走向IMO

数学奥林匹克试题集锦(2006)

顾问 裘宗沪

2006年IMO中国国家集训队教练组 编

全国高中联赛

CMO(冬令营)

女子奥林匹克

西部奥林匹克

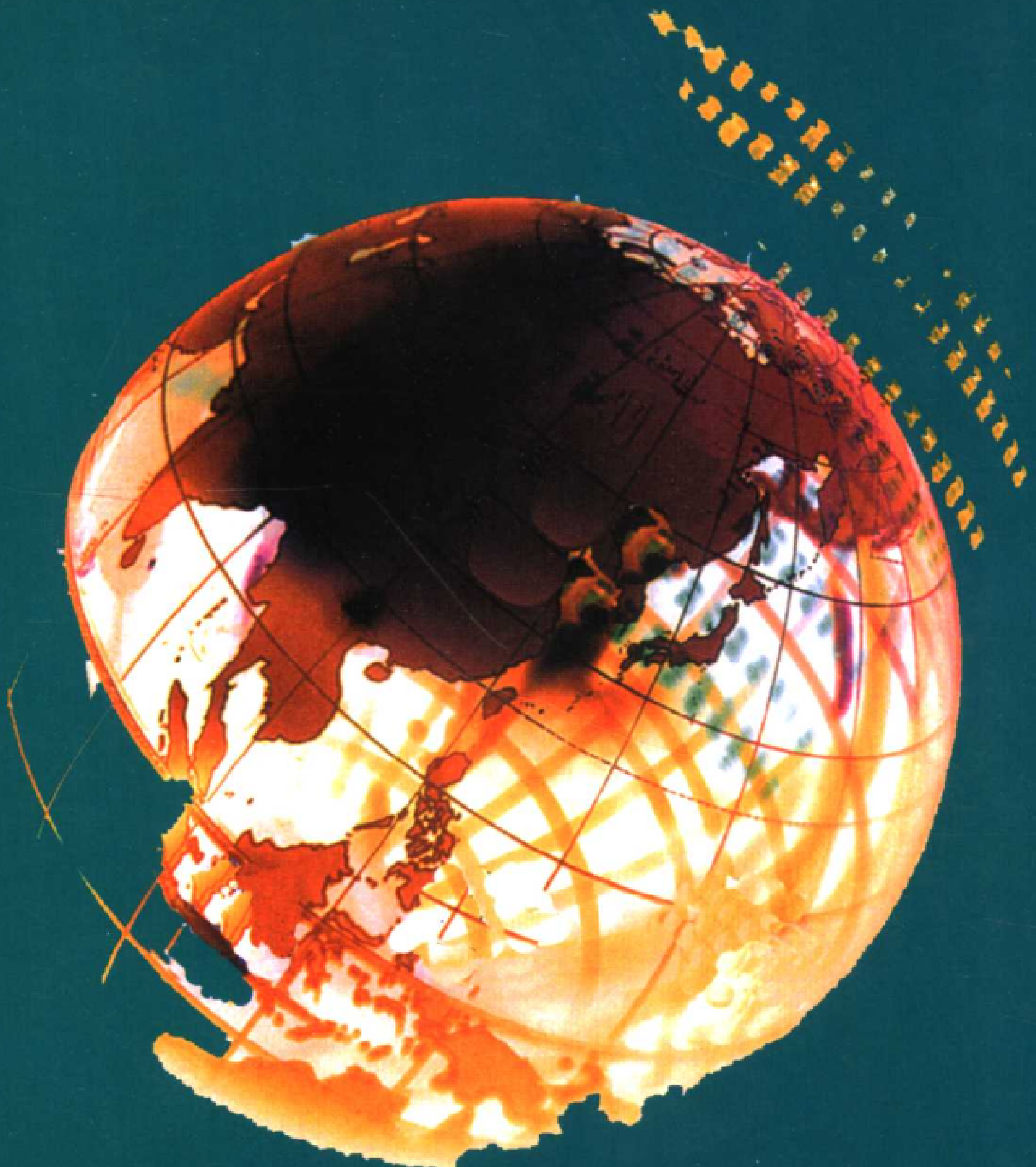
国家队集训

国家队选拔考

IMO

……

华东师范大学出版社



ISBN 7-5617-4847-7

9 787561 748473 >

定价：16.00元

走向IMO (2006)

数学奥林匹克试题集锦

2006年IMO中国国家集训队教练组 编

图书在版编目(CIP)数据

走向IMO：数学奥林匹克试题集锦：2006/2006年IMO中国国家集训队教练组编. —上海：华东师范大学出版社，2006.7
ISBN 7-5617-4847-7

Ⅰ.走… Ⅱ.2… Ⅲ.数学课-中学-试题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第084104号

走向IMO
数学奥林匹克试题集锦(2006)

编　　者　2006年IMO中国国家集训队教练组
项目编辑　倪　明
文字编辑　徐惟简
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
电　　话　021-62450163转各部　行政传真021-62572105
网　　址　www.ecnupress.com.cn　www.hdsdbook.com.cn
市 场 部　传真021-62860410　021-62602316
邮购零售　电话021-62869887　021-54340188

照 排 者　南京展望文化发展有限公司
印 刷 者　句容市排印厂
开　　本　890×1240　32开
插　　页　4
印　　张　7
字　　数　152千字
版　　次　2006年8月第一版
印　　次　2006年8月第一次
书　　号　ISBN 7-5617-4847-7/O·175
定　　价　16.00元

出 版 人　朱杰人

前　言

本书以2006年国家集训队的测试题和国家队的训练题为主体，搜集了2005年8月至2006年7月间国内主要的数学竞赛及2006年国际数学奥林匹克试题和解答，并且附上了2006年俄罗斯和美国数学奥林匹克的试题与解答.这些试题大多是从事数学奥林匹克教学和研究的专家们的精心创作，其中的一些解答源自国家集训队和国家队队员，他们的一些巧思妙解为本书增色不少.

在过去的一年中，我国中学生数学的主要赛事有2005年全国高中数学联赛(由中国数学会普及工作委员会主办)、2006年全国中学生数学冬令营(CMO)(由中国数学奥林匹克委员会主办)，以及由中国数学奥林匹克委员会主办的第4届中国女子数学奥林匹克(CGMO)和第5届中国西部数学奥林匹克(WCMO)等.在2006年国家集训队和国家队集训期间，得到了裘宗沪、王杰、潘承彪等专家们的鼓励、支持和指导，得到了吴建平先生的各方面的帮助.特别是，在国家队集训期间，叶中豪先生、陶平生教授、陈永高教授、潘承彪教授、李胜宏教授、冷岗松教授等作了专题讲座和适应性的测试，林常教授、罗炜博士等参加了CMO的命题工作，在此，对他们的支持表示衷心的感谢.

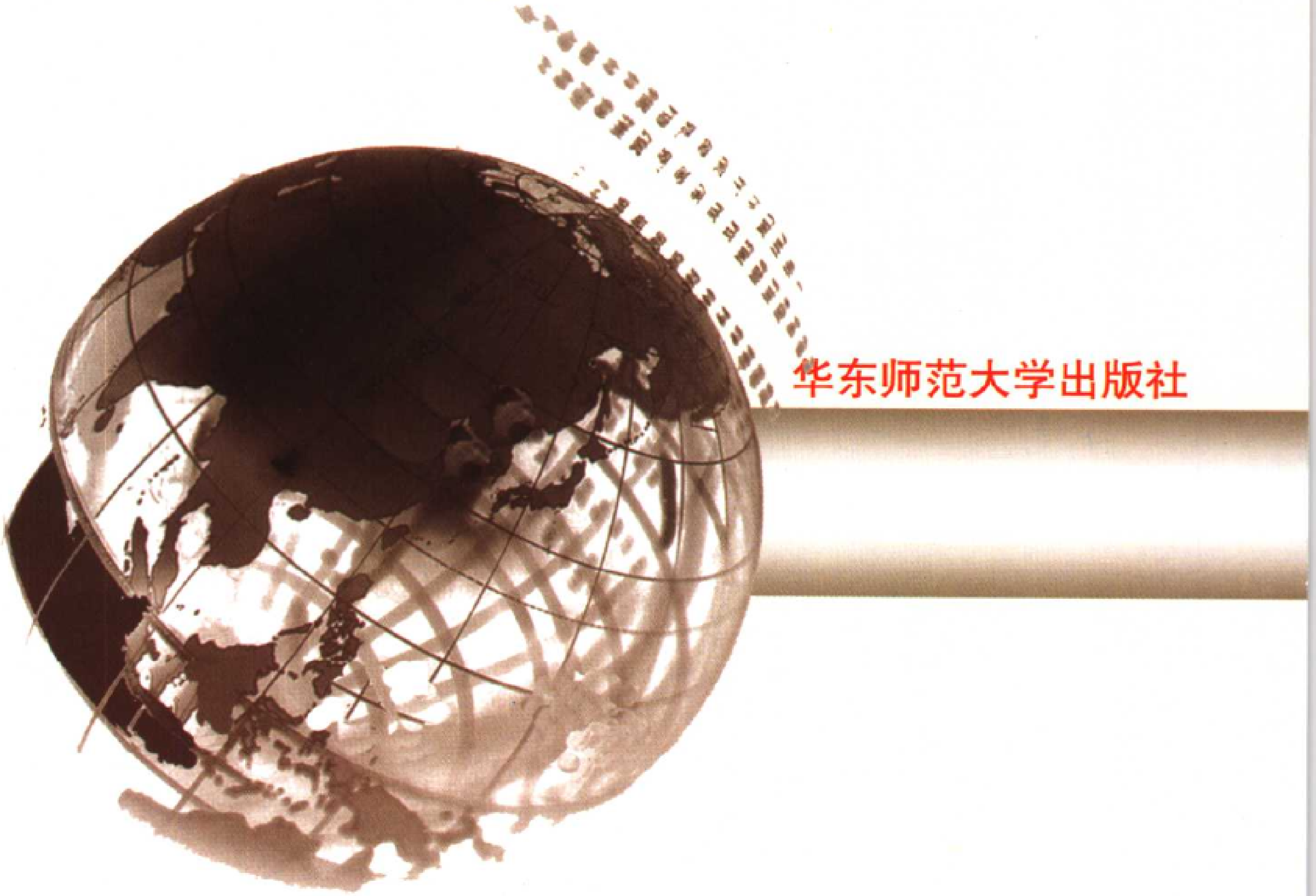
本书倾注了许多专家和学者的心血，书中有许多他们的创造性的工作.本书可供数学爱好者、参加数学竞赛的广大中学生、从事数学竞赛教学的教练员、开设数学选修课的教师参考.

2005年全国高中数学联赛和加试，以及2006年中国数学奥林匹克由熊斌整理；2005年第4届中国女子数学奥林匹克由朱华伟整理；2005年第5届中国西部数学奥林匹克由刘诗雄整理；2006年第3届中国东南地区数学奥林匹克由陶平生整理；2006年国家集训队测试题由冷岗松整理；2006年中国国家队选拔考试题由余红兵整理；2006年国家队培训题，以及2006年国际数学奥林匹克（第47届IMO）由李胜宏整理. 2006年俄罗斯数学奥林匹克由李伟固提供，2006年美国数学奥林匹克由冯志刚提供.

囿于作者的水平，加上编写时间仓促，不足和错误在所难免，请广大读者朋友批评指正，不吝指教.

2006年IMO中国国家集训队教练组

2006年7月



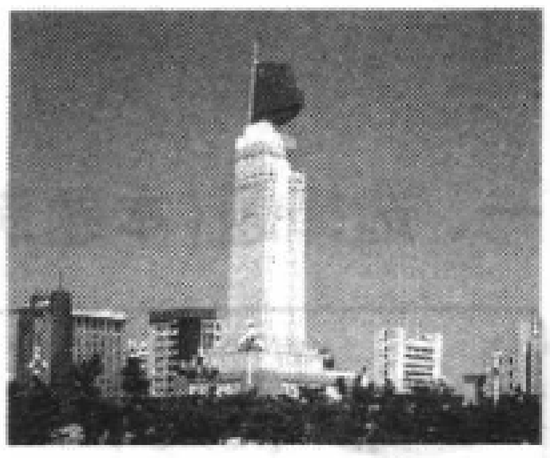
华东师范大学出版社

迎接2006年IMO中国队（团体第一名）凯旋

前排左起：柳智宇、甘文颖、任庆春、金龙、邓煜、沈才立

后排左起：周建军（清华附中）、张丽清（华中师大一附中）、张明（天津耀华中学）、吴建平（中国数学奥委会副主席）、王杰（中国数学奥委会主席）、李胜宏（领队）、冷岗松（副领队）、吴国平（镇海中学）、沈虎跃（镇海中学）、边红平（观察员，武钢三中）

目 录



2005年全国高中数学联赛

2005年全国高中数学联赛与加试由中国数学会普及工作委员会和江西省数学会负责命题.

联赛试题由6个选择题、6个填空题和3个解答题组成,满分150分.加试试题共3个大题,每题50分,共150分.各省市总分成绩居前的同学荣获一等奖(全国1 000名左右),他们具有免试直升大学的资格.

全国各省市成绩优异的同学才能获得参加次年一月份举行的中国数学奥林匹克(冬令营)的资格,因此,它是我国中学生走向IMO需要跨过的第一步.

说明:

1. 评阅试卷时,请依据本评分标准.选择题只设6分和0分两档,填空题只设9分和0分两档;其他各题的评阅,请严格按照本评分标准规定的评分档次给分,不要再增加其他中间档次.

2. 如果考生的解题方法和本解答不同,只要思路合理,步骤正确,在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分,5分为一个档次,不要再增加其他中间档次.

一、选择题(本题满分 36 分,每小题 6 分)

1 使关于 x 的不等式 $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}\geqslant k$ 有解的实数 k 的最大值是(　　).

(A) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$　　(D) $\sqrt{6}$

解 令 $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}$, $3\leqslant x\leqslant 6$, 则

$$y^2=(\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x})^2\leqslant 2[(x-3)+(6-x)]=6,$$

所以 $0<y\leqslant\sqrt{6}$,当 $x=\frac{9}{2}$时, $y=\sqrt{6}$,故 y 的最大值为$\sqrt{6}$,所以实数 k 的最大值为$\sqrt{6}$. 故选 D.

2 空间四点 A, B, C, D 满足 $|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\overrightarrow{BC}|=7$, $|\overrightarrow{CD}|=11$, $|\overrightarrow{DA}|=9$, 则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的取值(　　).

(A) 只有一个　　(B) 有两个

(C) 有四个　　(D) 有无穷多个

解 因为 $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=3^2+11^2=130=7^2+9^2=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{DA}^2$,由$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$, 得$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})$,两边平方得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$,故$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$,于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0.\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 只有一个值 0,故选 A.

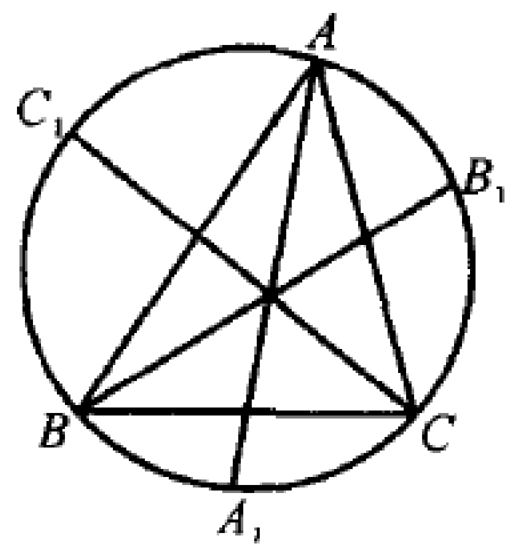
3 $\triangle ABC$内接于单位圆，三个内角A、B、C的平分线延长后分别交此圆于A_1、B_1、C_1. 则

$$\frac{AA_1\cdot\cos\frac{A}{2}+BB_1\cdot\cos\frac{B}{2}+CC_1\cdot\cos\frac{C}{2}}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

的值为（　　）.

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

解 如图，连结BA_1，则



$$AA_1=2\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)$$
$$=2\sin\left(\frac{A+B+C}{2}+\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$$
$$=2\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right).$$

所以

$$AA_1\cdot\cos\frac{A}{2}=2\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}$$
$$=\cos\frac{A+B-C}{2}+\cos\frac{A+C-B}{2}$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$$
$$=\sin C+\sin B,$$

同理
$$BB_1\cdot\cos\frac{B}{2}=\sin A+\sin C,$$
$$CC_1\cdot\cos\frac{C}{2}=\sin A+\sin B,$$

所以 $$AA_1 \cdot \cos\frac{A}{2}+BB_1 \cdot \cos\frac{B}{2}+CC_1 \cdot \cos\frac{C}{2}$$
$$=2(\sin A+\sin B+\sin C),$$

于是原式$=\dfrac{2(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin A+\sin B+\sin C}=2$，故选 A.

注 本题也可以用"特殊值"法，当三角形 ABC 是正三角形时，易知所求的值为 2.

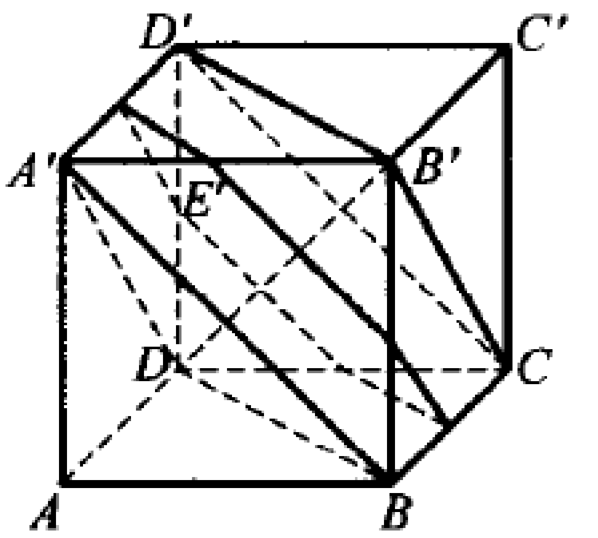
4 如图，$ABCD-A'B'C'D'$ 为正方体. 任作平面 α 与对角线 AC' 垂直，使得 α 与正方体的每个面都有公共点，记这样得到的截面多边形的面积为 S，周长为 l. 则（　　）.

(A) S 为定值，l 不为定值

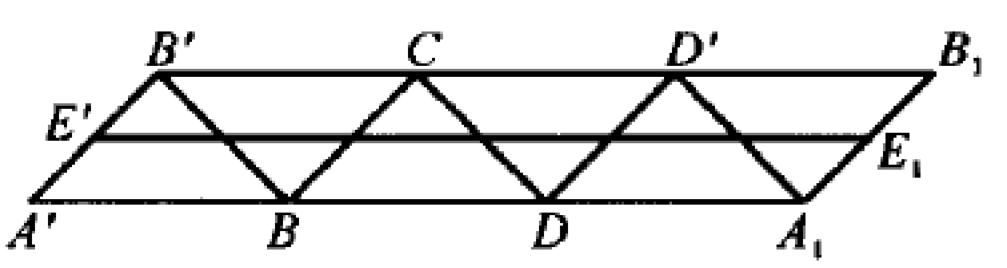
(B) S 不为定值，l 为定值

(C) S 与 l 均为定值

(D) S 与 l 均不为定值



解 将正方体切去两个正三棱锥 $A-A'BD$ 与 $C'-D'B'C$ 后，得到一个以平行平面 $A'BD$ 与 $D'B'C$ 为上、下底面的几何体 V，V 的每个侧面都是等腰直角三角形，截面多边形 W 的每一条边分别与 V 的底面上的一条边平行，将 V 的侧面沿棱 $A'B'$ 剪开，展平在一张平面上，得到一个 $\square A'B'B_1A_1$，而多边形 W 的周界展开后便成为一条与 $A'A_1$ 平行的线段（如图中 $E'E_1$），显然 $E'E_1=A'A_1$，故 l 为定值.



当 E' 位于 $A'B'$ 中点时，多边形 W 为正六边形，而当 E' 移至 A' 处时，W 为正三角形，易知周长为定值 l 的正六边形与正三角形面

积分别为$\frac{\sqrt{3}}{24}l^2$与$\frac{\sqrt{3}}{36}l^2$,故 S 不为定值. 故选 B.

5 方程 $\frac{x^2}{\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3}}+\frac{y^2}{\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}}=1$ 表示的曲线是 ( ).

(A) 焦点在 x 轴上的椭圆 (B) 焦点在 x 轴上的双曲线

(C) 焦点在 y 轴上的椭圆 (D) 焦点在 y 轴上的双曲线

解 因为 $\sqrt{2}+\sqrt{3}>\pi$，所以 $0<\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}<\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$，故 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)>\cos\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$，即 $\sin\sqrt{2}>\sin\sqrt{3}$.

又 $0<\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\sqrt{3}<\pi$，所以 $\cos\sqrt{2}>0$，$\cos\sqrt{3}<0$，故 $\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}>0$，方程表示的曲线是椭圆.

因为

$$(\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3})-(\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3})$$

$$=2\sqrt{2}\sin\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4}\right), \tag{$*$}$$

而 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}<0$，所以 $\sin\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}<0$，$\frac{\pi}{2}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}<\frac{3\pi}{4}$，故 $\frac{3\pi}{4}<\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4}<\pi$.

所以 $\sin\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$，于是($*$)式 <0.

即 $\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3}<\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}$，所以曲线表示焦点在 y 轴

上的椭圆，故选 C.

6 记集合 $T=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，$M=\left\{\frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}+\frac{a_3}{7^3}+\frac{a_4}{7^4}\middle|a_i\in T,i=1,2,3,4\right\}$，将 M 中的元素按从大到小的顺序排列，则第 2 005 个数是(　　).

(A) $\frac{5}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{3}{7^4}$　　(B) $\frac{5}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{2}{7^4}$

(C) $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{4}{7^4}$　　(D) $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{3}{7^4}$

解　用$[a_1a_2\cdots a_k]_p$ 表示 k 位 p 进制数，将集合 M 中的每个数乘以 7^4，得

$$M'=\{a_1\cdot 7^3+a_2\cdot 7^2+a_3\cdot 7+a_4\,|\,a_i\in T,i=1,2,3,4\}$$
$$=\{[a_1a_2a_3a_4]_7\,|\,a_i\in T,i=1,2,3,4\}.$$

M'中的最大数为$[6\ 666]_7=[2\ 400]_{10}$.

在十进制数中，从 2 400 起从大到小顺序排列的第 2 005 个数是 $2\ 400-2\ 004=396$. 而 $[396]_{10}=[1\ 104]_7$，将此数除以 7^4，便得 M 中的数是 $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{4}{7^4}$. 故选 C.

二、填空题(本题满分 54 分，每小题 9 分)

7 将关于 x 的多项式 $f(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{19}+x^{20}$表为关于 y 的多项式 $g(y)=a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{19}y^{19}+a_{20}y^{20}$，其中 $y=x-4$. 则 $a_0+a_1+\cdots+a_{20}=$________.

解 由题设知，$f(x)$ 和式中的各项构成首项为 1，公比为 $-x$ 的等比数列，由等比数列的求和公式，得 $f(x)=\frac{(-x)^{21}-1}{-x-1}=\frac{x^{21}+1}{x+1}$.

令 $x=y+4$，得 $g(y)=\frac{(y+4)^{21}+1}{y+5}$，取 $y=1$，有 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}=g(1)=\frac{5^{21}+1}{6}$.

8 已知 $f(x)$ 是定义在$(0,+\infty)$上的减函数，若 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-4a+1)$ 成立，则 a 的取值范围是________.

解 因为 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上定义，由

$$\begin{cases}2a^2+a+1=2\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0,\\3a^2-4a+1>0,\end{cases}$$

得
$$a>1\text{ 或 }a<\frac{1}{3}. \qquad ①$$

因为 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上是减函数，所以 $2a^2+a+1>3a^2-4a+1$，解得 $0<a<5$，结合①知，$0<a<\frac{1}{3}$ 或 $1<a<5$.

9 设 α,β,γ 满足 $0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$，若对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)=0$，则 $\gamma-\alpha=$ ________.

解 设 $f(x)=\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)$，由 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\equiv0$，知

$$f(-\alpha)=0,\ f(-\beta)=0,\ f(-\gamma)=0,$$

即

$$\cos(\beta-\alpha)+\cos(\gamma-\alpha)=-1,$$

$$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\gamma-\beta)=-1,$$

$$\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\gamma)=-1.$$

所以 $\cos(\beta-\alpha)=\cos(\gamma-\beta)=\cos(\gamma-\alpha)=-\dfrac{1}{2}$.

因为 $0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$，所以 $\beta-\alpha,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\beta\in\left\{\dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}\right\}$，又 $\beta-\alpha<\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta<\gamma-\alpha$. 只有 $\beta-\alpha=\gamma-\beta=\dfrac{2\pi}{3}$. 所以 $\gamma-\alpha=\dfrac{4\pi}{3}$.

另一方面，当 $\beta-\alpha=\gamma-\beta=\dfrac{2\pi}{3}$，有 $\beta=\alpha+\dfrac{2\pi}{3}$，$\gamma=\alpha+\dfrac{4\pi}{3}$，对任意实数 x，记 $x+\alpha=\theta$，由于三点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\left(\cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right),\ \sin\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$，$\left(\cos\left(\theta+\dfrac{4\pi}{3}\right),\ \sin\left(\theta+\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)$ 构成单位圆 $x^2+y^2=1$ 上正三角形的三个顶点. 其中心位于原点，显然有

$$\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

即 $\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)=0.$

10 如图，四面体 $DABC$ 的体积为 $\dfrac{1}{6}$，且满足 $\angle ACB=45°$，$AD+BC+\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=3$，则 $CD=$________.