“希望杯”数学竞赛系列丛书 主编 周国镇

希望杯

数学能力培训教程

张海英 等◎编著

高二

◎掌握美的数学

◎学会创新思考

◎登上更高境界

数学能力测评的高水准资料

为千千万万的青少年播种希望

气象出版社

“希望杯”数学竞赛系列丛书 主编 周国镇

“希望杯”数学能力

培训教程

高 二

张海英 等◎编著

气象出版社

图书在版编目(CIP)数据

“希望杯”数学能力培训教程．高二/周国镇主编．
北京:气象出版社,2005.10
(“希望杯”数学竞赛系列丛书)
ISBN 7-5029-4050-2

Ⅰ.希…　Ⅱ.周…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第120731号

气象出版社出版

(北京海淀区中关村南大街46号　邮编:100081)
总编室:010-68407112　发行部:010-62175925
网址:http://cmp.cma.gov.cn　E-mail:qxcbs@263.net
责任编辑:黄丽荣　终审:吴晓鹏
封面设计:贾衍凤　版式设计:刘祥玉　责任校对:谢　帆

*

河北天普润印刷厂印刷
气象出版社发行

*

开本:850×1168　1/32　印张:11.625　字数:302千字
2005年12月第一版　2005年12月第一次印刷
印数:1～8000　定价:17.00元

“希望杯”全国数学邀请赛
组织委员会

顾　问

龚　昇　著名数学家
华罗庚数学奖获得者
中国科学技术大学原副校长

梅向明　著名数学家
北京师范学院原院长

徐利治　著名数学家
大连理工大学数学研究所原所长

常务委员

陈德泉　应用数学家
曾任中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长，现任副理事长
华罗庚实验室主任
曾任第一、二届“希望杯”组委会主任，其他各届副主任

计　雷　应用数学家
曾任中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长，现任副理事长
华罗庚实验室副主任
曾任三届“希望杯”组委会主任，其他各届副主任

徐伟宣　应用数学家
中国科学院科技政策与管理科学研究所原所长
中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长
华罗庚实验室副主任

内蒙古	张志仁	王　荣	刘爱平	刘彦彰	南　丁	高秀恩
	杨　莉	敖特根				
辽　宁	赵素艳	孙家逊	张顺清	刘　蓉	舒凤杰	魏丽敏
	陈玉华	陈桂英	王闽东			
吉　林	张胜利	刘　颖	赵莉红	祝承亮	李春花	
黑龙江	于　辉	李修福	孙　兵	全绍先	全贵泉	
上　海	杨家政	熊　斌	王凤春	毛育才	黎　东	李　鹏
	李国威	王明珠	李　为	俞颂萱		
江　苏	许云峰	夏建新	刘　健	孔德旺	杨浩清	陶建平
	任方成					
浙　江	吴明华	李世杰	应建军	马建新	何仁荣	
福　建	付晋玫	曾大洋	温晓丹	王一桂		
江　西	熊以情	徐源可	董乐华	毛有祥	肖建中	
山　东	赵水祥	侯加明	王丽萍	王　政	闫炳杰	
河　南	马国军	陈宝亭				
湖　北	汪江松	余光明	刘统菊	杨德焱	赵小平	
湖　南	肖真武	谢细华	曾晓牛			
广　东	周　署	黄文毓	徐山洪	郑俊盛	劳兆喜	陈文生
	殷切文	梁秉冠	梁小贱	邓志云	林国忠	刘超平
	刘案清	石永生	卢建川	刘仲雄	邓正德	付冠流
	何浩江	王金玉	钟　明			
海　南	张　力	张光浓	莫德勋			
四　川	李黎明	赵颖钧	牟　林	冯惠芹	王国凤	吴艳蓉
贵　州	王荣方	胡朝双	王兴华	罗朝兴		
云　南	张文英	欧　群	汪　锐	龚　灵	罗　红	徐云贵
陕　西	王秋科	吕咏格	徐学芳			
甘　肃	胡学让					
宁　夏	杨　燕	李占玉				
青　海	闫翊德					
新　疆	杨卫平	黄志清	张小平			

前　　言

这套教程充分注意了新颁布的中小学数学教学大纲，力求充分体现“希望杯”的特色，为广大师生提供系统、全面、实用的数学内容、思想和方法，以“鼓励学好课本知识，适当拓宽知识面，激发学习数学的兴趣和热情，培养科学的思维能力、创新能力和实践能力”。

本教程中所有原始的素材都来源于历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题，这些题目中绝大多数是由“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的专家们命定的，其余则是由全国各地数学命题的研究人员编拟。这些题目，不但贴近现行的中小学数学课本，而且很有启发性、思考性和趣味性，寓科学于趣味之中，寓知识、能力的考查于数学的美育之中。学习和研究这些题目不仅能使学习者对数学课本的理解、掌握和应用能力达到高水平，并且能实实在在地提高科学思维素质，而这种素质对于有效地学习任何知识都是必需的。正因为如此，历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题被多方人士看好：中考、高考命题人员经常从中吸取营养；有远见的数学教师大量地从中选取资料，来充实和丰富教学内容；众多的数学教学和培训机构则用来作为教材的主要内容之一。最有说服力的是千千万万的中小学生，正是经过对“希望杯”试题的学习、研究，提高了水平，大大加强了学数学的兴趣和信心，他们的数学素养明显地不同于没有接触过“希望杯”的学生们。值得一提的是，北大、清华等著名高校以及远赴国外大学的众多学子中有

不少人，在中学时代，都曾有参加过“希望杯”全国数学邀请赛并且获奖的经历。

“希望杯”全国数学邀请赛从1990年开始举办，至今已举办16届。16年来，参赛的初一、初二、高一、高二这四个年级，每个年级的试题、培训题累计都超过2000个，四个年级的题目则累计近万个，几乎覆盖了中学数学的全部以及中学数学课本以外的很多内容，不仅如此，而且蕴含了丰富的数学思想和方法。若要将这些题目全部做一遍，对于一位数学教师来说，确也值得和可能，但是对于一位中学生，则难度就很大了。因此如何从中提取最精彩最重要的部分，按数学的系统整理出来，就非常必要。本教程正是做了这样一件事：它从每个年级的2000多个题目中各精选了四分之一左右，分为若干个专题，对每个专题，给出了相关的必备知识，再详细分析若干个题目，然后安排做少量的题，这样一个过程，一个专题就拿下来了。一个个专题，陆续学下来，中学数学的最主要的内容、思想和方法也就能熟悉和掌握，数学功底必然大大地得到加强。

考虑到大部分中小学生只是希望能很好地掌握学校里数学课本上的内容，另一方面又有不少中小学生并不满足于此，他们对课本以外的数学也有强烈的求知欲，所以我们的教程分课本以内的和课本以外的两部分。前者占教程的大部分，后者只占小部分。

《“希望杯”数学能力培训教程》现由气象出版社于2005年12月出版，包括初一、初二、高一、高二、小学(四、五年级)，计五册。该教程在内容上贴近新的中小学数学教学大纲，更突出对科学思维能力的培养，而且在行文上力求简明易懂。

随着“希望杯”试题的不断更新和学校数学教学的需要，本教程将逐年修订，不断优化，力求将教、学和应试三者融为一体。衷心希望本套教程能引导更多的中小学生走向热爱数学、掌握数学的成功道路。

教程的作者主要是“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的成员，有的作者是多年带领学生参加“希望杯”全国数学邀请赛，并对“希望杯”试题深有研究的数学教师。

真诚的欢迎读者指出书中不妥之处。

周国镇

2005年10月15日

注：**周国镇**　数学教育专家，《数理天地》杂志社社长兼总编；中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事，数学教育委员会主任；“希望杯”全国数学邀请赛组委会秘书长，命题委员会主任。

目　录

第一部分　基础篇

第二部分　提高篇

第一部分　基础篇

第1讲　不等式的性质

一、知识提要

1. 符号法则

$$a-b>0\Leftrightarrow a>b;$$
$$a-b=0\Leftrightarrow a=b;$$
$$a-b<0\Leftrightarrow a<b.$$

从上式可知，比较两个实数的大小，只要比较它们的差与0的大小关系即可.

2. 不等式的性质

(1) 对称性：$a>b\Leftrightarrow b<a$；

(2) 传递性：$a>b,b>c\Rightarrow a>c$；

(3) 可加性：$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$；

(4) 可乘性：$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$；

(5) 加法法则：$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$；

(6) 乘法法则：$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$；

(7) 乘方法则：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}^*)$；

(8) 开方法则：$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}^*)$.

3. 若 $a>0,b>0$,则 $\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b$;

若 $a>0,b>0$,则 $\frac{a}{b}<1 \Leftrightarrow a<b$;

若 $a<0,b<0$,则 $\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a<b$;

若 $a<0,b<0$,则 $\frac{a}{b}<1 \Leftrightarrow a>b$.

二、例题

1. 作差法

例 1 设 $x=\arcsin(\cos 1)$, $y=\arccos(\sin 2)$, $z=\arctan(\cot 3)$, $u=\operatorname{arccot}(\tan 4)$,则 x,y,z,u 从小至大按顺序排列应为 ( )

(A) x, y, z, u. (B) z, y, x, u.

(C) x, y, u, z. (D) u, x, z, y.

第 12 届(2001 年)高二培训题

解 因为 $0<1<\frac{\pi}{2}<2<3<\pi<4<\frac{3\pi}{2}$,

故 $x=\arcsin(\cos 1)=\arcsin[\sin(\frac{\pi}{2}-1)]=\frac{\pi}{2}-1$,

$y=\arccos(\sin 2)=\arccos[\cos(2-\frac{\pi}{2})]=2-\frac{\pi}{2}$,

$z=\arctan(\cot 3)=\arctan[-\tan(3-\frac{\pi}{2})]=\frac{\pi}{2}-3$,

$u=\operatorname{arccot}(\tan 4)=\operatorname{arccot}[\cot(\frac{3\pi}{2}-4)]=\frac{3\pi}{2}-4$.

作差,得 $x-y>0, y-z>0, u-x>0$.

所以 $x>y, y>z, u>x$.

故 $z<y<x<u$,选(B).

2. 作商法

例 2　设 $a>0, b>0$，且 $a\neq b, m=a^a b^b, n=a^b b^a$，则有　(　　)

(A)$m>n$.　(B)$m=n$.　(C)$m<n$.　(D)$m\geqslant n$.

解　由 $a>0, b>0$，得　$m>0$，且 $n>0$.

因为
$$\frac{m}{n}=\frac{a^a b^b}{a^b b^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}.$$

当 $a>b>0$ 时，$\frac{a}{b}>1, a-b>0$，

则有
$$\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1,$$
所以
$$m>n;$$
当 $b>a>0$ 时，$0<\frac{a}{b}<1, a-b<0$，

则有
$$\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1,$$
所以
$$m>n.$$
综上，知 $m>n$，选(A).

3. 判别式法

例 3　已知 $0\leqslant x\leqslant 1, a=\arcsin(\cos x), b=\cos(\arcsin x)$，则　(　　)

(A)$a>b$.　(B)$b>a$.　(C)$a=b$.

(D) 当 $0\leqslant x<\frac{\pi}{4}$ 时，取(A)；当$\frac{\pi}{4}<x\leqslant 1$ 时，取(B)；当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，取(C).

第 11 届(2000 年)高二培训题

解　由 $0\leqslant x\leqslant 1$，知
$$\frac{1}{2}<\cos 1\leqslant\cos x\leqslant 1, 0\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$
所以　$\frac{\pi}{6}<\arcsin(\cos x)\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\cos(\arcsin x)\leqslant 1.$

猜想:$\arcsin(\cos x) > \cos(\arcsin x)$,即　$a > b$,得

$$\cos x > \sin\sqrt{1-x^2}, \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) > \sin\sqrt{1-x^2},$$

所以 $$\frac{\pi}{2}-x > \sqrt{1-x^2},$$

即 $$2x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{4}-1>0. \qquad (*)$$

又 $$\Delta_x = 8-\pi^2<0,$$

所以(*)恒成立.

易知,当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时以上各步均可逆,

所以　$a > b$ 成立,选(A).

4. 不等式性质的应用

例 4　已知 $0<a<b, x=\sqrt{a+b}-\sqrt{b}, y=\sqrt{b}-\sqrt{b-a}$,则 x,y 的大小关系是________.

第 11 届(2000 年)高二第 1 试

解　因为　$x=\sqrt{a+b}-\sqrt{b}=\dfrac{a}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}$,

$$y=\sqrt{b}-\sqrt{b-a}=\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{b-a}}.$$

由 $0<a<b$,得　$\sqrt{a+b}>\sqrt{b-a}>0$.

由不等式性质,得　$\sqrt{a+b}+\sqrt{b}>\sqrt{b-a}+\sqrt{b}>0$.

因此,$\dfrac{a}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}<\dfrac{a}{\sqrt{b-a}+\sqrt{b}}$,即　$x<y$.

5. 利用函数单调性

例 5　已知 $x=\left(\sin\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}}, y=\left(\cos\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}}, z=\left(\sin\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}}$,则 x,y,z 的大小顺序为　(　　)

(A)$x<z<y$.　　(B)$x<y<z$.

(C)$z<y<x$.　　(D)$y<z<x$.

第 12 届(2001 年)高二培训题

解　因为 $$\frac{\pi}{6} > \frac{1}{2} > 0,$$

所以 $$0 < \sin\frac{1}{2} < \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} < \cos\frac{1}{2} < 1,$$

所以 $$\log_{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2} > 1 > \log_{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2} > 0,$$

从而有,$x < z$,$y > z$,即　$x < z < y$,

选(A).

6. 图像法

例 6　设 a,b,c 依次是方程 $\log_{\frac{1}{2}}x + 2 = x$,$\log_2(x+2) = \sqrt{-x}$,$2^x + x - 2 = 0$ 的根,则 a,b,c 的大小关系是　(　　)

(A)$b < c < a$.　　(B)$a < c < b$.

(C)$b < a < c$.　　(D)$c < b < a$.

第 5 届(1994 年)高二第 2 试

解　如图 1-1,函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}x$ 与 $y = x - 2$ 的图像交点的坐标 $a > 1$;

如图 1-2,函数 $y = \log_2(x+2)$ 与 $y = \sqrt{-x}$ 的图像交点的横坐标 $b < 0$;

如图 1-3,函数 $y = 2^x$ 与 $y = -x + 2$ 的图像交点的横坐标 $0 < c < 1$.

综上,知　$b < c < a$,选(A).

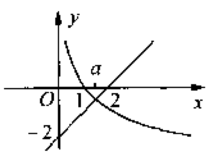

图 1-1

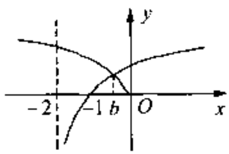

图 1-2

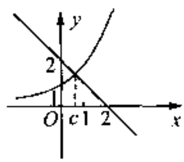

图 1-3

7. 参数问题

例 7 设 $a>b>c$, $n\in\mathbf{N}$,且 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{n}{a-c}$ 恒成立,则 n 的最大值为 ( )

(A)2. (B)3. (C)4. (D)5.

第 11 届(2000 年)高二第 1 试

解 原不等式 $\Leftrightarrow \frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\geqslant n$.

所以
$$n\leqslant\left[\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\right]_{\min},$$

而
$$\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}=2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geqslant 4,$$
且当 $2b=a+c$ 时,不等式左边的值等于 4.

所以
$$\left[\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\right]_{\min}=4.$$
因此,n 的最大值是 4,选(C).

例 8 使不等式 $\sqrt{3}+\sqrt{8}>1+\sqrt{a}$ 成立的正整数 a 的最大值是 ( )

(A)13. (B)12. (C)11. (D)10.

第 9 届(1998 年)高二第 1 试

解 将不等式两边平方并整理得
$$10+4\sqrt{6}>a+2\sqrt{a},$$
将 $a=13,12$ 依此代入验算后,可知 12 符合题意,选(B).

三、习题

1. 设 $a=\arcsin\left(\sin\frac{1}{7}\right)$, $b=\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$, $c=\arcsin\left(-\frac{1}{7}\right)$,则 a,b,c 的大小关系是 ( )