 两对角线的交点, 且已知 $AM = MC, BM = MD$. 由于

$$\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{DB});$$

$$\vec{DC} = \vec{DM} + \vec{MC} = \frac{1}{2}(\vec{DB} + \vec{AC}),$$

得 $\vec{AB} = \vec{DC}$.

所以, $AB \parallel DC$, 且 $|AB| = |DC|$, 从而得证 $ABCD$ 是平行四边形.

证毕

例 2 设 $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, \vec{r}$ 分别为空间任一点 M 到 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B, C 及其重心 G 所引的矢量. 试证

$$\vec{r} = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C).$$

证 设 D 为边 BC 的中点(如图 8-14).

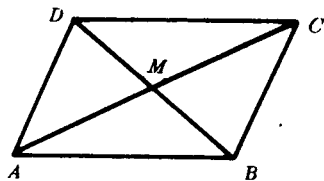


图 8-13

$$\begin{aligned}
 \vec{MG} &= \vec{r}_A + \vec{AG} = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\vec{AD}, (\because |\vec{AG}| = \frac{2}{3}|\vec{AD}|) \\
 &= \vec{r}_A + \frac{2}{3}(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}) = \vec{r}_A + \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} \\
 &= \vec{r}_A + \frac{2}{3}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) + \frac{1}{3}(\vec{r}_C - \vec{r}_B) \\
 &= \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C).
 \end{aligned}$$

证毕

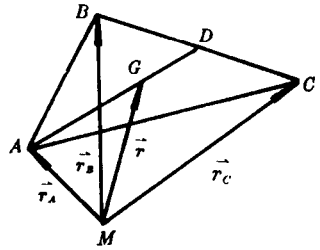


图 8-14

(三) 矢量的线性组合和矢量的分解

以上定义的两个矢量的加减法以及数乘矢量的运算, 统称为矢量的线性运算, 这类运算可以推广到两个以上矢量的情形, 例如, 有一组矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, 经过数乘矢量与加减运算后得到的表达式

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n. \quad (2.1)$$

称(2.1)式为矢量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ 的线性组合, 其中 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 都是实数.

在科学技术中常会遇到相反的问题, 需要把一个矢量分解成几个矢量之和, 关于矢量的分解有如下几个基本结论.

定理二 设 \vec{a}, \vec{b} 不共线, 则矢量 \vec{c} 与 \vec{a}, \vec{b} 共面的充要条件是, 存在唯一的两个实数 λ, μ 使得

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (2.2)$$

成立.

就是说, 当 \vec{a}, \vec{b} 不共线时, 任意一个与 \vec{a}, \vec{b} 共面的矢量 \vec{c} 一定可以沿 \vec{a}, \vec{b} 方向进行分解.

证 必要性. 若 \vec{c} 与 \vec{a}, \vec{b} 共面, 平行移动使它们的起点重合于 O 点, 过 \vec{c} 的终点 R 分别引平行于 \vec{a} 的直线交 \vec{b} 所在的直线上于 Q 点, 引平行于 \vec{b} 的直线交 \vec{a} 所在的直线上于 P 点(如图 8-15).

因 \vec{OP} 与 \vec{a} 共线, 由定理一, 存在唯一实数 λ , 使得 $\vec{OP} = \lambda \vec{a}$; 因 \vec{OQ} 与 \vec{b} 共线, 存在唯一实数 μ , 使得 $\vec{OQ} = \mu \vec{b}$.

由向量加法的平行四边形法则, 使得

$$\vec{c} = \vec{OR} = \vec{OP} + \vec{OQ} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}.$$

充分性. 设 $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ 成立, 由四边形法则, 矢量 \vec{c} 与 $\lambda \vec{a}, \mu \vec{b}$ 共面. 而 $\lambda \vec{a}$ 与 \vec{a} 共线, $\mu \vec{b}$ 与 \vec{b} 共线, 从而得证 \vec{c} 与 \vec{a}, \vec{b} 共面.

证毕

定理三 若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三矢量不共面, 则对于空间任一矢量 \vec{d} , 总存在唯一的一组实数 λ, μ, γ , 使得

$$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \gamma \vec{c} \quad (2.3)$$

成立.

就是说, 任意一个矢量总可以沿不共面的三个矢量的方向进行分解.

证 平行移动使矢量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 的起点重合于 O 点. 过矢量 \vec{d} 的终点 R 分别作平行于 \vec{b} 与 \vec{c} 决定的平面, 平行于 \vec{a} 与 \vec{c} 决定的平面, 平行于 \vec{a} 与 \vec{b} 决定的平面, 分别与 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (或其延长

线)交于点 A, B, C (图 8-16), 则 \vec{OR} 就是以 OA, OB, OC 为棱的平行六面体的对角线矢量, 由矢量的加法得

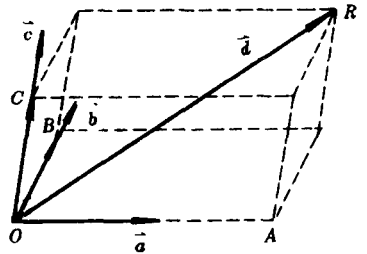
$$\vec{d} = \vec{OR} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}. \quad (2.4)$$

根据定理一, 因 OA 与 \vec{a} 共线, 存在唯一实数 λ , 使得 $\vec{OA} = \lambda\vec{a}$; 因 OB 与 \vec{b} 共线, 存在唯一实数 μ , 使 $\vec{OB} = \mu\vec{b}$; 因 OC 与 \vec{c} 共线, 存在唯一实数 γ , 使得 $\vec{OC} = \gamma\vec{c}$. 把它们代入 (2.4) 式, 就是

$$\vec{d} = \vec{OR} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

证毕

图 8-16



例 3 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 非零不共面矢量, 验证 $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{b} = 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \vec{c} = -4\vec{e}_1 + \vec{e}_3$ 共面.

证 设 $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, 其中 λ, μ 为待定实数, 把已知的矢量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 代入, 得等式

$$-4\vec{e}_1 + \vec{e}_3 = \lambda(3\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \mu(4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3).$$

即

$$(3\lambda + 4)\vec{e}_1 + (\lambda + 4\mu)\vec{e}_2 + (3\mu - 1)\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

于是得

$$\begin{cases} 3\lambda + 4 = 0, \\ \lambda + 4\mu = 0, \\ 3\mu - 1 = 0. \end{cases}$$

这方程组显然存在解 $\lambda = -\frac{4}{3}, \mu = \frac{1}{3}$, 从而等式

$$\vec{c} = -\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

成立. 依定理二知矢量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面.

证毕

2.3 矢量的投影

设有一点 A 及一轴 l , 过点 A 作轴 l 的垂直平面与轴 l 交于 A' , 称 A' 为点 A 在轴 l 上的投影.

设一矢量 \vec{AB} 的起点 A 与终点 B 在轴 l 上的投影分别为 A' 和 B' (图 8-17), 则称有向线段 $\overline{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 为矢量 \vec{AB} 在轴 l 上的投影. 记作

$$P_{r,l} \vec{AB} \text{ 或 } (\vec{AB})_l = A'B'.$$

矢量 \vec{AB} 在轴 l 上的投影等于它的模乘以它与轴 l 的夹角的余弦, 即

$$(\vec{AB})_l = |\vec{AB}| \cos(\vec{AB}, l). \quad ①$$

事实上, 过点 A 作平行于 l 的轴 l' 与过点 B 且垂直于轴 l

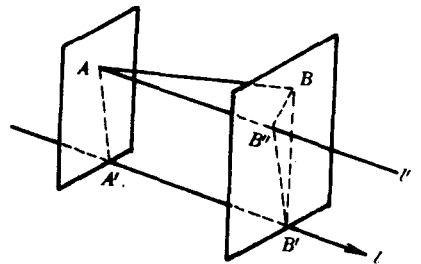


图 8-17

① 记号 (\vec{AB}, l) 表示矢量 \vec{AB} 与轴 l 正向的夹角. 同样, 今后 (\vec{a}, \vec{b}) 表示矢量 \vec{a} 与 \vec{b} 正向的夹角.