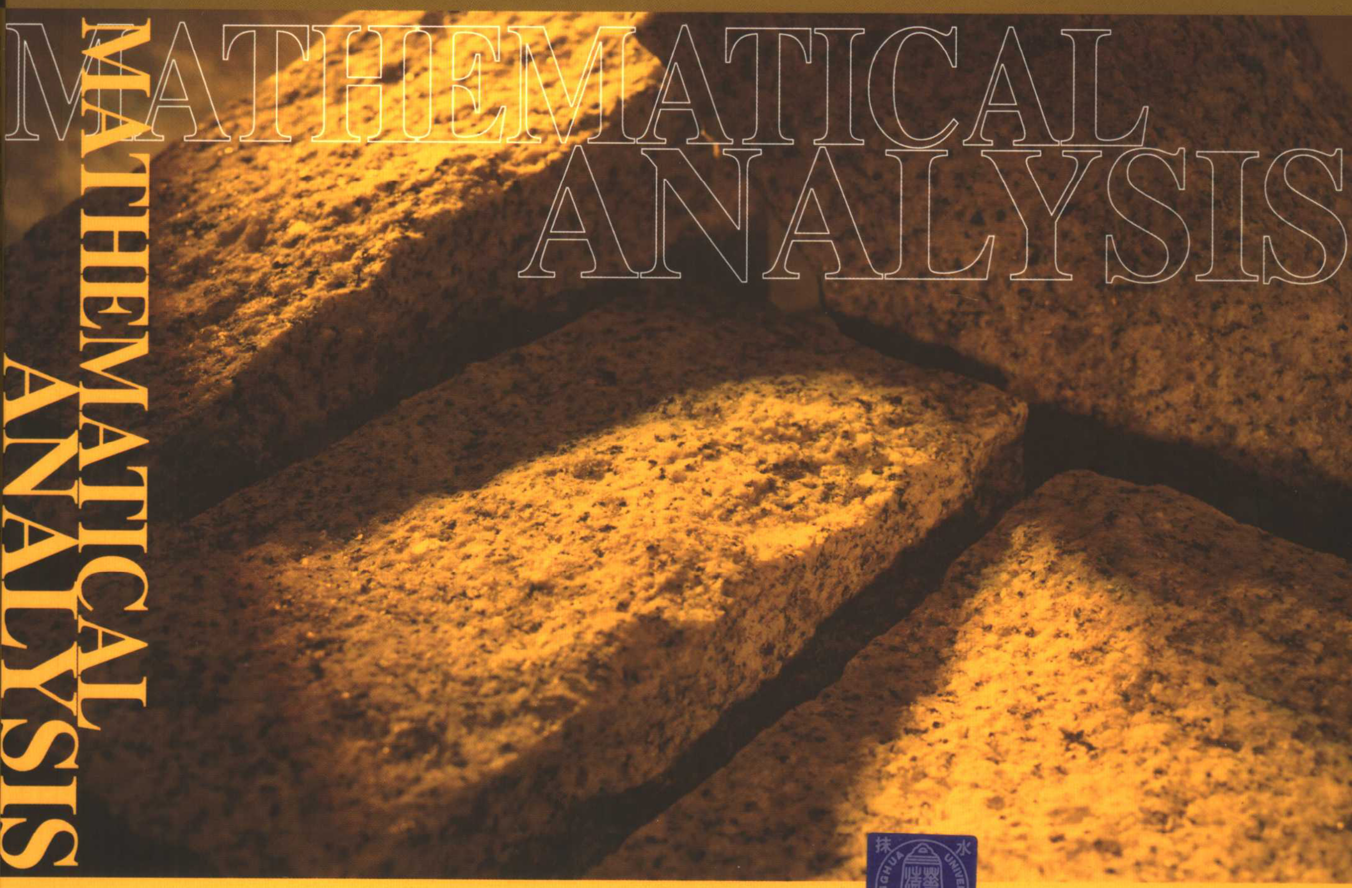
徐森林　薛春华　编著

数学分析

第二册



清华大学出版社

本书共分3册来讲解数学分析的内容。在深入挖掘传统精髓内容的同时，力争做到与后续课程内容的密切结合，使内容具有近代数学的气息。另外，从讲述和训练两个层面来体现因材施教的教学理念。

MATHEMATICAL ANALYSIS

ISBN 7-302-13141-4

9 787302 131410 >

ISBN 7-302-13141-4

定价：33.00元

徐森林　薛春华　编著

数学分析

第二册

MATHEMATICAL ANALYSIS

清华大学出版社
北京

内容简介

本书共分三册来讲解数学分析的内容．在深入挖掘传统精髓内容的同时，力争做到与后续课程内容的密切结合，使内容具有近代数学的气息．另外，从讲述和训练两个层面来体现因材施教的教学理念．

第二册内容包括$(\mathbb{R}^n,\rho_0^n)$的拓扑，n元函数的连续与极限，n元函数的微分及其应用，n元函数的Riemann积分，曲线积分，曲面积分，外微分形式积分与场论．书中配备大量典型实例，习题分练习题、思考题与复习题三个层次，供广大读者选用．

本套书可作为理工科大学或师范大学数学专业的教材，特别是基地班或试点班的教材，也可作为大学教师与数学工作者的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

数学分析．第二册/徐森林，薛春华编著．—北京：清华大学出版社，2006.9
ISBN 7-302-13141-4

Ⅰ．数…　Ⅱ．①徐…　②薛…　Ⅲ．数学分析—高等学校—教材　Ⅳ．O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第057573号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
组稿编辑：刘　颖
文稿编辑：王海燕
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×230　**印张**：26.25　**字数**：556千字
版　　次：2006年9月第1版　2006年9月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-302-13141-4/O·551
印　　数：1～4000
定　　价：33.00元

前　言

数学分析是数学专业最重要的基础课，它对后继课程(实变函数、泛函分析、拓扑、微分几何)与近代数学的学习与研究具有非常深远的影响和至关重要的作用. 一本优秀的数学分析教材必须包含传统微积分内容的精髓和分析能力与方法的传授，也必须包含近代的内容，其检验标准是若干年后能否涌现出一批高水准的应用数学人才和数学研究人才，特别是一些数学顶尖人物. 作者从事数学分析教学几十年，继承导师、著名数学家吴文俊教授的一整套教学(特别是教授数学分析的)方法(科大称之为"吴龙")，并将其发扬光大，因材施教，在中国科技大学培养了一批国内外有名的数学家与数学工作者. 目前，作者徐森林被特聘到华中师范大学数学与统计学学院，并在数学试点班用此教材讲授数学分析，效果显著.

本书的主要特色可归纳为以下几点。

1. 传统精髓内容的完善化

书中包含了实数的各种引入，七个实数连续性等价命题的论述；给出了单变量与多变量的 Riemann 可积的各等价命题的证明；讨论了微分中值定理，Taylor 公式余项的各种表达；介绍了积分第一、第二中值定理的描述，隐函数存在性定理与反函数定理的两种不同的证法等内容.

2. 与后继课程的紧密结合，使内容近代化

本书在介绍经典微积分理论的同时，将近代数学中许多重要概念、理论恰到好处地引进分析教材中. 例如，在积分理论中，给出了 Lebesgue 定理：函数 f Riemann 可积的充要条件是 f 几乎处处连续且有界；详细讨论了$\mathbb{R}^n$中的拓扑及相应的开集、闭集、聚点等概念，描述了$\mathbb{R}^n$中集合的紧致性、连通性、可数性、Hausdorff 性等拓扑不变性，使读者站到拓扑的高度来理解零值定理、介值定理、最值定理与一致连续性定理. 引进外微分形式及外微分运算，将经典 Newton-Leibniz 公式、平面 Green 公式、空间 Stokes 公式与 Gauss 公式统一为 Stokes 公式，并对闭形式、恰当形式与场论的对偶关系给出了全新的表述. 这不仅使教材内容本身近代化，而且为学生在高年级学习拓扑、实变函数、泛函分析、微分几何等课程提供了一个实际模型并打下良好的基础，为经典数学与近代数学架设了一座桥梁。

3. 因材施教、着重培养学生的研究与创新能力

同一定理(如零值定理、一致连续性定理、Lagrange 中值定理、Cauchy 中值定理、隐函数存在性定理与反函数定理等)经常采用多种证法;同一例题应用不同定理或不同方法解答,这是本书又一特色.它使学生广开思路、积极锻炼思维能力,使思维越来越敏捷与成熟.书中举出大量例题是为了让读者得到一定的基本训练,同时从定理的证明和典型实例的分析中掌握数学分析的技巧与方法.习题共分三个层次:练习题、思考题与复习题.练习题是基本题,是为读者熟练掌握内容与方法设置的.为提高学生对数学的浓厚兴趣及解题的能力,设置了思考题.为了让读者减少做题的障碍,增强对数学的自信心,其中有些题给出了提示.实际上,该节的标题就是最好的提示.在每一章设置了大量复习题,这些题不给提示,因此大部分学生对它们会感到无从下手,这些题是为少数想当数学家的学生特别设置的,希望他们能深入思考,自由发挥,将它们一个一个地解答出来,为将来的研究培养自己的创新能力.如有困难,我们还可撰写一本精练的学习指导书.

本书共分三册.第一册内容包括数列极限,函数极限与连续,一元函数的导数与微分中值定理,Taylor 公式,不定积分以及 Riemann 积分;第二册内容包括$\mathbb{R}^n$中的拓扑,n 元函数的极限与连续,n 元函数的微分学,隐函数定理与反函数定理,n 重积分,第一型曲线、曲面积分,第二型曲线、曲面积分,Stokes 定理,外微分形式与场论;第三册内容包括数项级数和各种收敛判别法,函数项级数的一致收敛性及其性质,含参变量反常积分的一致收敛性及其性质,Euler 积分(Γ 函数与 B 函数),幂级数与 Taylor 级数,Fourier 分析.

在写作本书的时候,得到了华中师范大学数学与统计学学院领导和教师们的热情鼓励与大力支持,作者们谨在此对他们表示诚挚的感谢.博士生邓勤涛、胡自胜、薛琼,硕士生金亚东、鲍焱红等对本书的写作提出了许多宝贵意见,使本书增色不少.

特别还要感谢的是清华大学出版社的曾刚、刘颖、王海燕,他们为我们提供了本书出版的机会,了却了我多年的心愿.

徐森林

2005 年 6 月于武汉

目　　录

第 7 章　$(\mathbb{R}^n,\rho_0^n)$的拓扑、n 元函数的连续与极限

从极限理论和实数理论导出了闭区间$[a,b]$上连续函数的零值定理、介值定理、最值定理及一致连续性定理，要将这些定理推广到 n 维 Euclid 空间$\mathbb{R}^n$ 中，必须介绍$\mathbb{R}^n$ 及其子集的拓扑的确切定义，随之而来的还有开集、闭集、聚点、收敛、紧致性、连通性等重要概念.本章证明了$\mathbb{R}^n$ 中子集 A 的紧致、可数紧数、列紧、序列紧致都等价于 A 为$\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集；连通集上的连续函数有零值定理与介值定理；紧致集上的连续函数有最值定理及一致连续性定理.上述内容是站在度量空间、拓扑空间高度来叙述的.考虑到 Euclid 空间$\mathbb{R}^n$这一特定的度量空间、特定的拓扑空间，我们还需讨论 n 元函数的极限及相关的定理.

7.1　$(\mathbb{R}^n,\rho_0^n)$的拓扑

为了培养读者抽象思维能力，我们采用从抽象到具体的方法，在非空集合上引进拓扑的概念，然后给出度量空间(X,ρ)诱导的拓扑空间$(X,\mathscr{T}_\rho)$，作为特殊度量空间的 Euclid 空间$(\mathbb{R}^n,\rho_0^n)$，它相应的拓扑空间为$(\mathbb{R}^n,\mathscr{T}_{\rho_0^n})$，而 $\mathscr{T}_{\rho_0^n}$ 就是$\mathbb{R}^n$ 中的通常拓扑.

定义 7.1.1　如果非空集合 X 的子集族

$$\mathscr{T}=\{U \mid U\text{ 具有性质 }*\}$$

满足：

(1) $X,\varnothing\in\mathscr{T}$；

(2) 若 $U_1,U_2\in\mathscr{T}$，则 $U_1\cap U_2\in\mathscr{T}$；

(3) $\bigcup\limits_{U\in\mathscr{T}_0\subset\mathscr{T}}U\in\mathscr{T}\left(\text{或表达为：若 }U_\alpha\in\mathscr{T},\alpha\in\Gamma\text{(指标集)，必有 }\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha\in\mathscr{T}\right)$.

则称 $\mathscr{T}$ 为 X 上的一个**拓扑**，$(X,\mathscr{T})$称为 X 上的一个**拓扑空间**.

$U\in\mathscr{T}$ 称为$(X,\mathscr{T})$中的**开集**，如果 F 的余(补)集 $F^c=X\setminus F\in\mathscr{T}$，则称 F 为$(X,\mathscr{T})$中的**闭集**，由数学归纳法与(2)知，有限个开集的交为开集；由(3)知，任意多个开集的并为开集.

定义 7.1.2　设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，$A\subset X$，$x\in X$(不必属于 A)，如果对 x 的任何**开邻域**(含 x 的开集)U 必有

$$U\cap(A\setminus\{x\})=(U\setminus\{x\})\cap A\neq\varnothing,$$

则称 x 为 A 的**聚点**.记 A 的聚点的全体为 A'或 A^d，称为 A 的**导集**.而 $\overline{A}=A\cup A'$称为 A

的**闭包**,有时,记 $\overline{A}$ 为 A^-,如果 $\overline{A}=X$,则称 A 为$(X,\mathscr{T})$的**稠密集**.

如果 $a\in A$,且 $a\notin A'$,则称 a 为 A 的**孤立点**. 显然,

$$a\text{ 为 }A\text{ 的孤立点}\Leftrightarrow a\in A,\text{且}\exists U_0\in\mathscr{T},\text{s. t. }U_0\cap A=\{a\}.$$

定理 7.1.1　$x\in\overline{A}\Leftrightarrow$对 x 的任何开邻域 U,有 $U\cap A\neq\varnothing$.

等价地,有

$$x\notin\overline{A}\Leftrightarrow\text{存在 }x\text{ 的开邻域 }U_0,\text{使得 }U_0\cap A=\varnothing.$$

证明　$x\in\overline{A}=A\cup A'\Leftrightarrow x\in A$ 或 $x\notin A,x\in A'\Leftrightarrow$对 x 的任何开邻域 U,有 $U\cap A\neq\varnothing$. □

引理 7.1.1(De Morgan 公式)

$$X\setminus\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(X\setminus A_\alpha),$$

$$X\setminus\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(X\setminus A_\alpha).$$

如果 $A_\alpha\subset X(\forall\alpha\in\Gamma)$,则称 X 为**全空间**. 上述两式变为

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\Big)^c=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c,$$

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\Big)^c=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c.$$

证明　由

$$\begin{aligned}x\in X\setminus\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha&\Leftrightarrow x\in X,x\notin\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\\&\Leftrightarrow x\in X,\forall\alpha\in\Gamma,x\notin A_\alpha\\&\Leftrightarrow\forall\alpha\in\Gamma,x\in(X\setminus A_\alpha)\\&\Leftrightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(X\setminus A_\alpha)\end{aligned}$$

知

$$X\setminus\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(X\setminus A_\alpha).$$

第 2 式可类似证明(留作习题). □

定理 7.1.2　设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间,则闭集族

$$\mathscr{F}=\{F\mid F\text{ 为}(X,\mathscr{T})\text{ 中的闭集}\}$$

具有如下性质:

(1) $X,\varnothing\in\mathscr{F}$;

(2) 若 $F_1,F_2\in\mathscr{F}$,则 $F_1\cup F_2\in\mathscr{F}$;

(3) $\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}}F\in\mathscr{F}\Big($或表达为:若 $F_\alpha\in\mathscr{F},\alpha\in\Gamma$(指标集),必有 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha\in\mathscr{F}\Big)$.

由数学归纳法与(2)知,有限个闭集的并为闭集;由(3)知,任意个闭集的交为闭集.

证明 (1) 因为 $X^c=\varnothing\in\mathcal{T}$, $\varnothing^c=X\in\mathcal{T}$,所以 $X,\varnothing\in\mathcal{F}$.

(2) 因为 $F_1,F_2\in\mathcal{F}$,所以 $F_1^c,F_2^c\in\mathcal{T}$,

$$(F_1\cup F_2)^c \xlongequal{\text{De Morgan 公式}} F_1^c\cap F_2^c\in\mathcal{T},$$

从而 $F_1\cup F_2\in\mathcal{F}$.

(3) 因为 $F_\alpha\in\mathcal{F}$,所以 $F_\alpha^c\in\mathcal{T}$, $\alpha\in\Gamma$. 于是,

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha\Big)^c \xlongequal{\text{De Morgan 公式}} \bigcup_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha^c\in\mathcal{T},$$

从而 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha\in\mathcal{F}$.

或者由

$$\Big(\bigcap_{F\in\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}}F\Big)^c \xlongequal{\text{De Morgan 公式}} \bigcup_{F\in\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}}F^c\in\mathcal{T},$$

推得 $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}}F\in\mathcal{F}$. □

定理 7.1.3(导集的性质)

(1) $\varnothing'=\varnothing$;

(2) $A\subset B$ 蕴涵 $A'\subset B'$;

(3) $(A\cup B)'=A'\cup B'$.

证明 (1) $\forall x\in X$, x 的任何开邻域 U, $U\cap(\varnothing\backslash\{x\})=\varnothing$,故 $x\notin\varnothing'$,从而$\varnothing'=\varnothing$.

(2) 设 $x\in A'$,对 x 的任何开邻域 U,有 $U\cap(B\backslash\{x\})\supset U\cap(A\backslash\{x\})\neq\varnothing$,所以 $x\in B'$,从而 $A'\subset B'$.

(3) 由 $A\subset A\cup B$, $B\subset A\cup B$,根据(2)知,

$$A'\subset(A\cup B)',\quad B'\subset(A\cup B)'.$$

因此, $A'\cup B'\subset(A\cup B)'$.

另一方面,如果 $x\notin A'\cup B'$,则 $x\notin A'$且 $x\notin B'$,故存在 x 的开邻域 U_A, U_B,使得

$$U_A\cap(A\backslash\{x\})=\varnothing,\quad U_B\cap(B\backslash\{x\})=\varnothing.$$

显然, $(U_A\cap U_B)\cap(A\cup B\backslash\{x\})=\varnothing$,所以 $x\notin(A\cup B)'$. 这就证明了$(A\cup B)'\subset A'\cup B'$.

综上得到$(A\cup B)'=A'\cup B'$. □

定理 7.1.4(闭包的性质)

(1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$;

(2) $A\subset B$ 蕴涵 $\overline{A}\subset\overline{B}$;

(3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(4) $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$.

证明 (1) $\overline{\varnothing}=\varnothing\cup\varnothing'=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$.

(2) 由 $A\subset B$ 与定理 7.1.3(2)得到 $A'\subset B'$,从而

$$\overline{A} = A \cup A' \subset B \cup B' = \overline{B}.$$

(3) $\overline{A\cup B}=(A\cup B)\cup(A\cup B)'\xlongequal{\text{定理 7.1.3(3)}}(A\cup B)\cup(A'\cup B')=(A\cup A')\cup(B\cup B')=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(4) 显然,$\overline{A}\subset\overline{A}\cup(\overline{A})'=\overline{(\overline{A})}$. 进而,有

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\overset{\text{定理7.1.1}}{\Longleftrightarrow} \text{对 } x \text{ 的任何开邻域 } U, U \cap A \neq \varnothing \\ &\Longleftrightarrow \text{对 } x \text{ 的任何开邻域 } U, U \cap \overline{A} \neq \varnothing \\ &\overset{\text{定理7.1.1}}{\Longleftrightarrow} x \in \overline{(\overline{A})}. \end{aligned}$$

所以,$\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$. □

定义 7.1.3　设$\{x_n\}$为$(X,\mathscr{T})$中的点列,如果$\exists x\in X$,对 x 的任何开邻域 U,$\exists N\in\mathbb{Z}_+$,当 $n>N$ 时,有 $x_n\in U$,则称$\{x_n\}$**收敛于** x,记作 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$ 或 $x_n\to x(n\to+\infty)$,而 x 称为点列$\{x_n\}$**极限**.

定理 7.1.5　设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间,则(1)A 为闭集$\Leftrightarrow$(2)$A'\subset A\Leftrightarrow$(3)$\overline{A}=A\Rightarrow$(4)$\forall x_n\in A$,$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$,则 $x\in A$.

证明　(1)$\Rightarrow$(2) 设 A 为闭集,则 A^c 为开集,$\forall x\in A^c$(x 的开邻域),有

$$A^c \cap (A\backslash\{x\}) = \varnothing.$$

所以 $x\notin A'$,从而 $A'\subset A$.

(2)$\Leftrightarrow$(3) $A'\subset A\Leftrightarrow\overline{A}=A\cup A'=A$.

(1)$\Leftarrow$(2) 设 $A'\subset A$,$\forall x\in A^c$,必有 $x\notin A'$. 根据聚点的定义,存在 x 的开邻域 U_x,使得 $U_x\cap(A\backslash\{x\})=\varnothing$. 再从 $x\notin A$ 知 $U_x\cap A=\varnothing$,$x\in U_x\subset A^c$,于是,$A^c=\bigcup\limits_{x\in A^c}U_x$ 为开集,而 A 为闭集.

(1)$\Rightarrow$(4) 因 A 为闭集,故 A^c 为开集.(反证)假设 $x\notin A$,即 $x\in A^c$,则 A^c 为 x 的一个开邻域,由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$,故$\exists N\in\mathbb{Z}_+$,当 $n>N$ 时,有 $x_n\in A^c$,即 $x_n\notin A$,这与已知 $x_n\in A$ 相矛盾. □

下面将介绍的度量空间就是一类具有优良性质的拓扑空间.

定义 7.1.4　设 X 为非空集合,

$$\rho\colon X\times X\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto\rho(x,y)$$

为映射,如果满足:

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$; 且 $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$　(正定性);

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$　(对称性);

(3) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$　(三角(点)不等式).

则称 ρ 为 X 上的一个**度量**(或**距离**),(X,ρ)称为 X 上的一个**度量(距离)空间**,$\rho(x,y)$称为**点 x 与 y 的距离**.

现在验证:度量空间(X,ρ)上的子集族

$$\mathscr{T}_\rho=\{U\mid\forall x\in U,\exists\delta>0,\text{s.t. 开球 }B(x;\delta)\subset U\}$$

为 X 上的一个拓扑,称为**由ρ诱导的拓扑**,其中 $B(a;\delta)=\{y\mid y\in X,\rho(y,x)<\delta\}$是**以 x 为中心,δ 为半径的开球**.

证明 (1) 由于$\forall x\in X$,显然有 $B(x;1)\subset X$,故 $X\in\mathscr{T}_\rho$.

因为$\varnothing$不含任何元素,自然它满足 $\mathscr{T}_\rho$ 的性质,故$\varnothing\in\mathscr{T}_\rho$.

(2) 设$U_1,U_2\in\mathscr{T}_\rho$,如果$U_1\cap U_2=\varnothing$,根据(1),$U_1\cap U_2=\varnothing\in\mathscr{T}_\rho$;如果$U_1\cap U_2\neq\varnothing$,则$\forall x\in U_1\cap U_2$,有 $x\in U_i$,$\exists\delta_i>0$,s.t. $B(x;\delta_i)\subset U_i\ (i=1,2)$,于是,$B(x;\delta)\subset U_1\cap U_2$,其中 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.因此,$U_1\cap U_2\in\mathscr{T}_\rho$.

(3) 设$U_\alpha\in\mathscr{T}_\rho,\alpha\in\Gamma$.如果 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha$,则 $x\in U_{\alpha_0}$,$\alpha_0\in\Gamma$.于是,$\exists\delta_0>0$,s.t. $B(x;\delta_0)\subset U_{\alpha_0}\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha$.因此,$\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha\in\mathscr{T}_\rho$.

根据(1),(2),(3)可知 $\mathscr{T}_\rho$ 为 X 上的一个拓扑. □

在度量空间$(X,\mathscr{T}_\rho)$中显然有:

$$\begin{aligned}\text{点列}\{x_n\}\text{收敛于 }x_0\in X&\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{Z}_+,\text{当 }n>N\text{ 时},x_n\in B(x_0;\varepsilon)\\&\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{Z}_+,\text{当 }n>N\text{ 时},\rho(x_n,x_0)<\varepsilon.\end{aligned}$$

定理 7.1.6 设(X,ρ)为度量空间,$A\subset X$,则以下结论等价:

(1) x 为 A 的聚点,即 $x\in A'$.

(2) 对 x 的任何开邻域 U,$U\cap A$ 为无限集,即 U 中含 A 的无限个点.

(3) $\exists\{x_k\}\subset A$,x_k 互异且 $x_k\neq x$,s.t. $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=x$.

证明 (1)$\Leftarrow$(2) 由聚点的定义即知.

(1)$\Rightarrow$(3) 设 $x\in A'$,对 x 的任何开邻域 U,$\exists n_1\in\mathbb{Z}_+$,s.t. $B\left(x;\frac{1}{n_1}\right)\subset U$,则有 $x_1\in B\left(x;\frac{1}{n_1}\right)\cap(A\backslash\{x\})$,取 $n_2>n_1$,s.t. $\frac{1}{n_2}<\rho(x_1,x)$,则对 x 的开邻域 $B\left(x;\frac{1}{n_2}\right)$,有 $x_2\in B\left(x;\frac{1}{n_2}\right)\cap(A\backslash\{x\})$,显然 $x_2\neq x_1$,依此类推,得到$\{x_k\}$,s.t. $x_k\in B\left(x;\frac{1}{n_k}\right)\cap(A\backslash\{x\})$,且 x_k 为异于 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}$ 的点.于是,x_k 互异且 $x_k\neq x$,再由 $0\leqslant\rho(x_k,x)<\frac{1}{n_k}\to 0\ (k\to+\infty)$得到 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=x$.

(2)$\Leftarrow$(3) 对 x 的任何开邻域 U,因为 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=x$,故$\exists K\in\mathbb{Z}_+$,当 $k>K$ 时,有 $x_k\in U$.由于 x_k 互异知 U 中含 A 的无限个点. □

为了看出定理7.1.6中的(2),(3)为度量空间中特有的性质,注意下面例题.

例 7.1.1 设 X 为非空集合,$\mathscr{T}_{平庸}=\{\varnothing,X\}$,显然 $\mathscr{T}_{平庸}$ 为 X 上的一个拓扑,其开集最少,只含 $\varnothing$ 与 X 两个,称 $(X,\mathscr{T}_{平庸})$ 为 X 上的**平庸拓扑空间**.

当 $X=\{a,b\}$,$a\neq b$ 时,$\mathscr{T}_{平庸}=\{\varnothing,X=\{a,b\}\}$. 取 $A=\{a\}$,则 $A'=\{b\}$. 显然,b 的任何开邻域 U 必为 $X=\{a,b\}$,它只含 $A=\{a\}$ 的一个点 a,而不是无限个点,由于 A 为有限集,自然定理7.1.6中(3)不成立.

定义 7.1.5 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间,$x\in X$,x 的一个开邻域族 $\mathscr{T}_x{}^*$,若对 x 的任何开邻域 U,均有 $U_0\in\mathscr{T}_x{}^*$,s.t. $x\in U_0\subset U$,则称 $\mathscr{T}_x{}^*$ 为 x 的一个**局部基**. 若 $\mathscr{T}_x{}^*$ 为至多可数集,则称 $\mathscr{T}_x{}^*$ 为 x 的一个**可数局部基**.

如果 $\forall x\in X$ 均有可数局部基,则称 $(X,\mathscr{T})$ 为 $\boldsymbol{A_1}$ **空间**或**具有第一可数性公理**的拓扑空间.

如果有 $\mathscr{T}^*\subset\mathscr{T}$,对 $\mathscr{T}$ 中任一元素 U,有 $U=\bigcup\limits_{V\in\mathscr{T}_0^*\subset\mathscr{T}^*}V$(即 $\forall x\in U$,$\exists V\in\mathscr{T}^*$,s.t. $x\in V\subset U$),则称 $\mathscr{T}^*$ 为 $(X,\mathscr{T})$ 的一个**拓扑基**,换句话说,$\mathscr{T}$ 是由 $\mathscr{T}^*$ 生成的,进而,当 $\mathscr{T}^*$ 为至多可数集时,称 $\mathscr{T}^*$ 为 $(X,\mathscr{T})$ 的一个**可数拓扑基**. 有可数拓扑基的拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 称为 $\boldsymbol{A_2}$ **空间**或**具有第二可数性公理**的拓扑空间.

显然 A_2 空间必为 A_1 空间($\mathscr{T}_x{}^*=\{U\mid U\in\mathscr{T}^*,x\in U\}$ 为 x 处的可数局部基). 但反之不一定成立.

例 7.1.2 设 X 为非空集合,$\mathscr{T}_{离散}=\{A\mid A\subset X\}$ 显然为一个拓扑,它的开集最多,称 $(X,\mathscr{T}_{离散})$ 为 X 上的**离散拓扑空间**. 容易看出 $(X,\mathscr{T}_{离散})$ 为 A_1 空间($\mathscr{T}_x{}^*=\{\{x\}\}$ 为 x 处的可数局部基).

但值得注意的是 $(X,\mathscr{T}_{离散})$ 未必为 A_2 空间. 例如,当 X 为不可数集时,$(X,\mathscr{T}_{离散})$ 就不是 A_2 空间.

证明 (反证)假设 $(X,\mathscr{T}_{离散})$ 为 A_2 空间,则有可数拓扑基 $\mathscr{T}^*$. 由于独点集 $\{x\}\in\mathscr{T}_{离散}$,根据拓扑基定义知,$\exists U_x\in\mathscr{T}^*$,s.t. $x\in U_x\subset\{x\}$,则 $\{x\}=U_x$. 由此推得 $\{\{x\}\mid x\in X\}\subset\mathscr{T}^*$,从而 $\{\{x\}\mid x\in X\}$ 与 X 为至多可数集,这与 X 为不可数集相矛盾. □

定理 7.1.7 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间,在 $x\in X$ 处有可数局部基 $\mathscr{T}^*=\{U_n\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$,则必有 x 的可数局部基 $\mathscr{T}^{**}=\{V_n\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$,s.t. $V_1\supset V_2\supset\cdots\supset V_n\supset V_{n+1}\supset\cdots$,并称 $\mathscr{T}^{**}$ 为 x 处的**规范可数局部基**.

证明 令 $V_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i\subset U_n$. 显然 $V_n\in\mathscr{T}$,且 $V_1\supset V_2\supset\cdots\supset V_n\supset V_{n+1}\supset\cdots$. 再证 $\{V_n\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$ 为 x 处的局部基. 事实上,对 x 的任何开邻域 U,必有 $U_n\in\mathscr{T}^*$ s.t. $x\in U_n\subset U$. 根据 V_n 的定义,$x\in V_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i\subset U_n\subset U$. 这就证明了 $\{V_n\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$ 为 x 处的局部基. □

定理 7.1.8 设$(X,\mathscr{T})$为 A_1 空间,则

$$A \text{ 为闭集} \Leftrightarrow \forall x_n \in A, \lim_{n\to+\infty} x_n = x, \text{则 } x \in A.$$

证明 ($\Rightarrow$) 由定理 7.1.5(1)$\Rightarrow$(4).

($\Leftarrow$)(反证)假设 A 不为闭集,则 $\exists x\in A'$,$x\notin A$. 因为$(X,\mathscr{T})$为 A_1 空间,根据定理 7.1.7,x 处有规范可数局部基$\{V_n|n\in\mathbb{Z}_+\}$. 于是,对 x 的任何开邻域 V_n,有 $V_n\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing$. 取 $x_n\in V_n\cap(A\setminus\{x\})\subset A$,显然 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$. 事实上,对 x 的任何开邻域 U,由$\{V_n|n\in\mathbb{Z}_+\}$为 x 处的规范可数局部基,故 $\exists N\in\mathbb{Z}_+$, s. t. $x\in V_N\subset U$,当 $n>N$ 时,$x_n\in V_n\subset V_N\subset U$,这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$. 但是,$x\notin A$,这与右边条件矛盾. □

定义 7.1.6 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间,如果 $\forall p,q\in X$,$p\neq q$ 均有 p 的开邻域 U 与 q 的开邻域 V, s. t. $U\cap V=\varnothing$,则称$(X,\mathscr{T})$为 $\boldsymbol{T_2}$ **空间或 Hausdorff 空间**.

定理 7.1.9 设$(X,\mathscr{T})$为 T_2 空间,点列$\{x_n\}\subset X$ 收敛,则极限是惟一的.

证明 (反证)假设极限不惟一,则 $\exists x,y\in X$,$x\neq y$, s. t. $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=y$. 因为$(X,\mathscr{T})$为 T_2 空间,所以存在 x 的开邻域 U 与 y 的开邻域 V, s. t. $U\cap V=\varnothing$. 根据极限的定义,$\exists N_1,N_2\in\mathbb{Z}_+$,当 $n>N_1$ 时,$x_n\in U$;当 $n>N_2$ 时,$x_n\in V$. 于是,当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$时,$x_n\in U\cap V=\varnothing$,矛盾. □

例 7.1.3 设 X 至少含两个点,$\{x_n\}$为$(X,\mathscr{T}_{\text{平庸}})$中的任一点列,则 $\forall x\in X$,都必有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$.

事实上,对 x 的任何开邻域 U,必有 $U=X$,故当 $n>N=1$ 时,$x_n\in X=U$,这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$. 因此,$X$ 中任一点都为点列$\{x_n\}$的极限,这个结果真出乎意料!

引理 7.1.2 (X,ρ)中的开球 $B(x;\delta)$为开集.

证明 $\forall y\in B(x;\delta)$,必有 $B(y;\delta-\rho(x,y))\subset B(x;\delta)$,因此 $B(x;\delta)\in\mathscr{T}_\rho$,即开球 $B(x;\delta)$为开集. □

例 7.1.4 设 X 为非空集合,ρ: $X\times X\to\mathbb{R}$,$(x,y)\mapsto\rho(x,y)$,其中

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

显然,(X,ρ)为 X 上的一个度量空间,并且开球

$$B(x;\delta)=\begin{cases}\{x\}, & 0<\delta\leqslant 1,\\ X, & \delta>1.\end{cases}$$

由此可知,每个独点集$\{x\}$均为$(X,\mathscr{T}_\rho)$中的开集(实际上是开球). $\forall A\subset X$,

$$A=\bigcup_{x\in A}\{x\}=\bigcup_{x\in A}B(x;1)$$

为$(X,\mathscr{T}_\rho)$的开集. 因此 $\mathscr{T}_\rho=\{A|A\subset X\}=\mathscr{T}_{\text{离散}}$.

例 7.1.5　设(X,ρ)为度量空间，$Y\subset X$为非空集合，显然，$\rho_Y=\rho|_Y: Y\times Y\to\mathbb{R}$，$\rho_Y(x,y)=\rho(x,y)$为$Y$上的一个度量（距离），使得$(Y,\rho_Y)$为$Y$上的一个度量（距离）空间，称为$(X,\rho)$的一个**子度量空间**. 其开球

$$\begin{aligned}B_Y(x;\delta)&=\{y\mid y\in Y,\rho_Y(y,x)=\rho(y,x)<\delta\}\\&=\{y\mid y\in X,\rho(y,x)<\delta\}\cap Y=B(x;\delta)\cap Y.\end{aligned}$$

这表明(Y,ρ_Y)中的以x为中心、δ为半径的开球$B_Y(X;\delta)$就是(X,ρ)中以x为中心、δ为半径的开球$B(x;\delta)$与Y的交.

例 7.1.6　设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，$Y\subset X$为非空集合，记

$$\mathscr{T}_Y=\{U\cap Y\mid U\in\mathscr{T}\},$$

则$\mathscr{T}_Y$为Y上的一个拓扑，称为**由$\mathscr{T}$诱导的拓扑**，$(Y,\mathscr{T}_Y)$称为$(X,\mathscr{T})$的**诱导拓扑空间**或**子拓扑空间**.

证明　(1) $\varnothing=\varnothing\cap Y\in\mathscr{T}_Y$，$Y=X\cap Y\in\mathscr{T}_Y$.

(2) 若$H_i=U_i\cap Y\in\mathscr{T}_Y$，$U_i\in\mathscr{T}(i=1,2)$，则$U_1\cap U_2\in\mathscr{T}$，从而

$$H_1\cap H_2=(U_1\cap Y)\cap(U_2\cap Y)=(U_1\cap U_2)\cap Y\in\mathscr{T}_Y.$$

(3) 若$H_\alpha=U_\alpha\cap Y\in\mathscr{T}_Y$，$U_\alpha\in\mathscr{T}$，$\alpha\in\Gamma$，则$\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha\in\mathscr{T}$，从而

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}H_\alpha=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(U_\alpha\cap Y)=\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha\Big)\cap Y\in\mathscr{T}_Y.$$

根据(1),(2),(3)推得$\mathscr{T}_Y$为Y上的一个拓扑.　□

引理 7.1.3　设(X,ρ)为度量空间，$Y\subset X$为非空子集，则$\mathscr{T}_{\rho_Y}=(\mathscr{T}_\rho)_Y$.

证明　$\forall H\in(\mathscr{T}_\rho)_Y$，则$H=U\cap Y$，$U\in\mathscr{T}_\rho$. $\forall x\in H$，必有开球$B(x;\delta)\subset U$，则

$$B_Y(x;\delta)=B(x;\delta)\cap Y\subset U\cap Y=H,$$

从而$H\in\mathscr{T}_{\rho_Y}$，$(\mathscr{T}_\rho)_Y\subset\mathscr{T}_{\rho_Y}$.

反之，$\forall H\in\mathscr{T}_{\rho_Y}$，$\forall x\in H$，必有$B(x;\delta_x)\cap Y=B_Y(x;\delta_x)\subset H$，则

$$H=\bigcup_{x\in H}B_Y(x;\delta_x)=\Big(\bigcup_{x\in H}B(x;\delta_x)\Big)\cap Y\in(\mathscr{T}_\rho)_Y,\quad \mathscr{T}_{\rho_Y}\subset(\mathscr{T}_\rho)_Y.$$

综上可知，$\mathscr{T}_{\rho_Y}=(\mathscr{T}_\rho)_Y$.　□

引理 7.1.4　设(X,ρ)为度量空间，则$(X,\mathscr{T}_\rho)$为A_1空间、T_2空间.

证明　容易验证$\left\{B\left(x;\dfrac{1}{n}\right)\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}_+\right\}$为$x$点处的规范可数局部基；而$\{B(x;r)\mid r\in\mathbb{Q},r>0\}$为$x$点处的可数局部基. 因此$(x,\mathscr{T}_\rho)$为$A_1$空间.

$\forall p,q\in X,p\neq q$，显然$B\left(p;\dfrac{1}{2}\rho(p,q)\right)$与$B\left(q;\dfrac{1}{2}\rho(p,q)\right)$分别为$p$与$q$的两个不相交的开球邻域，所以$(X,\mathscr{T}_\rho)$为$T_2$空间.　□

推论 7.1.1 设(X,ρ)为度量空间,则有:

(1) A 为闭集$\Leftrightarrow \forall x_n\in A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$,则 $x\in A$;

(2) 如果点列$\{x_n\}\subset X$ 收敛,则极限是惟一的.

证明 (1) 可由引理 7.1.4 与定理 7.1.8 推得.

(2) 可由引理 7.1.4 与定理 7.1.9 推得. □

注 7.1.1 设 X 为不可数集,

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

由例 7.1.4 知,$\mathscr{T}_\rho=\mathscr{T}_{离散}$.再由例 7.1.2 知,$(X,\mathscr{T}_\rho)=(X,\mathscr{T}_{离散})$为 A_1 空间,但不为 A_2 空间.此例表明度量空间只是 A_1 空间($\mathscr{T}^*=\left\{B\left(x;\dfrac{1}{n}\right)\middle|n\in\mathbb{Z}_+\right\}$为 x 处的规范可数局部基),未必是 A_2 空间.

现在来讨论最重要的一个度量空间——通常的 Euclid 空间.

例 7.1.7 $\forall n\in\mathbb{Z}_+$,

$$\mathbb{R}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n\},$$

并称$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积,也记为 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$;称 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的**模、范数或长度**;由此,我们还定义 ρ_0^n: $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mapsto\rho_0^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$,其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$.下面证明 ρ_0^n 为$\mathbb{R}^n$ 上的一个度量(距离),使得$(\mathbb{R}^n,\rho_0^n)$为$\mathbb{R}^n$ 的一个度量空间,它诱导的拓扑空间为$(\mathbb{R}^n,\mathscr{T}_{\rho_0^n})$.这就是**通常的 n 维 Euclid 空间**.

证明 (1) $\rho_0^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$, $\rho_0^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0\Leftrightarrow x_i-y_i=0,i=1,2,\cdots,n$

$$\Leftrightarrow x_i=y_i,i=1,2,\cdots,n$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y};$$

(2) $\rho_0^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n(y_i-x_i)^2}=\rho_0^n(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$;

(3) 由关于 t 的二次三项式

$$\sum_{i=1}^n a_i^2-2\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)t+\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)t^2=\sum_{i=1}^n(a_i-b_it)^2\geqslant 0$$

的判别式 $\Delta=4\left[\left(\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\right)^2-\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\sum\limits_{i=1}^n b_i^2\right]\leqslant 0$ 得到 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i^2.$$

由此推得