

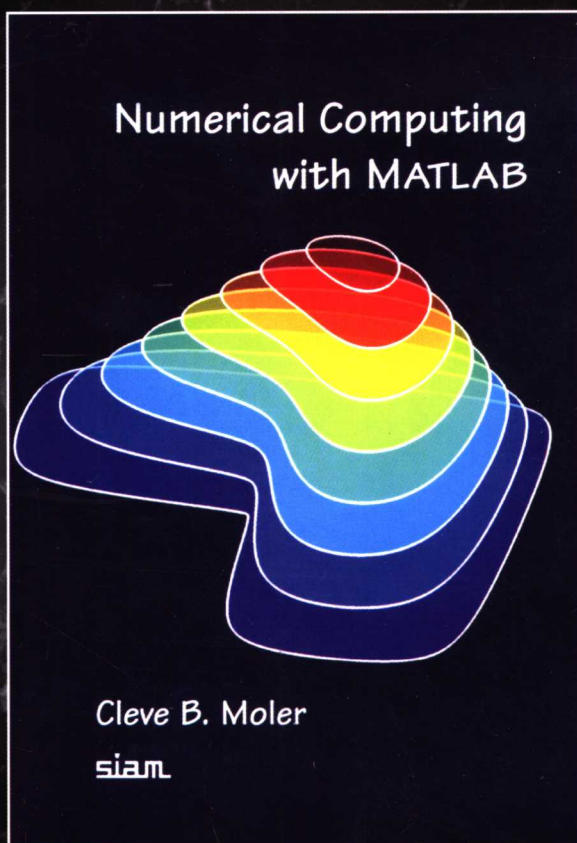
siam

计 算 机 科 学 丛 书

MATLAB

数值计算

(美) Cleve B. Moler 著 喻文健 译



Numerical Computing with MATLAB



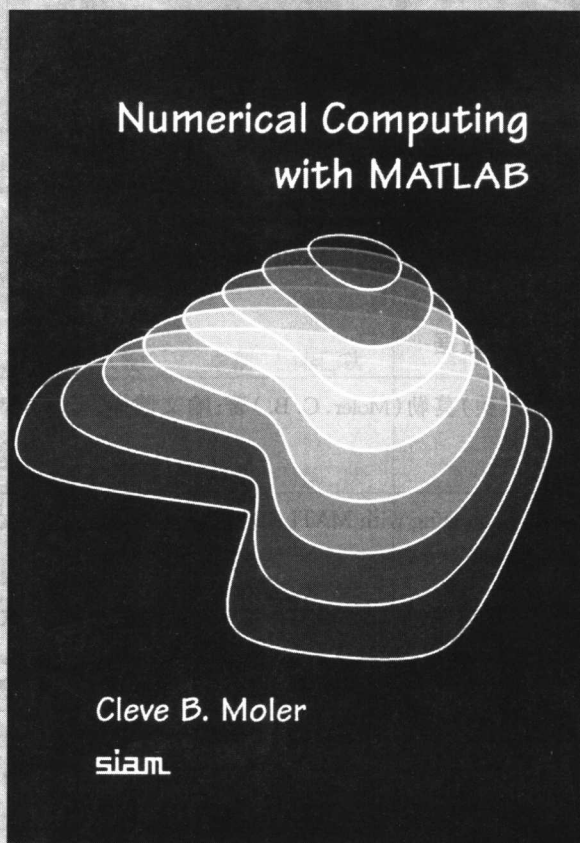
机械工业出版社
China Machine Press

计 算 机 科 学 丛 书

MATLAB

数值计算

(美) Cleve B. Moler 著 喻文健 译



**Numerical Computing
with MATLAB**



机械工业出版社
China Machine Press

本书是关于数值方法、MATLAB 软件和工程计算的教材,着重介绍数学软件的熟练使用及其内在的高效率算法。主要内容包括:MATLAB 介绍、线性方程组、插值、方程求根、最小二乘法、数值积分、常微分方程、傅里叶分析、随机数、特征值与奇异值、偏微分方程。本书配备大量 MATLAB 例子源代码及习题,其中涉及密码学、Google 网页分级、大气科学和图像处理等前沿问题,可以帮助读者快速掌握数学函数的正确使用及 MATLAB 编程技巧。

本书适合作为高年级本科生或研究生的教材,也可供相关科研人员参考。

Cleve B. Moler: *Numerical Computing with MATLAB* (ISBN 0-89871-560-1)

Copyright © 2004 by Society for Industrial and Applied Mathematics.

Published by China Machine Press with permission.

Chinese edition copyright © 2006 by China Machine Press.

本书中文简体字版由美国 Society for Industrial and Applied Mathematics 授权机械工业出版社独家出版。未经出版者书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书内容。

版权所有,侵权必究。

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

本书版权登记号:图字:01-2005-4692

图书在版编目(CIP)数据

MATLAB 数值计算/(美)莫勒(Moler, C. B.)著;喻文健译. - 北京:机械工业出版社, 2006.6

(计算机科学丛书)

书名原文: Numerical Computing with MATLAB

ISBN 7-111-18737-7

I. M… II. ①莫… ②喻… III. 数值计算-计算机辅助计算-软件包, MATLAB
IV. ①TP391. 75 ②0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 030361 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:耿 娅 乔翠梅

北京京北制版印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2006 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·18.25 印张

定价:35.00 元

凡购本书,如有倒页、脱页、缺页,由本社发行部调换

本社购书热线:(010)68326294

出版者的话

文艺复兴以降，源远流长的科学精神和逐步形成的学术规范，使西方国家在自然科学的各个领域中取得了垄断性的优势；也正是这样的传统，使美国在信息技术发展的六十多年间名家辈出、独领风骚。在商业化的进程中，美国的产业界与教育界越来越紧密地结合，计算机学科中的许多泰山北斗同时身处科研和教学的最前线，由此而产生的经典科学著作，不仅肇划了研究的范畴，还揭橥了学术的源变，既遵循学术规范，又自有学者个性，其价值并不会因年月的流逝而减退。

近年，在全球信息化大潮的推动下，我国的计算机产业发展迅猛，对专业人才的需求日益迫切。这对计算机教育界和出版界都既是机遇，也是挑战；而专业教材的建设在教育战略上显得举足轻重。在我国信息技术发展时间较短、从业人员较少的现状下，美国等发达国家在其计算机科学发展的几十年间积淀的经典教材仍有许多值得借鉴之处。因此，引进一批国外优秀计算机教材将对我国计算机教育事业的发展起积极的推动作用，也是与世界接轨、建设真正的世界一流大学的必由之路。

机械工业出版社华章图文信息有限公司较早意识到“出版要为教育服务”。自1998年开始，华章公司就将工作重点放在了遴选、移译国外优秀教材上。经过几年的不懈努力，我们与Prentice Hall, Addison-Wesley, McGraw-Hill, Morgan Kaufmann等世界著名出版公司建立了良好的合作关系，从它们现有的数百种教材中甄选出Tanenbaum, Stroustrup, Kernighan, Jim Gray等大师名家的一批经典作品，以“计算机科学丛书”为总称出版，供读者学习、研究及度藏。大理石纹理的封面，也正体现了这套丛书的品位和格调。

“计算机科学丛书”的出版工作得到了国内外学者的鼎力襄助，国内的专家不仅提供了中肯的选题指导，还不辞劳苦地担任了翻译和审校的工作；而原书的作者也相当关注其作品在中国的传播，有的还专程为其书的中译本作序。迄今，“计算机科学丛书”已经出版了近百个品种，这些书籍在读者中树立了良好的口碑，并被许多高校采用为正式教材和参考书籍，为进一步推广与发展打下了坚实的基础。

随着学科建设的初步完善和教材改革的逐渐深化，教育界对国外计算机教材的需求和应用都步入一个新的阶段。为此，华章公司将加大引进教材的力度，在“华章教育”的总规划之下出版三个系列的计算机教材：除“计算机科学丛书”之外，对影印版的教材，则单独开辟出“经典原版书库”；同时，引进全美通行的教学辅导书“Schaum's Outlines”系列组成“全美经典学习指导系列”。为了保证这三套丛书的权威性，同时也为了更好地为学校和老师服务，华章公司聘请了中国科学院、北京大学、清华大学、国防科技大学、复旦大学、上海交通大学、南京大学、浙江大学、中国科技大学、哈尔滨工业大学、西安交通大学、中国人民大学、北京航空航天大学、北京邮电大学、中山大学、解放军理工大学、郑州大学、湖北工学院、中国国家信息安全测评认证中心等国内重点大学和科研机构在计算机的各个领域的著名学者组成“专家指导委员会”，为我们提供选题意见和出版监督。

这三套丛书是响应教育部提出的使用外版教材的号召，为国内高校的计算机及相关专业

的教学度身订造的。其中许多教材均已为M. I. T., Stanford, U.C. Berkeley, C. M. U. 等世界名牌大学所采用。不仅涵盖了程序设计、数据结构、操作系统、计算机体系结构、数据库、编译原理、软件工程、图形学、通信与网络、离散数学等国内大学计算机专业普遍开设的核心课程,而且各具特色——有的出自语言设计者之手、有的历经三十年而不衰、有的已被全世界的几百所高校采用。在这些圆熟通博的名师大作的指引之下,读者必将在计算机科学的宫殿中由登堂而入室。

权威的作者、经典的教材、一流的译者、严格的审校、精细的编辑,这些因素使我们的图书有了质量的保证,但我们的目标是尽善尽美,而反馈的意见正是我们达到这一终极目标的重要帮助。教材的出版只是我们的后续服务的起点。华章公司欢迎老师和读者对我们的工作提出建议或给予指正,我们的联系方式如下:

电子邮件: hzjsj@hzbook.com

联系电话: (010) 68995264

联系地址: 北京市西城区百万庄南街1号

邮政编码: 100037

专家指导委员会

(按姓氏笔画顺序)

尤晋元
石教英
张立昂
邵维忠
周克定
郑国梁
高传善
裘宗燕

王 珊
吕 建
李伟琴
陆丽娜
周傲英
施伯乐
梅 宏
戴 葵

冯博琴
孙玉芳
李师贤
陆鑫达
孟小峰
钟玉琢
程 旭

史忠植
吴世忠
李建中
陈向群
岳丽华
唐世渭
程时端

史美林
吴时霖
杨冬青
周伯生
范 明
袁崇义
谢希仁

译者序

数值计算，也称为科学计算 (scientific computing)，已成为当今科学研究的三种基本手段之一。它是计算数学、计算机科学和其他工程学科相结合的产物，并随着计算机的普及和各门类科学技术的迅速发展日益受到人们的重视。发达国家普遍比较重视数值计算在科学与工程中的研究和应用，甚至将其作为衡量国家综合实力的一个重要方面。近年来，科学技术逐渐发展进入到纳米时代，新技术、高科技领域产生出大量高复杂度计算问题，更使得对数值计算的重视达到空前的程度。

国内外现有的数值计算和数值分析的教材很多，本书就是其中非常出色的一本。它不像一般的教材那样主要进行原理性的介绍，而更多着重于介绍数学软件的熟练使用及其内在的高效率算法。同时，书中的应用实例涉及密码学、Google 网页分级、大气科学和图像处理等科技前沿问题，这使得它不同于一般的数值分析教材，更适合于高年级本科生、研究生以及相关科研人员学习和参考。

与国内外同类教材相比，本书最大的特色包括：

1. 权威作者。作者 Cleve Moler 博士，是出品 MATLAB 软件的美国 Math Works 公司的创办人，现任公司首席科学家兼董事长。他曾在美国著名大学担任教授达 20 年之久，并撰写过三本有关数值计算的书籍。作者与 MATLAB 软件的深厚渊源及其学术背景保证了本书内容的权威性，书中不少内容是有关数值计算的难得资料。

2. 内容生动。这是一本关于数值方法、MATLAB 和工程计算的生动教材，它包含大量的图片和例子。同时，附带的程序包中还有交互式图形演示程序，因此特别有助于读者充分学习、理解各种数值方法，并考察它们的优缺点。

3. 实用性强。本书基于 MATLAB，主要讲解工程实际中最有用的数值算法。随书还配备了 70 多个 MATLAB 例程的源代码以及 200 多道练习题。读者通过编程练习，不但可以很好地理解一些理论知识，还能够掌握 MATLAB 中数学函数的正确使用以及 MATLAB 编程技巧。

4. 结构新颖。“数值分析”是理工科大学的一门重要的专业基础课程，国内现行的教材多是 20 世纪 80 年代编写的，内容相对陈旧。而今，数学软件的使用已非常普遍，本书将 MATLAB 软件与传统的“数值分析”教学内容进行了很好的结合，非常具有借鉴意义。此外，本书对应的网站 www.mathworks.com/moler 还免费提供电子课件的下载。

美国 SIAM (工业与应用数学学会) 是数值计算方面的权威学术组织，出版了大量有关书籍和顶级学术刊物。机械工业出版社从 SIAM 引进这本 2004 年的新书是一件非常有意义的事情，希望本书的出版对推动国内数值计算类课程的建设有所助益。

在本书的翻译过程中，邹轶、王峰、陈志东、曾姗参加了部分章节的翻译工作，张梦生对部分书稿进行了仔细校对，在此对他们的辛勤劳动表示感谢。在翻译本书的过程中，我们力求忠实、准确地反映原著的风格和内容。对于某些没有确定中文译法的术语，按我们自己的理解进行了翻译，并在书后附上中英文术语对照表。鉴于译者水平和时间所限，难免会有错误和不足之处，敬请广大读者不吝指正。

喻文健

2006 年 3 月 1 日

于北京 清华园

前 言

本书是一本关于数值方法、MATLAB 软件和工程计算的介绍性课程的教材，特点是突出了数学软件的广泛应用。通过本书，希望读者能充分学习 MATLAB 中的数学函数，正确使用它们，了解它们的局限性，并在必要时根据需要加以修改。本书主要内容包括：

- MATLAB 介绍
- 线性方程组
- 插值
- 方程求根
- 最小二乘法
- 数值积分
- 常微分方程
- 傅里叶分析
- 随机数
- 特征值与奇异值
- 偏微分方程

上世纪 60 年代后期，George Forsythe 首先在美国斯坦福大学开创了基于软件的数值方法课程。Forsythe、Malcolm 和 Moler 三人合写的教材 [20]，以及后来 Kahaner、Moler 和 Nash 合写的教材 [33] 均起源于斯坦福大学的这门课程，同时基于 Fortran 语言编写的程序库。

本书基于 MATLAB，且包括 NCM：一个超过 70 个 M 文件的程序包构成了本书的基本部分。书中的 200 多道习题包括不少需要修改和扩展 NCM 中的程序。本书还大量使用计算机图形，包括对数值算法的交互式图形展示。

阅读本书或选修对应课程的先决条件为：

- 学过微积分。
- 了解些常微分方程知识。
- 了解些矩阵知识。
- 具有一定的计算机编程经验。

对于以前从未用过 MATLAB 的读者，本书第 1 章将有助于初学者从头开始学习。对于已经比较熟悉 MATLAB 的读者，可以快速浏览第 1 章的大部分内容，但建议所有人都阅读其中关于浮点运算的一节。

对于一个学期的课程，本书内容可能偏多。建议教师讲授前面几章的全部内容，并选讲最后四章中感兴趣的内容。

在阅读本书的过程中，请确保在自己的计算机中或所在的网络中装有 NCM 程序包，它可通过本书的网站免费获得[⊖]：

<http://www.mathworks.com/moler>

其中有三种格式的 NCM 文件：

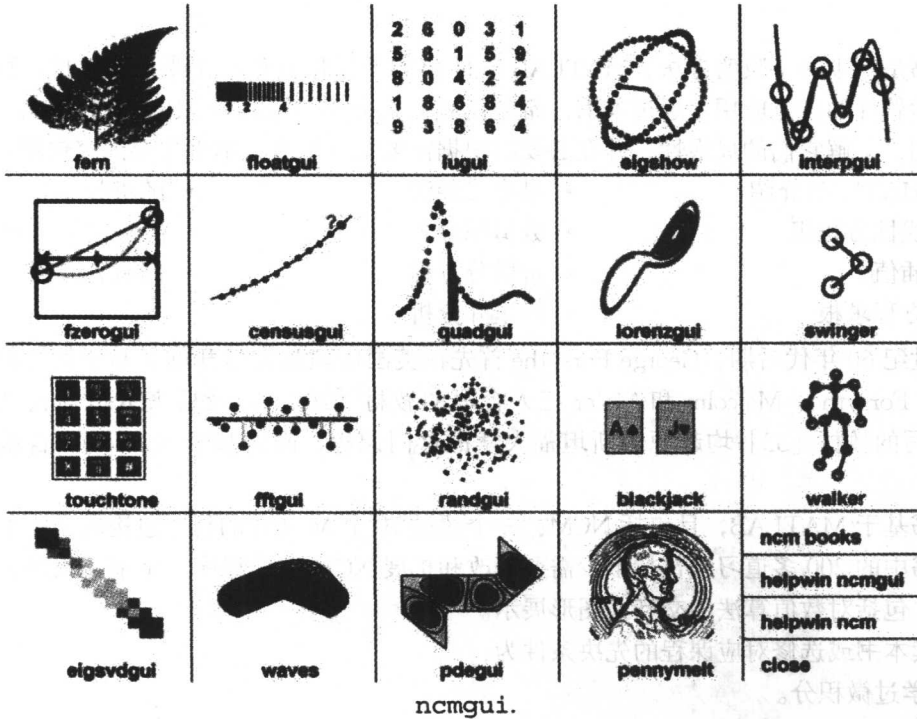
- gui 文件：交互式的图形演示。
- tx 文件：本书包含的 MATLAB 内部函数的实现。
- 其他：其他各种文件，主要是和习题相关的。

⊖ 也可登录华章网站下载，网址为：www.hzbook.com。

在获得 NCM 程序包之后，在 MATLAB 中执行

```
ncmgui
```

即生成下图。其中，每个小图实际上是一个按钮，点击后启动相应的 gui。



如果没有 The MathWorks 公司和 SIAM 的员工帮助，本书不可能完成。这两个团队中的人都很敬业、有创造力，也乐于合作，他们对本书给予了特别的支持。在许多做出了贡献的朋友和同事中，我特别要介绍其中的五位。Kathryn Ann Moler 多次在斯坦福大学的课程中使用本书的早期版本，并且给了我很多中肯的意见。Tim Davis 和 Charlie Van Loan 审阅了本书，提出了特别好的建议。Lisl Urban 为本书做了完美的编辑工作。我的妻子 Patsy 和我的笔记本电脑一起陪着我工作，并一直深爱着我。感谢所有人！

Cleve Moler

2004 年 3 月 28 日

目 录

出版者的话	
专家指导委员会	
译者序	
前言	
第 1 章 MATLAB 介绍	1
1.1 黄金分割比	1
1.2 斐波那契数	6
1.3 分形蕨	11
1.4 幻方	15
1.5 密码系统	22
1.6 $3n+1$ 序列	26
1.7 浮点算术	29
1.8 更多阅读资料	35
习题	35
第 2 章 线性方程组	45
2.1 求解线性方程组	45
2.2 MATLAB 反斜线符号算符	45
2.3 一个 3×3 例子	46
2.4 排列和三角形矩阵	47
2.5 LU 分解	48
2.6 为什么必须选主元	49
2.7 <code>lutx</code> , <code>bslashtx</code> , <code>lugui</code>	51
2.8 舍入误差的影响	53
2.9 范数和条件数	55
2.10 稀疏矩阵和带状矩阵	60
2.11 PageRank 和马尔可夫链	62
2.12 更多阅读资料	68
习题	69
第 3 章 插值	79
3.1 插值多项式	79
3.2 分段线性插值	83
3.3 分段三次埃米特插值	84
3.4 保形分段三次插值	85
3.5 三次样条	86
3.6 <code>pchiptx</code> , <code>splinetx</code>	90
3.7 <code>interpGUI</code>	92
习题	93
第 4 章 方程求根	101
4.1 二分法	101
4.2 牛顿法	102
4.3 一个不正常的例子	104
4.4 割线法	105
4.5 逆二次插值	106
4.6 Zeroin 算法	106
4.7 <code>fzerotx</code> , <code>feval</code>	107
4.8 <code>fzerogui</code>	111
4.9 寻找函数为某个值的解和反向插值	114
4.10 最优化和 <code>fmintx</code>	114
习题	116
第 5 章 最小二乘法	121
5.1 模型和曲线拟合	121
5.2 范数	122
5.3 <code>censusgui</code>	123
5.4 Householder 反射	124
5.5 QR 分解	126
5.6 伪逆	129
5.7 不满秩	130
5.8 可分离最小二乘法	133
5.9 更多阅读资料	135
习题	135
第 6 章 数值积分	141
6.1 自适应数值积分	141
6.2 基本的数值积分公式	142
6.3 <code>quadtx</code> , <code>quadgui</code>	144
6.4 指定被积函数	145
6.5 性能	147
6.6 积分离散数据	149
6.7 更多阅读资料	151
习题	151

第 7 章 常微分方程	159	9.1 伪随机数	217
7.1 微分方程求积	159	9.2 均匀分布	217
7.2 方程体系	159	9.3 正态分布	220
7.3 线性化的微分方程	161	9.4 randtx, randntx	222
7.4 单步法	162	习题	223
7.5 BS23 算法	164	第 10 章 特征值与奇异值	227
7.6 ode23tx	166	10.1 特征值与奇异值分解	227
7.7 实例	169	10.2 一个简单例子	229
7.8 洛伦茨吸引子	171	10.3 eigshow	230
7.9 刚性	173	10.4 特征多项式	232
7.10 事件	177	10.5 对称矩阵和厄密特矩阵	233
7.11 多步法	180	10.6 特征值的敏感度和精度	233
7.12 MATLAB ODE 求解程序	180	10.7 奇异值的敏感度和精度	237
7.13 误差	181	10.8 约当型和舒尔型	238
7.14 性能	184	10.9 QR 算法	240
7.15 更多阅读资料	185	10.10 eigsvdgui	241
习题	185	10.11 主分量	243
第 8 章 傅里叶分析	201	10.12 圆生成器	246
8.1 按键式拨号盘	201	10.13 更多阅读	250
8.2 离散傅里叶变换	204	习题	250
8.3 fftgui	205	第 11 章 偏微分方程	257
8.4 太阳黑子	208	11.1 模型问题	257
8.5 周期时间序列	210	11.2 有限差分法	257
8.6 快速离散傅里叶变换	211	11.3 矩阵表示	259
8.7 ffttx	212	11.4 数值稳定性	261
8.8 傅里叶矩阵	213	11.5 L 形区域	262
8.9 其他傅里叶变换和级数	214	习题	266
8.10 更多阅读资料	215	参考文献	273
习题	215	索引	277
第 9 章 随机数	217		

第 1 章 MATLAB 介绍

本书包括两个方面的内容，即 MATLAB 软件和数值计算。本章主要研究几个比较基本、但很有趣的数学问题，通过解决它们的 MATLAB 程序来介绍 MATLAB 软件。对于有编程经验的读者，可以通过简单分析这些程序了解 MATLAB 是如何工作的。

如果需要更详细的介绍，可参考 The MathWorks 公司的在线帮助手册。在 MATLAB 命令窗口顶上的工具栏中选择 **Help**，然后点击 **MATLAB Help**，在打开的新窗口中再点击“**Getting Started**”文字。通过点击文字“**Printable versions**”还能得到 PDF 版本的帮助手册，这个手册也可通过访问 The MathWorks 公司的网站获得[42]。The MathWorks 公司制作的许多其他文档手册也可通过上述的联机方式或网站得到。

我们可通过[43]获得一个文献列表，它包含 600 多种、其他作者出版的、多种语言的基于 MATLAB 的书籍。其中有三本介绍 MATLAB 的书特别值得注意：一本是由 Sigmon 和 Davis 写的篇幅较短的入门级读物[52]，一本是 Higham 和 Higham 写的篇幅中等的、数学味较浓的教材[30]，一本是 Hanselman 和 Littlefield 写的篇幅较长的详细手册[28]。

在阅读本书时，建议安装好一套 MATLAB 软件，以便在读到例子程序时能方便地运行它们。本书用到的所有程序均集中在下面这个目录或文件夹里

NCM

(目录名实际上就是本书英文名字的缩写)。我们可在这个目录下启动 MATLAB，或使用命令

```
pathtool
```

将这个目录加到 MATLAB 默认路径中。

1.1 黄金分割比

什么是世界上最有趣的数字？可能有人会想到 π 、 e 、17，等等。一些人也许会推荐黄金分割比 (golden ratio) ϕ ，下面用我们的第一条 MATLAB 命令计算这个数。

```
phi = (1 + sqrt(5))/2
```

得到下面的结果

```
phi =  
1.6180
```

可通过下面几条命令显示更多的数字位数。

```
format long  
phi  
  
phi =  
1.61803398874989
```

这并没有重新计算 ϕ ，只是把显示数字的有效位由 5 位变到 15 位。

黄金分割比见于数学的许多方面，本书将举几个例子。黄金分割比得名于“黄金矩形”，如图 1-1 所示。“黄金矩形”的主要特点是将它裁去一个正方形后，剩下的小矩形仍保持原来大矩形的形状。

两个矩形长宽比的相等关系给出了 ϕ 的定义公式：

$$\frac{1}{\phi} = \frac{\phi - 1}{1}$$

这个公式表明，可通过将 ϕ 减去 1 得到它的倒数。还有哪些数有这样的特性呢？

将上述关于长宽比的等式两边都乘以 ϕ ，得到多项式方程

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

该方程的根可通过二次求根公式得到：

$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

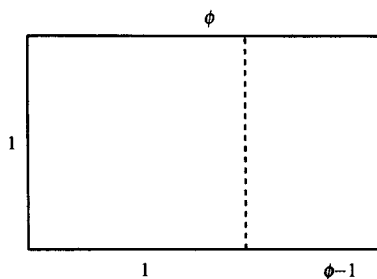


图 1-1 黄金矩形

2 其中正数根就是黄金分割比。

如果我们忘记了二次求根公式，可以用 MATLAB 来求多项式方程的根。在 MATLAB 中，一个多项式用它的降序排列的系数组成的向量来表示。因此，向量

$$p = [1 \ -1 \ -1]$$

代表多项式

$$p(x) = x^2 - x - 1$$

它的根可通过函数 `roots` 求得。

$$r = \text{roots}(p)$$

输出结果为

$$r = \begin{bmatrix} -0.61803398874989 \\ 1.61803398874989 \end{bmatrix}$$

这两个数就是满足倒数等于自身减 1 的所有数了。

MATLAB 中的符号工具箱连接着 MATLAB 和 Maple，我们也可以用它来求解长宽比方程，而不需转化为多项式。方程用一个字符串表示，`solve` 函数可求得它的两个解。

$$r = \text{solve}('1/x = x-1')$$

输出结果为

$$r = \begin{bmatrix} 1/2*5^{(1/2)}+1/2 \\ 1/2-1/2*5^{(1/2)} \end{bmatrix}$$

函数 `pretty` 能按类似正常排版的方式显示结果。

$$\text{pretty}(r)$$

输出结果为

$$\begin{bmatrix} 1/2 & & \\ [1/2 \ 5 & + & 1/2] \\ & & \\ & & 1/2] \\ [1/2 - 1/2 \ 5 & &] \end{bmatrix}$$

变量 r 是含两个分量的向量, 且分量为解的数学符号形式。我们可通过下面的命令得到第一个分量

```
phi = r(1)
```

它的输出结果为

```
phi =
1/2*5^(1/2)+1/2
```

3

这个表达式可通过两种方式转化为数值。一种方式是, 用可变精度算术函数 `vpa`, 得到任意位数字的表达式。

```
vpa(phi, 50)
```

计算出 50 位有效数字。

```
1.6180339887498948482045868343656381177203091798058
```

另一种方式就是, 用 `double` 函数将其转换为双精度浮点数(float point), 这是 MATLAB 中表示数的主要方式。

```
phi = double(phi)
```

输出结果为

```
phi =
1.61803398874989
```

这个长宽比方程非常简单, 可以用解析公式来表示准确的解, 而更多复杂的方程只能近似地求解。MATLAB 中的 `inline` 函数可方便地把一个字符串表示的函数转换为对象数据, 然后这个函数就可作为参数, 提供给其他的函数加以处理。

```
f = inline('1/x - (x-1)');
```

定义了函数 $f(x) = 1/x - (x-1)$, 其输出显示为

```
f =
Inline function:
f(x) = 1/x - (x-1)
```

在自变量区间 $0 \leq x \leq 4$ 上, $f(x)$ 的函数曲线示于图 1-2, 它由下述命令得到

```
ezplot(f, 0, 4)
```

命令名 `ezplot` 的意思是“轻松绘图”(easy plot), 但一些英语语种国家的人可能会读成“e-zed plot”。虽然当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的值为无限大, 但 `ezplot` 会自动选择一个合适的纵轴坐标。

命令

```
phi = fzero(f, 1)
```

在 $x=1$ 附近寻找函数 $f(x)$ 为零的解。结果是一个精度非常高的 ϕ 的近似值, 我们可用下列命令将它显示于图 1-2 中。

```
hold on
plot(phi, 0, 'o')
```

下面的一段程序可生成图 1-1 所示的黄金矩形图形, 它包含在名为 `goldrect.m` 的 M 文

件中, 因此我们输入下述命令

4 goldrect

运行这段程序并生成图形。

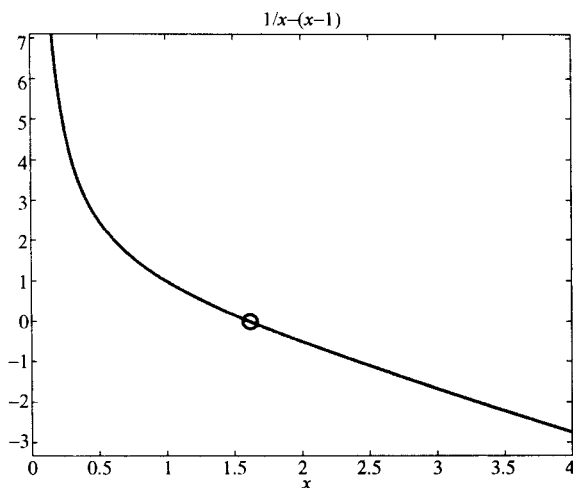


图 1-2 $f(\phi)=0$

```
% GOLDRECT Plot the golden rectangle
```

```
phi = (1+sqrt(5))/2;
x = [0 phi phi 0 0];
y = [0 0 1 1 0];
u = [1 1];
v = [0 1];
plot(x,y,'b',u,v,'b--')
text(phi/2,1.05,'\phi')
text((1+phi)/2,-.05,'\phi - 1')
text(-.05,.5,'1')
text(.5,-.05,'1')
axis equal
axis off
set(gcf,'color','white')
```

5 向量 x 和 y 各包含 5 个分量, 用直线依次连接连续的点 (x_k, y_k) 则生成外框矩形。向量 u 和 v 各包含两个分量, 连接点 (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2) 的直线将矩形分割为一个正方形和一个小矩形。这些直线由 `plot` 函数绘出, 其中 $x-y$ 线为蓝色实线, $u-v$ 线为蓝色虚线。紧接着的 4 条命令在不同的位置显示文字, 其中用字符串 `\phi` 代表希腊字母。两条 `axis` 命令, 使得 x 和 y 方向的坐标尺寸保持一致, 并且关闭坐标轴的显示。最后一条命令将 `gcf` 的背景颜色设置为白色, `gcf` 的意思是取当前图 (get current figure)。

连续分数 (continued fraction) 是指一种下列形式的无穷表达式

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

如果所有的 a_k 均等于 1, 则连续分数就成为黄金分割比的另一种表达形式:

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

下面的 MATLAB 函数生成并计算截断的连续分数，以此近似 ϕ 值。这些程序代码存于名为 goldfract.m 的 M 文件中。

```
function goldfract(n)
%GOLDFRACT Golden ratio continued fraction.
% GOLDFRACT(n) displays n terms.

p = '1';
for k = 1:n
    p = ['1+1/(' p ')'];
end
p

p = 1;
q = 1;
for k = 1:n
    s = p;
    p = p + q;
    q = s;
end
p = sprintf('%d/%d', p, q)

format long
p = eval(p)

format short
err = (1+sqrt(5))/2 - p
```

执行命令

```
goldfract(6)
```

输出结果为

```
p =
1+1/(1+1/(1+1/(1+1/(1+1/(1+1/(1)))))))

p =
21/13
p =
    1.61538461538462

err =
    0.0026
```

这三个 p 是同一个 ϕ 近似值的不同表达。

第一个 p 是截断 6 项的连续分数，其中含 6 个右括号。它的产生过程可看成是在一个 '1' (也即 goldfract(0)) 前面不断插入字符串 '1+1/(', 同时在 '1' 后面不断插入字符串 ')'. 无论最后这样的字符串多长，它都是合法的 MATLAB 表达。

第二个 p 是约简第一个 p 得到的“正常”分数，它有一个整数分子和一个整数分母。这种

约简的依据是

$$1 + \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{p+q}{p}$$

因此这个迭代过程开始于

$$\frac{1}{1}$$

并反复将

$$\frac{p}{q}$$

替换为

$$\frac{p+q}{p}$$

命令

```
p = sprintf('%d/%d', p, q)
```

将 p 和 q 以十进制整数形式输出，中间加一个‘/’符号显示最后的分数。

第三个 p 和前面两个是同一个数字，只是它用常规的十进制展开式来表示。我们使用 MATLAB 函数 `eval` 来做第二个 p 中的除法，得到第三个 p 的表达。

最后一个量 err 是 p 和 ϕ 在数值上的差。由于仅使用了 6 项进行截断，所以近似值只有三位数字。要得到 10 位数字的精确度，需要取多少项呢？

从理论上讲，随着项的数目 n 增加，由 `goldfract(n)` 生成的截断连续分数将趋近于 ϕ 。但由于在分子和分母上的整数最大值的限制，以及实际浮点数除法中的舍入 (roundoff) 误差，理论上的结论并不成立。读者可通过习题 1.3 来研究函数 `goldfract(n)` 精确度的限制。

1.2 斐波那契数

斐波那契 (Leonardo Pisano Fibonacci) 约出生于 1170 年，大约于 1250 年在现在意大利的比萨逝世，他旅行的足迹遍布欧洲和北非。他著有多本数学课本，此外还把阿拉伯数字表示引入欧洲。虽然他的书都是手抄本，但它们还是广为流传。斐波那契最著名的一本书是 *Liber Abaci*，出版于 1202 年。其中提出了下述问题：

某人将一对兔子放于一个四周都是围墙的地方，如果假设每对兔子每个月生出一对兔子，且新生的兔子从第二个月开始就能生育，那么一年之后由最初的那对兔子一共产生出多少对兔子？

今天，这个问题的解称为斐波那契序列 (Fibonacci sequence)，或斐波那契数 (Fibonacci number)。现在斐波那契数已成为数学专业一个小的分支，在因特网上搜索“Fibonacci”将找到几十个相关网站和几百页的有关资料，甚至还有一个 Fibonacci Association，这个协会出版一种学术刊物“*Fibonacci Quarterly*”。

如果斐波那契没有假设新出生的兔子过一个月才能成熟、生育，那么将不会有一个以他的名字命名的序列，这样兔子的对数会每过一个月翻一倍， n 个月过后，将总共有 2^n 对兔子。这是相当多的数量，但在数学上却没多少独特性。

设 f_n 为过 n 个月后兔子的对数，最关键的一个事实是，月末兔子的对数等于月初兔子的对数加上由成熟兔子生育出来的兔子的对数：

7