

配合上海二期课改

高中二年级第二学期用

黄汉禹 杨安澜 主编

新

教

材

辅导与训练

数学

上海科学技术出版社

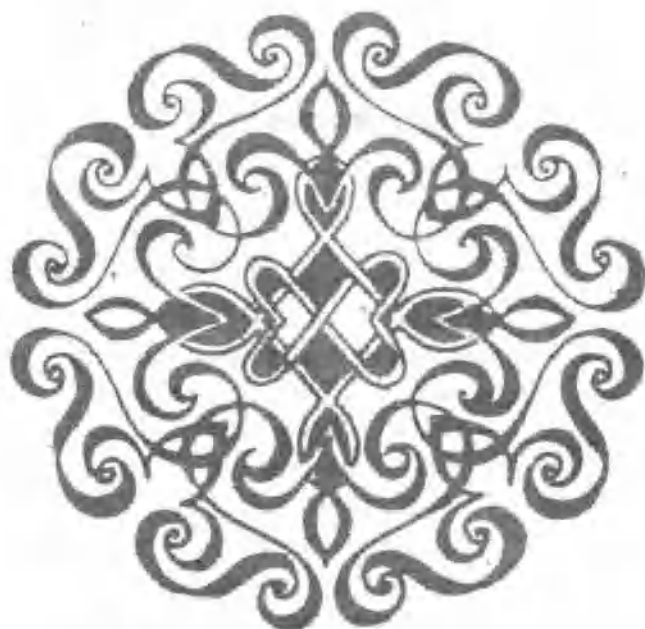
新教材

数 学

辅导与训练

高中二年级第二学期用

黄汉禹 杨安澜 主编



上海科学技术出版社

内 容 提 要

《新教材数学辅导与训练》一书依据上海市二期课改数学学科课程标准编写而成. 全书分知识提要, 解题指导, 疑难分析, 方法指导, 基本训练, 自我评估, 本章测试等部分组成, 本书通过提示各个知识要点, 指导各类题的解法, 让学生牢固掌握数学基础知识, 提高学生分析问题和解决问题的能力.

责任编辑 周玉刚

新教材数学辅导与训练

高中二年级第二学期用

黄汉禹 杨安澜 主编

世纪出版集团 出版、发行
上海科学技术出版社

(上海钦州南路 71 号 邮政编码: 200235)

新华书店上海发行所经销 江苏启东人民印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 10.75 字数 251 000

2005 年 2 月第 1 版 2006 年 1 月第 2 次印刷

印数: 6001-12000

ISBN 7-5323-7916-7/G·1734

定价: 13.90 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题,
请向承印厂联系调换

编写说明

本书以上海中小学课程教材改革委员会编制的《二期课改数学学科课程标准》和据此编著的教材(试验本)为依据,内容紧密配合课本。

始于上世纪90年代初的“一期课改”,由于中、小学数学教材编著的成功,中、小学数学教材编写组曾于1994年获得了“苏步青教育奖”,在社会上取得了良好的信誉。与这套教材配套、由上海中学、市西中学、控江中学等三所市重点中学的教师编写的《数学辅导与训练》,以其“辅导得当,训练有素”而深受广大师生青睐,使用多年来连续三次改版,成为教辅市场中的一个重要的品牌。为适应“二期课改”需要,我们在深入研究《二期课改数学学科课程标准》与新教材的基础上,编著了这套新的《数学辅导与训练》,旨在帮助学生理解新教材,克服学习上的困难,增长阅读能力和自学能力,提高学科素质,及时消化所学的知识内容(包括基本概念、基本理论、基本要求以及有关的重点、难点),并为学有余力的学生提供一些深、宽度略高于课程标准的学习资料。为更好地体现这套教材的精神,本辅导与训练每章按节在结构上由知识提要、解题指导、方法指导、疑难分析、基础训练等部分组成。

【知识提要】 根据“二期课改课程标准”和新教材,简明扼要地归纳每节的内容概要,让读者一目了然地了解本节内容的精粹。

【解题指导】 根据教学要求,精选例题,力求使每个例题都有其显明的目的。每个例题视其特点,分别设有分析、解(包括多种典型解法)、解后适当而恰如其分地作出分栏旁注——“说明”、“注意”、“思考”、“研究”、“拓展”等项目。这里“说明”是指通过本例阐明解题的一般规律,总结解题的一般方法;“注意”是指出解题时容易出错或疏忽的地方;“思考”是指当本例题的条件和结论作适当改变时,命题将起何变化,也在解题方法上提出思考性问题;“研究”是指根据本例题的发展,提出探索性问题研究,促使读者对某些数学规律能自我发现;“拓展”是指将某些问题进行延伸,使之让读者能发现新问题。总之,通过解题指导,让读者能举一反三,提高解题能力。

【疑难分析】 将解题中的疑难所在作简明扼要的概括分析,提出解题思路的“切入口”,从而提高读者分析问题与解决问题的能力。

【方法指导】 本栏目设置在每节最后,旨在归纳本节中解题的主要方法,

培养读者具有举一反三的解题能力。

【基础训练】 在每个重要知识点或数学思想方法之后,编制基础训练,以使有关的数学知识和数学思想方法及时得到落实。

本书各章的最后还编制了本章复习题,可以进一步帮助读者巩固所学知识,加深理解,熟练技能,全面掌握本章的数学基本概念、基础知识、数学思想方法及其应用.为了让学生及时了解自己的学习状况,特编制自我评估题,以便读者随时把握自己的学习水平。

本书由市西中学、控江中学、市三女中等市重点中学使用新教材的教师编写,作者们对书稿的体例反复斟酌,力求体现以培养创新能力为核心的素质教育精神,全书渗透了丰富的教学经验,一定程度上揭示了市重点中学数学教学的真谛.编写过程中始终得到各校领导的大力支持,在此我们表示深深的谢意.本书由黄汉禹、杨安澜主编,邹一心、周玉刚主审.本书第13章由曾国光编写,第14章由何维安编写,第15章由熊秋菊编写,第16章由徐杰编写.在编写过程中,由市三女中郑雪、夏德凡、庄少南、熊秋菊老师复核了全部练习题答案.由于时间紧迫,难于从容筹划编撰,为应广大师生应用之急需,只得仓促付梓.不如人意之处在所难免.恳请惠予宝贵意见,以便不断修改完善。

上海科学技术出版社

2005年1月

目 录

第 13 章 排列与组合	1
13.1 计数原理 I—乘法原理	1
13.2 排列	3
13.3 组合	9
13.4 计数原理 II—加法原理	13
本章复习题(A 级)	17
本章复习题(B 级)	18
本章自我评估题	19
第 14 章 数列的极限	21
14.1 数列的极限	21
14.2 极限的运算法则	29
14.3 无穷等比数列各项的和	41
本章复习题(A 级)	56
本章复习题(B 级)	58
本章自我评估题	59
第 15 章 复数	62
15.1 复数的概念	62
15.2 复数的坐标表示	64
15.3 复数的加法与减法	67
15.4 复数的乘法与除法	71
15.5 复数的平方根与立方根(拓展内容)	76
15.6 实系数一元二次方程	78
本章复习题(A 级)	81
本章复习题(B 级)	82
本章自我评估题	84
第 16 章 空间图形	86
16.1 平面及其表示法	86

16.2 平面的基本性质	90
16.3 空间直线与直线的位置关系	96
16.4 空间直线与平面的位置关系	105
16.5 空间平面与平面的位置关系	113
16.6 多面体的概念	120
16.7 多面体的直观图	126
16.8 棱柱、棱锥和棱台的体积及表面积	130
本章复习题(A级)	137
本章复习题(B级)	138
本章自我评估题	140
参考答案	142

第 13 章 排列与组合

一、排 列

13.1 计数原理 I——乘法原理



知识提要

乘法原理 如果完成一件事需要 n 个步骤,第 1 步有 m_1 种不同的方法,第 2 步有 m_2 种不同的方法,……第 n 步有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种不同的方法.

说明:

乘法原理是解决计数问题的基本原理之一.你能举例说明吗?



解题指导

例 1 若 $a \in \{0, 1, 2\}$, $b \in \{2, 3, 4, 5\}$, $r \in \{1, 2, 3\}$, 则方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 可以表示多少个圆?

解 每选出一组 a, b, r , 方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 就对应了一个圆. 分三个步骤完成:

第一步, 选 a , 有 3 种选择;

第二步, 选 b , 有 4 种选择方法;

第三步, 选 r , 有 3 种选择方法.

因此, 根据乘法原理, 该方程可以表示的圆有

$$N = 3 \times 4 \times 3 = 36 (\text{个}).$$

例 2 3 封不同的信投入 4 个不同的信箱中, 共有多少种不同的投递方法?

解 要完成这件事, 必须把 3 封信全部投入信箱. 可以分三个步骤:

先投其中一封信, 有 4 种不同的方法;

再投一封, 也有 4 种不同的投法;

最后投剩下的一封, 又有 4 种不同的方法.

思考:

在同样的条件下, 问: $y = ax^2 + bx + r$ 可以表示多少个不同的二次函数?

因此,根据乘法原理,不同的投递方法有

$$N = 4 \times 4 \times 4 = 64(\text{种}).$$

例 3 $(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)(c_1 + c_2)$ 展开后共有多少个不同的项?

解 展开式中的每一项都需要经过三个步骤完成:

第一步,先从第一个括号内取出一个 $a_i (i=1,2,3)$,有 3 种取法;

第二步,从第二个括号内取出一个 $b_i (i=1,2,3,4)$,有 4 种取法;

第三步,从第三个括号内取出一个 $c_i (i=1,2)$,有 2 种取法.

因此,根据乘法原理,原式展开后有

$$N = 3 \times 4 \times 2 = 24(\text{项}).$$

例 4 在 3 张卡片的正反两面上,分别写着 1 和 2, 4 和 5, 7 和 8,将它们并排组成三位数,一共可以得到多少个不同的三位数?

解 考虑得到一个三位数的过程:先拿一张卡片,再选择正面或者反面.整个过程分 6 步完成,所以,根据乘法原理,得到的三位数的有

$$N = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 = 48(\text{个}).$$



基础训练

1. 将 4 个不同的小球放入 3 个不同的盒子,有 _____ 种不同的放法.
2. 已知集合 $M = \{1, -2, 3\}$, $N = \{-4, 5, 6, -7\}$,从集合 M 中取出一个元素作为点的横坐标,从集合 N 中取出一个元素作为点的纵坐标,得到的点中,可表示第一、第二象限内不同的点的个数是 _____.
3. 由数字 0、1、2、3 可以组成 _____ 个三位数;可以组成 _____ 个没有重复数字的三位数.
4. 甲乙两数的最大公约数是 60,则甲乙两数的公约数有多少个?
5. 已知 $M = \{x \mid |x| \leq 5, x \in \mathbb{Z}\}$,点 $p(a, b)$, $a, b \in M$,求:
(1) 满足条件的点 P 的个数;
(2) 满足条件的纵坐标不等于零的点 p 的个数.



方法指导

乘法原理是计数的一个基本原理. 在应用乘法原理解

说明:

据多项式乘法,要得到展开式中的项,需要在三个括号中分别取一项相乘. 所以每一种取法对应了展开式的一项.

决有关问题时,其关键是看完成一件事要分几个步骤,每个步骤里又有多少种方法.

练习题 13.1

一、填空题

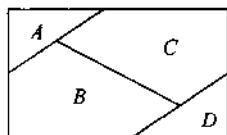
1. 书架的上层放有 6 本不同的数学书,下层放有 5 本不同的语文书,从中任取数学书和语文书各 1 本,有_____种不同的取法.
2. 3600 的正约数有_____个,其中偶约数有_____个.
3. 从甲、乙、丙、丁四种蔬菜品种中选出 3 种,分别种在 3 种不同的土质中进行实验,其中品种甲必须入选试验,则有_____种不同的试验方法.

二、选择题

1. 5 本不同的书,借给 3 个学生,每人限借 1 本,则不同的借书方法有().
(A) 125 (B) 243 (C) 60 (D) 30
2. 某城市电话号码由 7 位升至 8 位,方案如下:原来以 0~5 为第一位的号码前加 6,原来以 6~9 为第一位的号码前加 5. 这种方案最多可以增加的电话号码数为().
(A) 20 000 000 (B) 1 800 000 (C) 90 000 000 (D) 80 000 000
3. 用 1,2,3,4 四个数字中任取两个不同的数作商,则得到的不同的值的个数有().
(A) 12 (B) 11 (C) 10 (D) 15

三、解答题

1. 已知 $a \in \{1, 2, 3, 4\}$, $b \in \{5, 6, 7, 8\}$, 对数 $\log_b a$ 可以表示多少个不同的值?
2. 现有 4 名医生和 4 名护士,分到 4 个不同的地区工作,每个地区必须有 1 名医生和 1 名护士,问共有多少种不同的分配方法?
3. 某地区的汽车牌照采用如下的编码方式:规定第 1 位用 26 个大写的英文字母,后面 4 位选用阿拉伯数字 0~9,问这种编码方式可以产生多少个不同的牌照编码?
4. 有数学、电脑、外语 3 个兴趣小组,4 名学生报名,每人限报 1 个组,共有多少种报名结果?
5. 用 5 种不同的颜色给图中的 A、B、C、D 四个区域涂色,规定每个区域只涂一种颜色,相邻区域颜色不同,求有多少种不同的涂色方法?



(第 5 题)

13.2 排列



知识提要

1. 排列

一般地,从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素,按照一定的次序排列成一行,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

2. 排列数

说明:

排列是计数问题中一个应用广泛的数学模型,很多计数问题可以转化为计算符合条件的排列的个数.

排列数的计算公式的推导过程是乘法原理的典型应用.

从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有排列的个数叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数, 用符号 P_n^m 表示.

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$



解题指导

说明:

问题归结为从 10 个不同的元素中选取 5 个元素的一个排列. 所求的选派方案数就是相应的排列数.

说明:

不同的站法数即 7 个不同元素的排列数!

方法一是特殊元素分析法, 即先考虑安排特殊的元素甲; 方法二是特殊位置分析法, 即先安排特殊的位置.

方法一和方法二都是分步骤完成一件事, 所以用乘法原理.

说明:

方法一使用特殊位置分析法, 先考虑首位.

若用特殊元素分析法, 主要考虑 0, 要分选 0 和不选 0 两种情况讨论, 比较繁琐.

例 1 在 10 名同学中, 选出 5 人分别参加物理、化学、数学、生物、地理 5 个课外小组, 每组 1 人, 共有多少种选派方案?

解 从 10 名同学中, 选出 5 人的一个排列对应了一个选派方案, 所以选派方案数为

$$\begin{aligned} P_{10}^5 &= 10(10-1)(10-2)(10-3)(10-4) \\ &= 30\,240. \end{aligned}$$

例 2 7 名学生站成 1 排照相.

(1) 共有多少种不同的站法?

(2) 如果其中甲不能站在两边, 有多少种不同的站法?

解 (1) 把 7 名同学看做 7 个不同的元素, 一种站法就对应了 7 个元素的一个排列. 由排列数公式, 不同的站法数为

$$P_7^7 = 7! = 5\,040.$$

(2) 有两种不同的解决方法:

方法 1 先安排甲, 中间 5 个位置选 1 个, 有 5 种方法, 再安排其他 6 个人, 6 个人站 6 个位置, 有 P_6^6 种方法.

由乘法原理得, 不同的站法数是

$$5 \times P_6^6 = 3\,600.$$

方法 2 先安排两边的两个位置, 从 6 个学生中选 2 个人站, 有 P_6^2 种方法, 再安排剩下的 5 个位置, 有剩下的 5 个人排列, 有 P_5^5 种排法.

由乘法原理, 符合条件的站法数为

$$P_6^2 \times P_5^5 = 3\,600.$$

例 3 (1) 由 0、1、2、3、4、5 可以组成多少个没有重复数字的 4 位数?

(2) 由 0、1、2、3、4、5 可以组成多少个没有重复数字的 4 位奇数?

解 (1) 方法 1 因为首位不能是 0, 所以先排首位, 即从 1、2、3、4、5 中选 1 个, 有 5 种方法, 再排剩下的三个位置, 由剩下的 5 个数中选 3 个进行排列, 有 P_5^3 种方法. 由乘法原理, 得符合条件的 4 位数的个数为

$$5 \times P_5^3 = 300.$$

方法2 从0、1、2、3、4、5中取4个不同数字的排列个数为 P_5^4 ,但其中以0排在首位的有 P_4^3 个,它们不是所求的四位数.所以0、1、2、3、4、5可以组成的没有重复数字的4位数的个数是

$$P_5^4 - P_4^3 = 300.$$

(2) 先排末位,末位可以排1、3、5中的一个,有 P_3^1 种方法;再排首位,因为0不能排首位,所以有 P_4^1 种方法;最后排剩下的两个位置,从剩下的4个数中选2个数进行排列,有 P_4^2 种方法.由乘法原理,符合条件的四位奇数的个数为

$$P_3^1 \times P_4^1 \times P_4^2 = 144.$$

例4 某次电影展,共放映10部参展影片,其中4部是国产影片,6部是外国影片.

(1) 如果4部国产片要连在一起放映,有多少种不同的排片方案?

(2) 如果4部国产片任何两部都不能连在一起放映,有多少种不同的排片方案?

解 (1) 把4部国产影片看作1部影片和其他6部外国影片排在一起,共有 P_7^7 种方法,又4部国产影片排在一起有 P_4^4 种方法.根据乘法原理,符合条件的排片方案数为

$$P_7^7 \times P_4^4 = 120960.$$

(2) 先安排6部外国影片,有 P_6^6 种方法,再安排4部国产影片,因为国产影片任何两部不能连在一起放映,所以把国产片放在6部外国影片之间的位置或前后两个位置,共有 P_7^4 种方法.根据乘法原理,符合条件的排片方案数为

$$P_6^6 \times P_7^4 = 604800.$$



基础训练

- 10本不同的书借给3名学生,如果每人1本,共有_____种借法.
- 乒乓球队的10名队员中有3名主力队员,派5名参加比赛,3名主力队员要安排在第一、三、五位置,其余7名队员选2名安排在第四、六位置,那么不同的出场安排有多少种?
- 某小组6个人排队照相留念:
 - (1) 若分成两排照相,前排2人,后排4人,有多少种不同的排法?
 - (2) 若分成两排照相,前排2人,后排4人,但其中甲必

方法二用的是排除法,先求出从6个数字中任取4个数字的排列数,因为0在首位不能构成4位数,所以再减去0在首位的情况.

在(2)中,因为首位不能安排0,末位必须安排1、3、5中的一个,所以首位和末位都是特殊位置.如果先安排首位,首位是否安排奇数将对末位的数字安排产生影响.所以,先安排末位.

思考:

本题(2)的解法,列式可以是 $3(P_5^3 - P_4^2)$.想一想,如何理解?

说明:

本例(1)的解法中,把几个要求排在一起的元素看作一个元素的分析方法,我们称之为归一法,或捆绑法.

在应用捆绑法时,注意不忘被绑在一起的元素也要按一定顺序排列.

本例(2)中所用的方法称为“插空法”,这种方法常常用来处理要求某几个特殊元素不相邻的排列问题.

须在前排,乙必须在后排,有多少种不同的排法?

(3) 若排成一排照相,甲乙两人必须相邻,有多少种不同的排法?

(4) 若排成一排照相,6个人中有3个男生和3个女生,要求男生不能相邻,有多少种不同的排法?



解题指导

例5 某次演出共有唱歌、舞蹈、乐器节目各2个,要求以唱歌节目作为开头和结尾,且2个舞蹈节目不排在一起,共有多少种不同的排法?

解 先求唱歌在开头和结尾,但对舞蹈节目不作特殊限制的排法数,有

$$P_2^2 \times P_4^4 = 48(\text{种}).$$

再求唱歌在开头和结尾,且舞蹈节目排在一起的排法数,有

$$P_2^2 \times P_2^2 \times P_3^3 = 24(\text{种}).$$

由排除法,符合条件的排法有

$$48 - 24 = 24(\text{种}).$$

例6 从集合 $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ 中选三个不同的元素,作为直线 $Ax+By+C=0$ 的系数 A,B,C ,则可以组成多少条不同的直线?

解 因为从集合 $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ 中取三个元素的一个排列对应一条直线,所以不考虑直线重复的情况,可以得到 P_7^3 条直线.但是,当取得的三个数是 $0,1,2;0,2,4;0,3,6$ 时,它们对应的直线是相同的,所以其中有两组是多余的.而每3个数可以得到的直线有 P_3^3 条,故需减去 $2P_3^3$ 条.又 $0,1,3;0,2,6$ 对应直线相同, $0,2,3;0,4,6$ 对应直线相同, $1,2,3;2,4,6$ 对应直线也相同,需再减去 $3P_3^3$,所以共可以组成不同的直线有:

$$P_7^3 - 2P_3^3 - 3P_3^3 = 180(\text{条}).$$

例7 由 $0,1,2,3,4,5$ 所组成的没有重复数字的五位数中.

(1) 偶数位上是奇数的五位数有多少个?

(2) 所有这些不同数字的五位数的和是多少?

解 (1) 先排偶数位,从 $1,3,5$ 中选两个数字排列,有 P_3^2 种方法,再排万位,不能排 0 ,从剩下的3个数字中选1个,有 P_3^1 种方法,最后排列剩下的两个位置,由剩下的2个数排列,有 P_2^2 种方法.由乘法原理,符合条件的五位数的个数

说明:

本题是一道综合性较强的问题,主要考虑特殊元素唱歌和舞蹈节目,应用了排除法.因为要求两个舞蹈节目不排在一起,所以还可以考虑运用插空法.

试思考用插空法怎么解决这个问题?

注意:

在寻找相同的直线时,用的是枚举法.

注意:

奇数位上也可以是奇数,所以排列好偶数位后,剩下的一个奇数,还可以排在其他位置.

是:

$$P_3^2 \times P_3^1 \times P_2^2 = 36.$$

(2) 在所有得到的没有重复数字的 5 位数中,若 1 出现在个位,则先排列万位,有 P_4^1 种方法,再排列中间 3 位,有 P_4^3 种方法.所以 1 在个位的 5 位数有 $P_4^1 \times P_4^3$ 个.同理,2、3、4、5 出现在个位的没有重复数字的五位数也分别有 $P_4^1 \times P_4^3$ 个.所以所有 5 位数的个位数字之和为 $P_4^1 \times P_4^3 \times (1+2+3+4+5)$.同理,得到十位、百位、千位的数字之和为 $P_4^1 \times P_4^3 \times (1+2+3+4+5)$.

对于万位数上的每一个数字,都出现 P_5^1 次,所以万位数的数字之和为 $P_5^1 \times (1+2+3+4+5)$.

所以,所有 5 位数的总和是:

$$\begin{aligned} & P_4^1 \times P_4^3 \times (1+2+3+4+5)(1+10+100+1000) \\ & + P_5^1 \times (1+2+3+4+5) \times 10000 \\ & = 19599840. \end{aligned}$$

例 8 将标号为 1、2、3、4 的四个小球放入标号为 1、2、3、4 的四个盒子中去,使每个盒子放一个小球,且每盒中放小球的标号与所在盒子的标号完全不同的放法有多少种?

解 由于先放哪个小球对结果没有影响,所以不妨先放 1 号球,可以放在 2、3、4 号盒子中,有 P_3^1 种方法,再放 2 号球所在盒子对应号码的球,也有 P_2^1 种方法,最后两个球只有唯一的放法,由乘法原理,符合条件的放法有:

$$P_3^1 \times P_2^1 = 9(\text{种}).$$

注意:

对每一个非零数字,在万位出现的次数与在其他位出现的次数不一样,想一想,为什么?

探索:

如果将问题中的球与盒子增加到 5 个,情况会怎样?



基础训练

- 5 个人排成 1 排,甲在乙后面的排法总数是_____.
- 由 0、1、2、3、4、5 可以组成_____个没有重复数字的六位偶数.
- 求用 1、2、3、4 四个数字所组成的没有重复数字的三位数的和.
- 用 0、1、2、3、4 中两个不同的数,作为 $Ax+By=0$ 的系数 A、B,可以得到多少条不同的直线?
- 8 名学生坐成一排照相.
 - 甲乙两人分别坐在两端,有多少种不同的坐法?
 - 甲乙丙三人中任意两人不得相邻而坐,有多少种不同的坐法?



方法指导

在计数问题中,排列问题的解决最终归结为一个求符合条件的排列数.在求符合条件的排列数时,关键是分析给定条件选择合适方法.

解题中应该遵循的原则是:优先安排限定条件的元素或位置,即特殊元素分析法或特殊位置分析法.

常用的解题技巧有:捆绑法,插空法,排除法,枚举法等.

练习题 13.2

一、填空题

1. 有 $n(n \in \mathbf{N}^+)$ 件不同的产品排成一排,若其中 A, B 两件产品排在一起的排法有 48 种,则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 5 个人排成一排,甲和乙不排在一起的排法总数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 用 0、1、2、3、4、5、6 这 7 个数字组成的没有重复数字的五位数中,比 30 000 大的个数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题

1. 有 3 名男生和 2 名女生排成一队,要求女生不在两边的排列数是().
(A) 18 (B) 36 (C) 60 (D) 96
2. 用数字 0、1、2、3、5 可以组成的没有重复数字的四位奇数有()个.
(A) 36 (B) 48 (C) 54 (D) 72
3. 8 个人排成一排照相,其中甲乙丙三人两两不能相邻的排法有().
(A) $P_6^3 P_5^5$ (B) $P_8^8 - P_6^6 P_3^3$ (C) $P_5^5 P_3^3$ (D) $P_8^8 P_6^4$

三、解答题

1. 从 10 名同学中选 4 人参加 $4 \times 100\text{m}$ 接力赛,求从第一棒到第四棒共有多少种不同的排法?
2. 抛物线方程 $y = ax^2 + bx + c$ 的各项系数 $a, b, c \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, 且 a, b, c 两两不等,求过原点的抛物线有多少条?
3. 用 2、3、4、5 排成四位数.
(1) 可以得到多少个四位数?
(2) 可以得到多少个四位偶数?
(3) 可以得到多少个 5 不在十位和千位上的无重复数字的四位数?
4. 某班的新年联欢会原定的 5 个节目已排成节目单,开演前又增加了 2 个新节目,如果将这两个新节目插入原节目单中,那么不同的插法有多少种?
5. 有 3 名男生,4 名女生排成一排,求:
(1) 男生必须排在一起的排列数;
(2) 男生不能排在一起的排列数;
(3) 男生、女生都各不相邻的排列数.

13.3 组 合

知识提要

1. 组合

一般地,从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素组成一组,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

2. 组合数

从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有组合的个数叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数,用符号 C_n^m 表示,

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}.$$

3. 组合数性质

$$(1) C_n^m = C_n^{n-m};$$

$$(2) C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}.$$

说明:

组合是计数问题中的另一个数学模型,许多计数问题可以转化为求符合一定条件的组合的个数,即求组合数.

解题指导

例 1 试解下列各题:

(1) 平面内有 A, B, C, D 四个点,其中任何三点都不在一条直线上,过两点连一线段,问可以连多少条线段?

(2) 平面内有 A, B, C, D 四个点,其中任何三点都不在一条直线上,任取其中两点作为起点和终点,问可以确定多少个向量?

(3) 一个班级有 45 位同学,大家互相握一次手,求一共握了多少次手?

(4) 一个班级有 45 位同学,大家互相写一封信,求一共写了多少封信?

解 (1) 线段与所连两点的顺序无关,所以从 A, B, C, D 中取两个点的一个组合对应了一条线段,所以所连线段的数量为

$$C_4^2 = 6(\text{条}).$$

(2) 向量与所取两点的起始顺序有关,所以从 A, B, C, D 中取两个点的一个排列对应了一个向量,所以所连向量的个数为

$$P_4^2 = 12(\text{个}).$$

(3) 从 45 个学生中取两人的一个组合对应了一次握手,所以握手次数一共有

注意:

区分排列和组合问题的关键是“是否有序”.

$$C_{45}^2 = 990(\text{次}).$$

(4) 从 45 名学生中取两人的一个排列对应了一封信, 所以写信的数量为

$$P_{45}^2 = 1980(\text{封}).$$

例 2 某班有 45 名同学, 其中班委有 6 名. 现从中选择 5 名去参加一个会议.

(1) 有多少种不同的选派方案?

(2) 若要求 5 名中有 3 名班委, 则有多少种不同的选派方案?

说明:

本题(2)中, 一个附加条件(有 3 人是班委成员)的 5 人组合对应了一种选派方案.

解 (1) 从 45 名同学中选 5 名同学的一个组合对应了一种选派方案. 所以不同的选派方案数为

$$C_{45}^5 = 1221759(\text{种}).$$

(2) 分两步完成, 先从班委中选 3 人, 有 C_6^3 种方法; 再从不是班委成员的 39 人中选 2 人, 有 C_{39}^2 种方法. 由乘法原理, 不同的选派方案数为

$$C_6^3 \times C_{39}^2 = 14820(\text{种}).$$

例 3 从立方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的 8 个顶点中选取 4 个, 作为四面体的顶点, 可以得到多少个四面体?

解 每组不共面的 4 点对应一个四面体.

从 8 个顶点中选取 4 个顶点, 可以得到 C_8^4 组. 其中有 12 组四点共面. 所以可以得到的四面体的个数为

$$C_8^4 - 12 = 58(\text{个}).$$

例 4 4 个不同的小球放入编号为 1、2、3 的三个盒子中, 求没有一个空盒子的放法有多少种?

解 由题意, 必有一个盒子中放入了 2 个球. 可以分别完成这件事: 先取两个小球, 让它们放入其中一个盒子中, 有 $C_4^2 \times C_3^1$ 种方法; 再将剩下的两个球放入其他两个盒子中, 有 P_2^2 种方法. 所以符合题意的放法数为

$$C_4^2 \times C_3^1 \times P_2^2 = 36(\text{种}).$$

注意:

正方体的顶点中, 有 12 组四点共面, 其中包括 6 个表面四点和 6 个对角面的四点.

思考:

有这样的解法: 先取 3 个球放入 3 个盒子中, 有 $C_4^3 P_3^3$ 种放法, 再将剩下的 1 个球放入其中 1 个盒子中, 有 P_3^1 种放法. 所以符合题意的放法有 $C_4^3 P_3^3 \times P_3^1 = 72(\text{种})$. 想一想, 错在哪里?



基础训练

1. 平面内有 9 条直线, 如果其中任何三条不经过同一点, 任意两条不平行, 那么它们可以组成 _____ 个三角形.
2. 从 4 男 6 女共 10 名同学中选 4 名同学去参加某项比赛, 要求其中至少有 1 名女同学, 一共有 _____ 种选派方法.