·高等数学辅导系列丛书·

新编
线性代数题解

（第二版）

周泰文　贺伟奇

同济、科大习题选解

考研、自考试题选解

- 以全国知名教材为蓝本，兼顾“两考”
- 集教学名师长期教学经验，内容独到
- 精选精解，揭示解题规律，提高学习能力

华中科技大学出版社

http://www.hustp.com

0151.2-44
12=2

高等数学辅导系列丛书

新编线性代数题解

（第二版）

同济、科大习题选解
考研、自考试题选解

周泰文　贺伟奇

北方工业大学图书馆
00656445

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编线性代数题解(第二版)/周泰文 贺伟奇
武汉:华中科技大学出版社,2006年5月
ISBN 7-5609-3609-1

Ⅰ.新…
Ⅱ.①周… ②贺…
Ⅲ.线性代数-题解
Ⅳ.O151

新编线性代数题解(第二版) 周泰文 贺伟奇

责任编辑:李立鹏 封面设计:刘 卉
责任校对:陈 骏 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:华大图文设计室
印 刷:武汉市新华印刷有限责任公司

开本:850×1168 1/32 印张:10.25 字数:245 000
版次:2006年5月第2版 印次:2006年5月第5次印刷 定价:14.80元
ISBN 7-5609-3609-1/O·375

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

第一版前言

线性代数是高等工科院校的重要基础课程之一. 作为有关课程的工具和对科学思维的培训,它都扮演着极为重要的角色.

为贯彻科教兴国的战略,培养21世纪国家栋梁之才,我们愿尽心奉献. 根据工科本科、自考及考研大纲要求,选用同济大学及国防科技大学编写的教材中的习题和10年来的考研、自考试题,并汇集了我们多年从事这门课程的教学经验,编写了这本辅导教材. 虽名为题解,但决不是只单纯解题,其实是通过解题的形式,引导学生掌握线性代数的基本理论,培养提高科学思维能力. 希望它能有益于读者.

本书有如下特点。

一、基本理论简明 我们综合同济、科大两本教材中的理论,融入我们多年的从教心得,理成条块,用严谨、简炼的数学语言,概括出各章的"内容提要". 理解、记忆并熟练掌握这些提要的内容,是学好本课程的关键.

二、解题思路清晰 我们从同济(三版)、科大(1998年版)两本教材的习题中选解了60%(约),按型归类,精心解答. 对典型题,归纳出解题步骤,使读者有矩可循;对非典型题,我们紧靠基本概念和性质,运用分析综合,提示注意,一题多解,版面推敲等方式,开扩思路、突出重点,揭示规律. 每章都精选出一定数量的练习题并作了解答、提示. 所有这些都意在促使读者思维敏捷,运算熟练,运用灵活,论证严谨.

三、两考动态了然 在每章的试题选解部分,我们把1987—1999年的考研及自考试题,按型分类,详细解答;书后还附录了2000及2001两年的考研试题及解答. 读者若能认真演习这些试题并在解后总结解题的思路、方法、关键、技巧,必将使读者进一步熟

悉基本理论，提高解题能力，对两考的题型、要求、重点大致有数；使在校学生对课程考试胸有成竹.

本书能面世，首先要感谢北京师范大学张禾瑞、郝炳新等教授对我们的精心培育.虽历时半个世纪，但他们的教授风范和精湛编著至今仍记忆犹新；再要感谢本书的责任编辑，他的策划、催促和编审，对本书定型起了重要作用；还要衷心感谢华中科技大学出版社、中南大学铁道学院印刷厂的有关领导、照排、美编、监印、发行等同志为本书出版付出的巨大辛劳.

由于时间仓促，水平有限，书中定有不妥之处，切望同行、读者指正.

作者

2001年4月18日

于中南大学铁道学院

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第二版前言

本书自2001年出版以来，已经连续印刷6次.不少读者和考研志士，选本书作为参考、辅导书，为振兴中华，刻苦钻研学习.

由于同济大学《线性代数》已出第四版，考研又年增新态，所以我们将本书改版修订.主要变更如下：

一、对“内容提要”作了一些调整和改写，使体系与同济教材第四版一致；

二、对“习题选解”作了一些增删和修订，使同济四版新增的典型题和难题均有详解；

三、增录了2002—2005年考研线性代数全部试题及参考解答，并将原附录中2000—2001年考研试题分录在各章的“试题选解”中；

四、对某些理论阐述及习题、试题解答作了一些文字上的修改.

在第二版面世之际，我们谨向对本书第一版提出宝贵意见的同仁及读者，向华中科技大学出版社为本书出版付出辛劳的各位同志，表示深深的谢意.

作　者

2006年2月

目　　录

第一章　n 阶行列式

一、内 容 提 要

1. n 阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\mathrm{d}}{=}① \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

或
$$D\overset{\mathrm{d}}{=}\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中，$p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列；t 为这个排列的逆序数；$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列（共有 $n!$ 个）取和.

2. 行列式的性质

（1）行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

（2）互换两行（列）后的行列式是原行列式的反数.

（3）行列式某一行（列）的各元素都乘以同一数 k，等于 k 乘此行列式.

推论　行列式某一行（列）各元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

（4）两行（列）元素对应成比例的行列式为零.

① 符号“$\overset{\mathrm{d}}{=}$”表示“规定为”或“定义为”，与符号“$\triangleq$”的意义相同.

推论 两行(列)元素完全相同的行列式为零.

(5) 若行列式某一行(列)的各元素都是两数之和,则该行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 把行列式某一行(列)的各元素都乘以同一数,然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

(6) 行列式按行(列)展开定理:行列式等于其任一行(列)的各元素与其代数余子式乘积之和.

推论 行列式中某行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零.

(7) 拉普拉斯展开定理:行列式等于其中任意k行(列)的所有k阶子式与其代数余子式乘积之和(显见(6)是(7)的特例).

3. 克拉默法则

未知量的个数与方程的个数相等的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

中，若系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D} \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

其中，D_j 是把系数行列式D 中的第j 列元素换成方程组的右端项，即是将 $\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix}$ 换成 $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$ 后所得到的行列式.

推论 未知量个数与方程个数相等的齐次线性方程组若有非零解，则系数行列式为0.

到第三章中还将证明“系数行列式为0”还是“齐次线性方程组有非零解”的充分条件.

二、习 题 选 解[①]

（一）用行列式的定义计算行列式

1.1 用行列式的定义计算下列各题：

① 本书选解的习题，主要选自两本教材：一是同济大学编的《线性代数》（第四版），该书是普通高等教育“九五”国家教委重点教材，其第三版获2000年中国高校科学技术二等奖；二是国防科技大学邓长寿等编著的《线性代数》（1998年7月第一版）. 分别用代号A、B表示.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(1) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$; （B,p. 27－3③）

(2) $D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 (1) 按定义

$$D_n=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$
$$=(-1)^{\tau(n-1\ n-2\ \cdots\ 3\ 2\ 1n)}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}.$$

这是因为D_n仅有既不同行又不同列的n个非零元素，即$a_{1,n-1}=1$，$a_{2,n-2}=2,\cdots,a_{n-1,1}=n-1,a_{nn}=n$. 因此$n!$项中仅有一项非零，故

$$D_n=(-1)^{\tau(n-1\ n-2\cdots 3\ 2\ 1\ n)}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}.$$

因为

$$\tau(n-1\ n-2\ \cdots\ 3\ 2\ 1\ n)=(n-2)+(n-3)+\cdots+3+2+1+0$$
$$=\frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

故
$$D_n=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}n!.$$

(2) 按定义，D_5是$5!=120$项的代数和，而每项均由既不同行又不同列的五个元素之积并冠以“＋”或“－”号构成. 而在第1、4、5三行中不同列的三个元素至少有一个为零，故$D_5=0$.

（二）用化为三角形行列式的方法计算行列式

1.2 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

(A, p. 26—4(1)、(4))

解 (1) 原式

$$\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-10r_1]{r_2-4r_1}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+7r_2]{r_3+15r_2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix}$$

$$=17\times 9\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

(2) 原式

$$\xlongequal{r_1+ar_2}\begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_3}\begin{vmatrix} 0 & ab & a+c & 1 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+abr_3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a+c+abc & 1+ab \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{逐行交换}]{\text{将} r_1 \text{与} r_2, r_3, r_4}(-1)\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & a+c+abc & 1+ab \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+[a+c+abc]r_3}(-1)\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1+ab+d[a+c+abc] \end{vmatrix}$$

$$=1+ab+ad+cd+abcd.$$

1.3 计算下列行列式：

(1) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；

(2) $D_n=\det(a_{ij})$，其中 $a_{ij}=|i-j|$；

(3) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$，

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.　　　　(A，p. 27～p. 28－7(2)、(5)、(6))

解 (1) $D_n \xlongequal[\text{的公因式}]{r_1+r_2+\cdots+r_n \text{ 然后提出第1行}} [(n-1)a+x]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[(k=2,3,\cdots,n)]{r_k-ar_1}[(n-1)a+x]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a+x](x-a)^{n-1}.$$

(2) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

从最后一行起，每行减去其前一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(k=1,2,\cdots,n-1)]{c_k+c_n}\begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1).$$

$$(3)\ D_n \xlongequal[(k=2,3,\cdots,n)]{r_k-r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{a_k}\right)r_k} \begin{vmatrix} 1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\right)a_2a_3\cdots a_n$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right).$$

1.4　计算下列行列式：

$$(1)\ d_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix};$$

$$(2)\ d_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix};$$

(3) $d_n=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & a_n \end{vmatrix}$ $(n\geqslant 2)$.

(B,p.53—4①、②,5)

解 (1) $d_n \xlongequal{\text{各行均减去第 2 行}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

$=-2(n-2)!$.

(2) 将 d_{n+1} 的第 k 列乘以 $\left(-\dfrac{c_{k-1}}{a_{k-1}}\right)$ 后,再加到第 1 列上,$k=2$,3,…,$n+1$,得

$$d_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{c_kb_k}{a_k} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com