大学数学辅导丛书

概率论与数理统计

（题型归类 方法点拨 考研辅导）

马菊侠 主 编
吴云天 副主编

$D(X+Y)=D$

$E(XY)=E(X)E(Y)$

GAILULUN YU SHULITONGJI TIXING GUILEI FANGFA DIANBO KAOYAN FUDAO

$+Y)=D(X)+D(Y)$

$X-Y)=D(X)+D(Y$

国防工业出版社
National Defence Industry Press

大学数学辅导丛书

概率论与数理统计

题型归类·方法点拨·考研辅导

马菊侠　主　编
吴云天　副主编

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计:题型归类·方法点拨·考研辅导/马菊侠主编;吴云天副主编. —北京:国防工业出版社,2006.9

(大学数学辅导丛书)

ISBN 7-118-04667-1

Ⅰ.概... Ⅱ.①马...②吴... Ⅲ.①概率论—研究生—入学考试—自学参考资料②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 084233 号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 **印张** 26 **字数** 502 千字

2006 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 37.00 元

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

前　言

“概率论与数理统计”是理工科院校的一门重要的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考课程。基于该课程概念的抽象性、方法的特殊性，以及后继课程的学习、硕士研究生考试的要求，结合我们多年来的教学经验，编写了《概率论与数理统计　题型归类·方法点拨·考研辅导》。旨在帮助读者系统地理解基本概念、基本知识，掌握解题思路、方法与技巧，进而提高综合素质与应试能力。

本书根据现行教学大纲和研究生入学考试大纲编写而成，共分八章，每章包含六个模块：主要知识网络，内容提要，方法归类，题型归类·方法点拨·技巧分析，同步训练，同步训练参考答案。本书是以题型·方法归类为主线，贯穿着知识网络、思维训练、综合测试为一体的学习用书。

本书有以下主要特点：

1. 题型归类　将多年来本科“概率论与数理统计”教学中的重点题、难点题、本科考试题、考研题，进行系统归类，便于理解与复习。

2. 方法归类　对解题方法进行系统的归纳，便于寻找解题思路。

3. 题型综合　在掌握基本知识的前提下，本书力图在知识的深度、广度上拓展读者的知识面，在题型选择上注重其综合性、技巧性。提高其分析问题与解决问题的能力。

4. 条理清晰　在主要知识点的处理上，本书采用网络式、图表式等方法，便于读者比较与区分相关的概念与知识点。

5. 针对性强　本书以现行经典教材（浙江大学《概率论与数理统计》第三版）为蓝本编写而成。对书后的习题做了解答，附有三套综合测试试题及解答，针对考研的读者附有2000年～2006年全国硕士研究生入学考试“概率论与数理统计”试题与解答。从而适应不同层次的读者。

限于编者的水平，疏漏与不妥在所难免，敬请读者与同仁批评指正。

2006年5月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

一、主要知识网络

- 随机试验
  - 定义
  - 样本空间，样本点
- 随机事件
  - 定义：样本空间的子集
  - 关系与运算
    - 包含$A\subset B$；相等$A=B$；和$A+B$；积AB
    - 差$A-B$；互斥(互不相容)$AB=\varnothing$
    - 对立(互逆)$AB=\varnothing$且$A+B=\Omega$
  - 独立性
    - A、B两事件相互独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$
- 概率
  - 定义
    - 古典概型:等可能性,有限性
    - 几何概型:等可能性
    - 公理化体系:非负性、规范性、可列可加性
    - 概率性质
      - 加法公式$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
      - 减法公式$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$
      - 求逆公式$P(\bar{A})=1-P(A)$
  - 计算
    - 古典概型计算$P(A)=\dfrac{A\text{所包含的基本事件数}}{\Omega\text{中基本事件总数}}$
    - 几何概率$P(A)=\dfrac{\text{事件}A\text{的区域变量}\Omega_A}{\text{样本空间变量}\Omega}$
    - 条件概率$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$　$(P(A)>0)$
    - 乘法公式$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$
    - 全概公式$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A|B_i)$
    - 逆概公式$P(B_i|A)=\dfrac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$

二、内容提要

(一) 随机事件及其运算

1. 随机试验

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前，不能确定哪一个结果会出现。

2. 样本空间

随机试验所有可能结果组成的集合称为样本空间，记为 Ω，样本空间的元素称为样本点。

3. 随机事件

样本空间的子集为随机事件，简称事件。由一个样本点组成的单点集，称为基本事件。

4. 事件的关系和运算

(1) 四种关系

关 系	符 号	概率论的定义	集合论的含义
包含关系	$A\subset B$	事件 A 发生必然导致 B 发生	A 是 B 的子集
相等	$A=B$	$A\subset B$ 且 $B\subset A$	A 与 B 相等
对立关系(逆事件)	$\overline{A}$	$A+\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\phi$	A 的补集
互不相容(或互斥)	$AB=\phi$	事件 A 与 B 不能同时发生	A 与 B 无公共元素

(2) 运算

运算	符号	概率论的定义	集合论的含义
事件的并(或和)	$A\cup B$(或 $A+B$) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$	事件 A 与 B 至少有一个发生 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生	A 与 B 的并集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并集
事件的交(或积)	$A\cap B$(或 AB) $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$	事件 A 与 B 同时发生 事件 $A_1,\cdots,A_n$ 同时发生	A 与 B 的交集 $A_1,\cdots,A_n$ 的交集
事件的差	$A-B$(或 $A\overline{B}$)	事件 A 发生而 B 不发生	A 与 B 的差集

5. 完备事件(或完备事件组)

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容，并且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组。

6. 有关的关系式

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) 德摩根(De Morgen) 定律:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

(5)$\Phi\subset A\subset\Omega$;

(6) 若$A\subset B$,则$A\cup B=B$,$AB=A$;

(7)$A\subset A\cup B$,$B\subset A\cup B$,$AB\subset A$,$AB\subset B$;

(8)$A+B=A+(B-AB)=B+(A-B)=B+A\overline{B}=A+B\overline{A}=$
$A\overline{B}+\overline{A}B+AB$

(二) 概率的一般定义和性质

1. 定义

设E是随机试验,Ω是它的样本空间,对于E中的每一事件A发生的可能性大小的度量(数值) 称为A发生的概率,记为$P(A)$。它满足以下公理:

(1) 非负性:对任一事件A,有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) 规范性:$P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性:设$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是两两互不相容的事件,即对$i\neq j$时,$A_i\cap A_j=\phi$,$i,j=1,2,\cdots$,则有

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

2. 性质

(1) 不可能事件的概率为0,即$P(\phi)=0$;

(2) 逆事件的概率:$P(\overline{A})=1-P(A)$;

(3) 概率的加法公式

对于任意事件A、B,有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,特别地,对于$A$、$B$互不相容,则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。一般地,对于任意$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1,A_2,\cdots,A_n)$$

特别地,如果$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互不相容,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\quad(\text{有限可加性})$$

(4) 若$A\subset B$,则$P(B-A)=P(B)-P(A)$,$P(A)\leqslant P(B)$

(三) 古典概型

如果随机试验 E 具有下列特点：

(1) 有限性 —— 样本空间 Ω 只含有有限个基本事件；

(2) 等可能性 —— 试验中每个基本事件发生的可能性相同，则称这种概型（或试验）为古典概型。

古典概型的计算

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件的总数}}$$

(四) 条件概率及相关的三大公式

1. 条件概率

设 A、B 为同一随机试验的两个事件，且 $P(A)>0$，则称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

2. 乘法公式

对任意两个事件 A、B，若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则有 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B)$

一般地，对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

3. 全概公式

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分（或为事件 A 的一个假设，或为完备事件组），即

(1) $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互斥，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$

则 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$

当直接计算 $P(A)$ 较困难，而 $P(B_i)$ 及 $P(A\mid B_i)$ 易计算时，可利用全概公式计算 $P(A)$。

4. 贝叶斯(Bayes) 公式（逆概公式）

设事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 及 A 为全概公式中所述，且 $P(A)>0$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

一般地：由因溯果，用全概公式；由果溯因，用逆概(Bayes) 公式。

（五）事件的独立性

(1) 两个事件 A、B 相互独立

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

(2) 若事件 A、B 相互独立，则下列三对事件：$\overline{A}$ 与 B；A 与 $\overline{B}$；$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

(3) 三个事件 A、B、C 的相互独立。

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(BC)=P(B)P(C)$$
$$P(AC)=P(A)P(C)$$

则称三事件 A、B、C 两两相互独立。

如果上述三等式成立，且

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

则称 A、B、C 为相互独立的事件。

(4) 如果对任意整数 $k(2\leqslant k\leqslant n)$，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意 k 个事件的积事件的概率等于这 k 个事件概率之积，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的。若 A_1，$A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则必两两独立，且

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$
$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)=$$
$$1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(A_i)]$$

(5) 贝努利概型

如果在一次试验中仅关心事件 A 是否发生，即只考虑 A 和 $\overline{A}$ 两个试验结果，这种试验称为贝努利试验。如果独立重复地进行了 n 次贝努利试验，则称为 n 重贝努利概型（独立重复试验序列）。设在一次贝努利试验中事件 A 发生的概率为 p，则在 n 重贝努利试验中事件 A 发生 k 次的概率为 $P(0<P<1)$，则 $P(A\text{ 发生 }k\text{ 次})=C_n^kp^kq^{n-k}(k=0,1,\cdots,n)(q=1-p)$。

该公式称为二项概率公式。

三、方法归类

1. 随机事件的表示及运算

(1) 以适当的形式表示试验的样本点、样本空间及事件；

(2) 根据题目中的含义如：“恰有”、“只有”、“至少”、“至多”等词语的含义，将复杂的事件用简单的事件表示；

(3) 根据事件的包含、不相容、对立事件等的定义，通过事件的运算进行化简、证明或验证事件的关系。

2. 事件概率的计算

(1) 利用古典概型

$$P(A)=\frac{\text{有利事件 }A\text{ 所含有的基本事件数}}{\text{样本空间 }\Omega\text{ 含有的基本事件总数}}$$

此时要注意各事件是否为等可能事件。

古典概型的三类问题

① 抽球问题　此模型的关键是分清“放回抽样”还是“不放回抽样”，以及抽取的结果与次序是否有关；样本空间的元素考虑了次序，则事件中的元素也就要考虑次序。

② 分房问题　此模型中的人和房子都是有特征的，通常是将人一个一个地往房间里分配。

③ 取数(随机) 问题　此时须分清有放回地取数，及无放回地随机取数。

(2) 利用几何概型

当随机试验的样本空间是某一区域，并且任意点落在度量(长度、面积、体积)相同的子区域是等可能的，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\Omega_A}{\Omega}$$

其中 Ω 是样本空间 Ω 的度量，Ω_A 是构成事件 A 的子区域的度量。

(3) 利用概率运算性质

此时可利用事件的逆、加法公式、包含关系等简化概率运算。

(4) 利用全概公式、逆概公式

全概与逆概公式详见内容提要。使用这两个公式都需要找到完备事件组(或一个划分)$B_1,B_2,\cdots,B_n$。将 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 看作是导致事件 A 发生的原因，而这些原因的概率 $P(B_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 是已知的或是易求的。而 $P(B_i\mid A)$ 则反映了试验之后各种原因发生的概率，所以逆概公式是用于已知结果，寻找原因发生的可能性计算。

(5) 利用条件概率与乘法公式

$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，或 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)(P(A)>0)$

此时往往与独立性相联系，例如

①$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

当 A、B、C 互不相容时

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

当 A、B、C 相互独立时(独立不一定互斥)

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)$$

②$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$,$(P(AB)>0)$

当 A、B、C 互相独立时

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

四、题型归类·方法点拨·技巧分析

【题型 1　随机事件的表示及运算】

【方法与技巧】

1. 将复合事件通过运算用其等价事件表示，此时常用“恰有”、“只有”、“至多”、“至少”、“都发生”、“都不发生”、“不都发生”等语言描述，仔细理解其含义。

2. 巧妙运用事件间的关系及运算表示复杂事件，其中包含和、差、积、对立、互不相容事件的巧妙运用，还有对积的分配律、差化积及对偶律的应用。

【例 1】　设 A、B、C 表示三个随机事件，试用 A、B、C 的运算表示下列事件：

(1) 仅 B 发生；

(2) A、B、C 都发生；

(3) A、B、C 都不发生；

(4) A、B、C 不都发生；

(5) A、B、C 中至少有一个发生；

(6) A、B、C 中恰好有一个发生；

(7) A、B、C 中至少有两个发生。

解　事件间的关系类似于集合论中集合间的关系，要学会运用概率语言来解释集合间的关系及运算。对于复杂的事件，可利用：① 文图进行分析；② 巧妙使用逆事件；③ 合理运用“绕圈子”。

(1) 仅 B 发生，指 A、C 均不发生，故 ABC；

(2) ABC；　　　(3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(4) $\overline{ABC}$ 或者 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；

(5) $A\cup B\cup C$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$；

(6) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

(7) $AB\cup AC\cup BC$ 或 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$。

【例 2】　连续进行三次独立射击，设 $A_i=$“第 i 次射击击中目标”，$i=1,2,3$；$B_j=$“恰好击中目标 j 次”，$j=0,1,2,3$；$C_k=$“至少击中目标 k 次”，$k=0,1,2,3$。

(1) 试用 A_i 表示 B_j 和 C_k；$i=1,2,3$；$j,k=0,1,2,3$。

(2) 试用 B_j 表示 C_k；$j,k=0,1,2,3$。

解　(1) $B_0=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

$$B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

$$B_2=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2A_3$$

$$B_3 = A_1A_2A_3$$
$$C_0 = \overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3 + A_1 + A_2 + A_3$$
$$C_1 = A_1 + A_2 + A_3$$
$$C_2 = A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3$$
$$C_3 = A_1A_2A_3$$

(2)$C_0 = B_0 + B_1 + B_2 + B_3$

$$C_1 = B_1 + B_2 + B_3$$
$$C_2 = B_2 + B_3$$
$$C_3 = B_3$$

【例 3】 以 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\overline{A}$ 为__________。

(A)“甲种产品滞销，乙种产品畅销”

(B)“甲、乙两种产品均畅销”

(C)“甲种产品滞销”

(D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”

[1989 年数学四①]

解 设 $B =$“甲种产品畅销”

$C =$“乙种产品滞销”

则 $A = BC$

于是 $\overline{A} = \overline{BC} = \overline{B} \cup \overline{C}$ 而

$\overline{B} =$“甲种产品滞销”，$\overline{C} =$“乙种产品畅销”，故选(D)。

【题型 2 古典概型的计算】

【方法与技巧】

(1) 计算公式 $P(A) = \dfrac{\text{有利事件 } A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 的基本事件总数}}$。

(2) 要考察各事件是否是等可能事件，基本事件的总数是否有限。在计算时，样本空间的元素未必列出，但要求出基本事件的总数及事件 A 所包含的基本事件数。

(3) 属于“至少存在一个”的命题，一般用对立事件求解简便，对于复杂的情形，要借助排列组合中的加法及乘法原理将其分成若干简单情形考虑。

(4)“任取 k 件”与“无放回地逐渐取 k 件”，虽然考虑问题的角度不同，但二者所计算的概率是相同的。

(5) 利用古典概型公式计算事件的概率时，可在不同的样本空间中考虑分析

① [1989 年数学四] 表示 1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题，下同。

问题，从而出现一题多解。但计算样本空间总数，有利事件A的基本事件数时，二者必须在同一确定的样本空间中考虑，如果一个考虑顺序（如用排列），则另一个也得考虑顺序（也用排列）。

【例 1】 假设每个房间可以住任意多个人，将r个人随机地分到n个房间，求下列事件的概率：

$A=$“某指定的r个房间中各有一人”

$B=$“恰有r个房间中各有一人”

$C=$“某指定的一个房间中有m个人”

解 将r个人分到n个房间，共有n^r，有利事件A为将r个人分到指定的r个房间，每房间一人，则有利事件数为$r!$，于是$P(A)=\frac{r!}{n^r}$。

有利事件B为n个房间里恰有r个房间，r个房间中各有一人，则有利事件数为$C_n^r r!$于是

$$P(B)=\frac{C_n^r r!}{n^r}$$

有利事件C的基本事件数为$C_r^m\cdot(n-1)^{r-m}$

则$P(C)=\frac{C_r^m(n-1)^{r-m}}{n^r}$。

【例 2】 从5双不同的鞋子中任取4只，问这4只鞋子至少有2只鞋子配成一双的概率是多少？

解 1 从5双（10只）中任取4只，（无顺序）共有$C_{10}^4=210$种。

设$A=$“取到的4只中至少有2只配成对”，则$\overline{A}=$“取到的4只均为单只”，则$\overline{A}$的基本事件数为

$$\underbrace{C_5^4}_{\text{5双中取4双}}\cdot\underbrace{C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1}_{\text{每双中各取1只}}=80\text{种}$$

故$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{80}{210}=\frac{13}{21}$。

解 2 将10只鞋子编号，一只一只地取（有顺序），共有P_{10}^4。

A与$\overline{A}$均同解1的设，则$\overline{A}$的基本事件数为

$$\underbrace{10}_{\text{10只中取1只}}\times\underbrace{8\times6\times4}_{\text{去掉与所取出1只成双的另1只后再取}}$$

故$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\times8\times6\times4}{P_{10}^4}=\frac{13}{21}$

注 此题是在不同的样本空间考虑，如果一个用排列，则另一个也用排列；一

个用组合，另一个也用组合。但计算样本空间的总数及事件 A 的基本事件个数时，二者必须在同一确定的样本空间考虑。

【例3】 将3个小球随机地放入4个盒子中，盒子中球的最多个数分别为1，2，3 的概率。

解 3个球放入4个盒子，是有重复的排列，总放法为 $4^3=64$。设 $A_i=$“杯中球的最大个数为 i”，$i=1,2,3$。

(1) 盒子中球的最多个数为1，即3个球分别在4个盒子中的3个盒子中，放法为 $P_4^3=24$

则 $P(A_1)=\dfrac{24}{64}=\dfrac{3}{8}$。

(2) 盒子中球的最多个数为2，即 $A_2=$“2个盒子是空的，另外2个盒子，一个有2个球，一个有1个球，”则 A_2 的基本事件数为

$$P_4^2\cdot C_3^1$$

1个盒子有2个球，另1个盒子中有1个球，这1个球从3个球中取（或2个球从3个球中取为 C_3^2）

3个球放入4个盒子中的2个盒子

则 $P(A_2)=\dfrac{P_4^2\cdot C_3^1}{4^3}=\dfrac{9}{16}$

(3) $A_3=$“3个盒子是空的，1个盒子中放入3个球”

$=$“3个球全放入4个盒子中的1个盒子”。

放法为 P_4^1

则 $P(A_3)=\dfrac{P_4^1}{4^3}=\dfrac{1}{16}$。

注 本题的(2)计算较繁，可用如下方法：

因 $P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=1$，于是可先算出 $P(A_1)$ 及 $P(A_3)$，则 $P(A_2)=1-P(A_2)-P(A_3)$。

【例4】 从0，1，2，…，9等10个数字中任选3个不同的数字，试求下列事件的概率：

$A_1=$“3个数字中不含0和5”；

$A_2=$“3个数字中不含5，但含0”；

$A_3=$“3个数字中不含0或5”。

解 随机试验是从10个数字中任取3个数字，样本空间的基本事件数为 C_{10}^3。

由于取出的3个数字不含0和5，因此3个数字应从其余8个数字中取，故 A_1 所含有的基本事件数为 C_8^3，从而

$$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$$