高等学校教学用書

材料力学

下册　第一分册

H. M. 别遼耶夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

材料力学

下册　第一分册

H. M. 别遼耶夫著
于光瑜等譯

高等教育出版社

本書係根據1951年蘇聯國營技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的别遼耶夫（Н. М. Беляев）著“材料力學”（Сопротивление материалов）第七版修訂本譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校教科書。

本書分上下兩册出版。

參加本書翻譯的爲哈爾濱工業大學干光瑜（第二十一章，第二十二章）、張守鑫（第二十三章，第二十四章）、黎紹敏（第三十章）和顧震隆（第二十六章至第三十四章）等四同志，並由王光遠同志校訂。

本版譯本已根據原書1954年新版（第九版）修訂。

本書原由商務印書館出版，自1956年2月起改由本社出版。

材　料　力　學

下册　第一分册

Н. М. 别遼耶夫著　干光瑜等譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

商務印書館上海廠印刷　新華書店總經售

書號551（試485）　開本850×1168 1/32　印張9 4/16　字數284,000

一九五六年二月上海新一版

一九五六年二月上海第一次印刷

印數1—1,500　　定價￥0.95

下册第一分册目錄

第七篇　位能與靜不定樑

第八篇 複雜抗力

第九篇 結構構件的穩定

第七篇　位能與靜不定樑

第二十一章　應用位能的概念來求變形

§124. 命　題

除了前面所研究過的計算樑上各斷面的撓度和轉角的幾種方法以外，還有更普遍的適用於求任何彈性結構變形的方法。這一方法是建立在**能量不滅定律**的應用基礎上的。

在彈性桿之靜荷拉伸或壓縮時，產生位能由一種形式向另一種形式的轉化；作用於桿的荷重的**位能**的一部分完全轉化爲桿之變形位能。實際上，如果我們用逐漸懸掛的方法對桿之下端施加非常小的荷重 dP (圖 322)，則在每一次增加這一荷重時，已經掛上的一部分荷重將下降，而它的位能也就減少，而相應地桿之變形位能則增加。

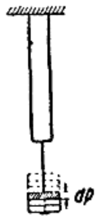

圖 322

這一現象在任何彈性結構受靜荷重作用時的任何變形形式裏都會發生；這種結構可以看作像一具能把位能的一種形式改變成另一種形式的特殊的機器一樣。

我們曾經規定 (§2) 把這樣的荷重，就是它是逐漸地增加而因之可以不計結構構件的**加速度**的荷重稱爲"靜荷重"；壓力(力)從結構的一部分傳給另一部分時並不改變這些部分**運動的性質**，也就是說它們的速度保持不變，沒有加速度。

在這樣的情況下，結構的變形並不伴隨着該體系動能的改變，僅只發生位能從一種形式到另一種形式改造而已。在這裏我們不去考慮伴

隨着物體的彈性部變形而產生的極小的磁、電及熱的現象。

因爲所有結構構件的運動性質不隨時間而改變，所以在任何瞬間，不論對於處在外力和反力作用下的結構的每一部分和對於這一部分的每一個在外力及應力作用下的構件都是平衡的。結構的變形，其各部分的應力及由一部分傳給另一部分的反力都來得及跟隨荷重的增加而增長。

如是，可以說，**位能由一種形式到另一種形式的完全改造只是在變形的發生並沒有破壞體系的平衡時才有可能**。作用在結構上的力所做**的功的數值**就是轉化爲另一形式的能的量。

以 U 來代表所貯有的變形位能的數值，而以 U_P 代表外荷重的位能之減少。如此，U_P 之值就以這些荷重的**正功** A_P 來計量；另一方面，相當於變形位能 U 的就是內部各分子間的內力的**負功** A，因爲物體內之各點在變形時的位移是和內力的方向相反的。

在彈性體系變形時的能量不滅定律的形式爲：

$$U_P = U; \tag{21.1}$$

將這一公式裏的值 U_P 和 U 以數值上等於它們的功 A_P 和 $-A$ 代入，可得到這一定律的另一公式：

$$A_P = -A \text{ 或 } A_P + A = 0。 \tag{21.2}$$

這一能量不滅定律的公式與應用於彈性體系的所謂虛位移'原理'相吻合；恆等式 (21.2) 表示這樣的意義，就是在沒有破壞平衡的位移時，所有作用於物體上各點之力的功之和等於零。

如是，應用於彈性體系的虛位移原理起源於能量不滅定律。

從公式(21.1)得出變形的位能 U 數值上就等於外力在這一變形時所做的功 A_P。

$$U = A_P。 \tag{21.3}$$

有時在某些建築力學的教科書上對這一公式可以見到這樣的解釋"在桿件變形時外力之功轉變爲變形之位能"，這是完全不對的；只有另

一種形式的能才可能轉變爲變形的位能；通常這就是外力的位能。而在這一轉變過程中由外力所做的功之值僅僅是轉化過去的一部分能量的數值上的度量吧了。

§125. 位能的計算

A. 在計算位能時，我們將假設不僅材料而且是整個結構的變形都服從虎克定律而與荷重成比例，卽與它們成**線性**關係並與它們一起**逐漸地**增長。

我們知道（§11）在桿件受力 P 之靜荷拉伸或壓縮時，功 A_P 之值及能量 U 之值相等：

$$U=A_P=\frac{1}{2}P\,\Delta l=\frac{P^2l}{2EF}=\frac{\Delta l^2EF}{2l}。\tag{21.4}$$

在剪切的情形下（§54）

$$U=A_P=\frac{1}{2}Q\Delta s=\frac{Q^2a}{2GF}=\frac{\Delta s^2GF}{2a}。\tag{21.5}$$

在扭轉時（§62）

$$U=\frac{1}{2}M_\kappa\varphi=\frac{M_\kappa^2l}{2GJ_p}=\frac{\varphi^2GJ_p}{2l}。\tag{21.6}$$

同樣地如像在扭轉時一樣，也可以計算在純彎曲時的位能。

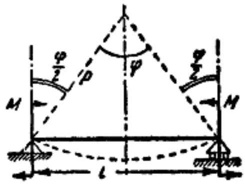

圖 323

樑在受彎矩作用時（圖 323），它二端的斷面旋轉一角度 $\theta=\frac{\varphi}{2}$，此處 φ 是樑的沿半徑爲 ρ 之弧的撓曲軸的中心角。

於是

$$U=A_P=\frac{M\varphi}{2}=\frac{M^2l}{2EJ}=\frac{\varphi^2EJ}{2l},\tag{21.7}$$

因爲 $\varphi=\frac{l}{\rho}$，而 $\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EJ}$ [參閱 §78(13.10)]。

從公式(21.4)—(21.7)得出變形的位能等於力或力偶與在該力所

作用的斷面沿該力的方向所產生的位移的乘積之一半。今規定以專門術語"廣義力"來稱呼任何引起相應於該荷重之位移的荷重，卽集中力、力偶等等；而**相應於**該力的位移也將稱為"廣義位移"。

這裏的"相應"指的是：我們所說的位移是該力所作用的斷面的位移，同時指的是**這樣的位移**，就是它與該力的乘積可得出功的數值者。對於集中力這就是在力作用方向上的線位移——撓度，伸長；對於力偶——這就是斷面在力偶作用方向上的轉角。

現在我們可以來綜合公式 (21.4)—(21.7)：**變形位能數值上就等於廣義力與相應於該力的位移的乘積之半。**

$$U=\frac{P\delta}{2}, \qquad (21.8)$$

式中 P 是廣義力，δ 是廣義位移。

公式 (21.4)—(21.7) 指出位能是**獨立**外力的二次函數，因為在這些公式裏沒有**依賴於**作用在構件上的外力的、並以平衡方程式與之相聯系的反力。從這些公式裏還可以看出變形位能之值是"廣義位移"的二次函數並完全可由它們來決定。如是，**荷重作用的先後在這方面是沒有區別的**，重要的只是變形構件的**最後形狀**。所以雖然在這一節裏的結果是在荷重的增長是**靜的**，在全部載荷的過程中均保持平衡的假設下得到的，但是只要力和變形的值是以線性關係聯系着的，並且是在**結構成為平衡**的時間內，則不管荷重是以**何種方法**加上去的，上面所導出的公式都有效。

B. 在一般的彎曲中，彎矩 $M(x)$ 是一個變量。同時，在任何斷面上與它一起的還有切力 $Q(x)$。所以就不應該研究整個的樑，而只能研究長為 dx 的無限小的樑的單元體。

在彎曲內力的作用下，單元體的二個斷面旋轉着並互相形成一角度 $d\theta$ (圖 324, б)。至於切力則引起單元體的剪切(圖 324, в)；如是，由於垂直應力所發生的位移它的方向與切應力的方向垂直，反之亦然。

這就使我們能夠**獨立地**來計算彎曲內力和剪切內力的功了。

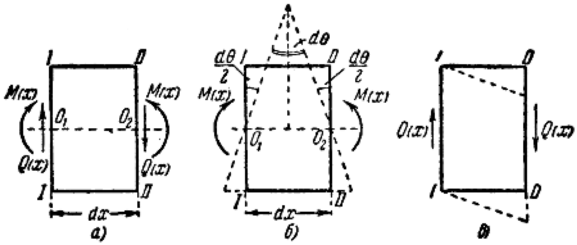

圖 324

通常由於切應力所做的功與垂直應力的功相較甚爲微小，所以我們暫時不去考慮它。垂直應力的單元功（如在純彎曲的情況下一樣）等於：

$$dA_P = dU = \frac{1}{2} M(x)\, d\theta = \frac{1}{2} M(x) \frac{M(x)dx}{EJ} \qquad (21.9)$$

或

$$dU = \frac{M^2(x)dx}{2EJ}。 \qquad (21.9')$$

彎曲的全部位能可沿樑之長度相加而得

$$U = \int_l \frac{M^2(x)dx}{2EJ} = \frac{1}{2EJ}\int_l M^2(x)dx。 \qquad (21.9'')$$

積分極限的符號規定表示積分應該遍及樑的全部；在某些情況下，就是當對於 $M(x)$ 有若干分段時，積分 (21.9″) 就必須分爲若干積分之和。

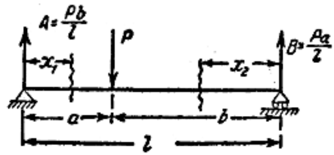

圖 325

現在我們來計算一樑的位能，該樑安裝在二支座上，並承受力 P（圖 325）。力矩圖有二段；所以

$$U = \int_0^a \frac{M_1^2 dx}{2EJ} + \int_0^b \frac{M_2^2 dx}{2EJ};$$

$$M_1=+Ax_1=+\frac{Pb}{l}x_1;\quad M_2=+Bx_2=+\frac{Pa}{l}x_2;$$

$$U=\frac{1}{2EJ}\left[\int_0^a\left(\frac{Pb}{l}\right)^2x_1^2\,dx+\int_0^b\left(\frac{Pa}{l}\right)^2x_2^2\,dx\right]=\frac{P^2a^2b^2}{6EJl}。$$

B. 知道位能之值並利用在外力中只有力 P 在樑變形時做功這一點,我們就可以根據下列關係求出在該力下面的撓度:

$$A_P=\frac{1}{2}Pf=U,\quad U=\frac{P^2a^2b^2}{6EJl},$$

從這裏得:

$$f=\frac{Pa^2b^2}{3EJl},$$

在 $a=b=\frac{l}{2}$ 時的特殊情況下,就得到我們所熟知的撓度值:

$$f=\frac{Pl^3}{48EJ}。$$

有時候,當外力的數目很少時,計算彎曲時的位能有時可以不用公式 (21.9) 而用計算外力之功的方法來進行㊀。

例如,試研究 A 端固定的、並在 B 端受一集中力 P 作用的樑(圖 326)。樑的跨度為 l。樑上作用着該力以及由它所引起的反力 A、M_A 和 H_A。因為支座斷面是不動的,所以在樑變形時反力不作功。只有力 P 作功;樑端的撓度在力 P 逐漸增加時,以直線關係與該力聯系着。

$$f=\frac{Pl^3}{3EJ}\ \text{或}\ P=\frac{3fEJ}{l^3};$$

力 P 之功

$$A_P=U=\frac{1}{2}Pf=\frac{P^2l^3}{6EJ}=\frac{3f^2EJ}{2l^3}。$$

如果對結構構件作用若干個力,則總位能可由所有這些聯合作用的力所計算的乘積㊁之和來求得,因為每一個位移都與所有的荷重有關。

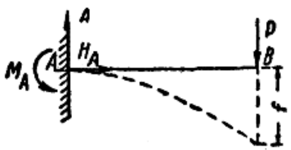

圖 326

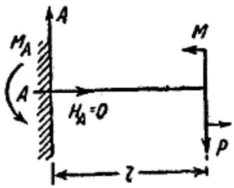

圖 327

例如,對一端固定的樑(圖 327),在自由端 B 上有力 P 和力偶 M 的作用時,位能等於:

㊀ 譯者註: 此處原書是"不用公式 (21.8)",可能是印刷的錯誤。

㊁ 譯者註: 指功。

$$A_P=U=\frac{1}{2}Pf_B+\frac{1}{2}M\theta_B=\frac{1}{2}P\left(\frac{Pl^3}{3EJ}-\frac{Ml^2}{2EJ}\right)+\frac{1}{2}M\left(\frac{Ml}{EJ}-\frac{Pl^2}{2EJ}\right)=$$
$$=\frac{P^2l^3}{6EJ}+\frac{M^2l}{2EJ}-\frac{PMl^2}{2EJ}。$$

在最後的二個例題裏,對於求外力之功 $A_P=U$ 的數值需要知道外力作用的斷面的撓度或轉角之值。

§ 126. 卡斯奇梁諾定理

現在來講一個建立在變形位能計算這一基礎上的求位移的方法。提出一個求彈性體系上沿作用於該體系的外力作用方向上的點的位移之命題。

我們將用幾個方法來解決這一問題;首先來研究最簡單的情況(圖 328),就是在樑的斷面 1、2、3… 上只作用着集中力 P_1、P_2、P_3 … 等等。在這些力的作用下樑依照曲線 I 彎曲並仍保持平衡。

以 y_1、y_2、y_3 … 等來代表在力 P_1、P_2、P_3 … 等所作用的斷面 1、2、3… 的撓度。現在來求這些撓度中的一個撓度,例如 y_1——作用着力 P_1 的斷面的撓度。

將樑從位置 I 移到相鄰的位置 II(以虛線繪於圖 328 上者),但不破壞其平衡。這可以用各種不同的方法來做:添加新的荷重,增加已經作用上去的荷重等等。

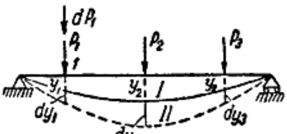

圖 328

我們設想為了變成為相鄰的變形狀態 II,在力 P_1 上添加一無限小的 dP_1 (圖 328); 同時為了在這一轉變中不致破壞平衡起見將認為這一添加的力是靜靜地安放的,也就是說從零到終值是緩慢地、逐漸地增長的。

當樑從狀態 I 轉為狀態 II 時,所有的荷重 P 都下降着,即它們的位能減少着。因為平衡未曾破壞,所以荷重能量 dU_P 的減少完全轉化為樑的變形位能 dU 的增加。dU_P 之值由外力在從狀態 I 到狀態 II 的過渡中的功來計量:

$$dU=dA_P。\tag{21.10}$$

爲力 P_1、P_2、$P_3\cdots$ 的函數的變形位能之改變 dU 是由這些獨立變量中的一個 P_1 的極小的增量來產生的；所以這樣的複雜函數的微分等於：

$$dU=\frac{\partial U}{\partial P_1}dP_1。\tag{21.11}$$

至於說到功 dA_P 的值，那麼它就是各荷重 P 對於位置 II 和 I 的功之差：

$$dA_P=A_2-A_1。$$

功 A_1 在當各 P 力是同時地、並逐漸地增長時，等於：

$$A_1=\frac{1}{2}P_1y_1+\frac{1}{2}P_2y_2+\frac{1}{2}P_3y_3。$$

在計算功 A_2 時，將認爲它的值完全决定於變形樑的最後形狀（§ 125），因之與置放荷重的先後無關。

假定開始我們以重量 dP_1 作用於樑上；樑就稍微有一些撓曲（圖 329；位置 III），它在點 1、2、3 上的撓度將爲 dy_1、dy_2、dy_3。靜作用的荷重 dP_1 的功就等於 $\frac{1}{2}dP_1dy_1$。在這以後再開始逐漸地以同時增長着的荷重 P_1、P_2、P_3 加在樑上。

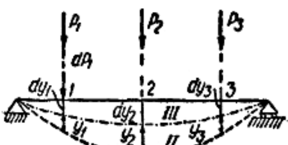

圖 329

在最初的撓度 dy_1、dy_2、dy_3 上添上了撓度 y_1、y_2、y_3（圖 329）。在這一加荷階段裏力 P_1、P_2、P_3 做功 $\frac{1}{2}P_1y_1+$ $+\frac{1}{2}P_2y_2+\frac{1}{2}P_3y_3=A_1$；除此以外，還有已經位在樑上的重量 dP_1 也做功；它經過路程 y_1，但因爲它在第二個加荷階段裏保持爲常量，所以它的功等於 dP_1y_1。樑佔着以虛線繪於圖 329 上的位置 II。

如是，樑在從未變形狀態轉到位置 II 時由外力所做的總功就等於

(圖 329)

$$A_2=\frac{1}{2}dP_1dy_1+A_1+dP_1y_1。$$

現在來計算 $dU=dA_P=A_2-A_1=\frac{1}{2}dP_1dy_1+dP_1y_1。$

將二次微量的一項略去不計，即得：

$$dA_P=dP_1y_1。\tag{21.12}$$

將求得之值 dU (21.11) 和 dA_p (21.12)代到方程式(21.10)裏去，就得

$$dP_1y_1=\frac{\partial U}{\partial P_1}dP_1,$$

或

$$y_1=\frac{\partial U}{\partial P_1}。\tag{21.13}$$

如是，在上述情形裏，**集中力 P_1 作用點的撓度就等於變形之位能對該力的偏導數**。

上面所得到的結果可以使之普遍化。令在樑上除集中力 P 外，還在不同斷面上作用着若干力偶 M (圖 330)。我們再可以重複一下前面的討論，把

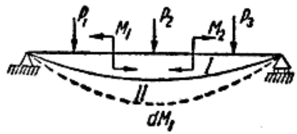

圖 330

樑作爲由於在力偶 M_1 上添加一 dM_1 而從位置 I 轉變到位置 II。討論的整個過程照舊，僅只須在計算力矩 M_1、$M_2\cdots$ 的功時不要將它們乘以撓度而是乘以**在這些力偶作用處的斷面的**轉角 θ_1、$\theta_2\cdots$。於是 dU 就等於 $\frac{\partial U}{\partial M_1}dM_1$，$dA_P$ 變成 $dM_1\theta_1$，而公式(21.13)的形式就爲：

$$\theta_1=\frac{\partial U}{\partial M_1}。\tag{21.14}$$

因爲 y_1 是**相應於**力 P_1 的位移，θ_1 是**相應於**力 M_1 的位移，所以我們所得到的結果可以總結如下：**變形位能對諸獨立外力中之一的偏導數就等於相應於該力的位移**。這就是在 1875 年所發表的卡斯奇梁諾定理。

我們可以看到在樑上有連續荷重時並不會改變上面的結論，因爲任何連續荷重都可以把它看作由無數的集中力所組合的荷重。

上面的結論是對於樑所作出的，但十分明顯，也可以把它重複對任何服從虎克定律變形的結構來作出。

對於彎曲的情形，我們已經得到一聯系位能 U 與彎矩的公式：

$$U=\int\frac{M^2(x)dx}{2EJ}。$$

彎矩爲作用於樑上的荷重 P_1、P_2、… M_1、M_2、…，q 的線性函數：

$$M(x)=a_1P_1+a_2P_2+\cdots+b_1M_1+\cdots+c_1q_1;$$

這一點，如果觀察一下在繪製彎矩圖時(§§ 72、73)用於計算彎矩的公式就不難看到；所以，位能是獨立外力的二次函數。

現在來計算一下 U 對諸外力中之一，例如 P_1 的偏導數。得出：

$$\frac{\partial U}{\partial P_1}=\frac{\partial}{\partial P_1}\left[\int_l\frac{M^2(x)dx}{2EJ}\right]。$$

這裏我們遇到所謂定積分對參變量的微分，因爲 $M(x)$ 是 P_1 和 x 的函數；積分依 x 來積，而微分對參變量 P_1。如所週知，如果積分極限爲固定時，則只須簡單地把積分號內的函數微分卽可。

如是，在集中力 P_1 作用的點的撓度就等於：

$$y_1=\frac{\partial U}{\partial P_1}=\int_l\frac{M(x)dx}{EJ}\,\frac{\partial M(x)}{\partial P_1},\tag{21.15}$$

而有力偶 M_1 的斷面的轉角

$$\theta_1=\frac{\partial U}{\partial M_1}=\int_l\frac{M(x)dx}{EJ}\,\frac{\partial M(x)}{\partial M_1}。\tag{21.16}$$

提醒一下極限 l 的符號是指積分應該遍及樑的全部。

§ 127. 應用卡斯奇梁諾定理之例題

現在來求 (圖 331) 一端 A 固定、一端 B 自由的樑的撓度。樑受在 B 點的集中力之作用。在這一情況下可以直接應用卡斯奇梁諾定理，因爲要找撓度的斷面上正作用着集中力 P