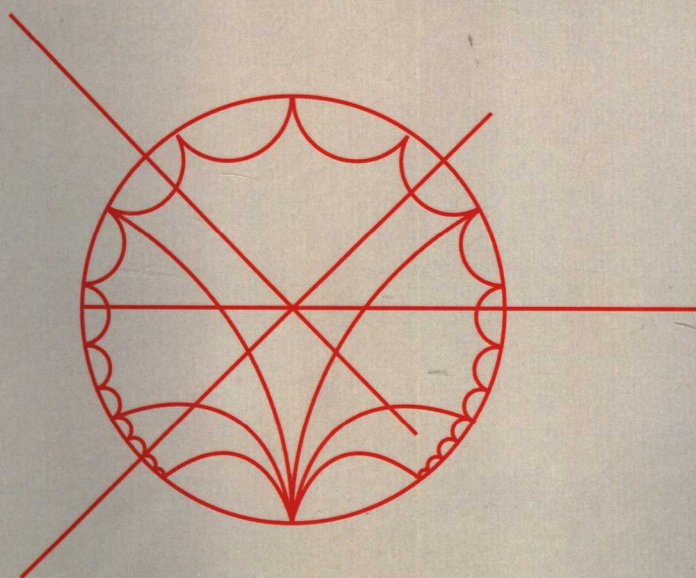


W 西部科技丛书

数学技术应用科学



西部科技频道网



云南出版集团公司
云南科技出版社

MATHEMATICS TECHNOLOGY APPLIED SCIENCE

W 西部科技丛书

数学技术应用科学

MATHEMATICS TECHNOLOGY APPLIED SCIENCE



西部科技频道网

云南出版集团公司
云南科技出版社

• 昆明 •

图书在版编目 (CIP) 数据

数学技术应用科学/西部科技频道网组编. —昆明:
云南科技出版社, 2006.4
ISBN 7-5416-2336-9

I.数... II.西... III.应用数学 IV.029

中国版本图书馆CIP数据核字 (2006) 第036303号

云南出版集团公司

云南科技出版社出版发行

(昆明市环城西路609号云南新闻出版大楼 邮政编码: 650034)

云南省印刷技术研究所印刷 全国新华书店经销

开本: 889mm×1194mm 1/16 印张: 15.5 字数: 460千字

2006年4月第1版 2006年4月第1次印刷

印数: 1~1000 定价: 50.00元

目 录

· 数学基础研究进展 ·

超球级数所定义指数型整函数	王安斌, 王小红 (3)
拟凹函数特性及其应用的讨论	刘宗谦, 于加尚 (6)
迭代函数系统(IFS)及其应用	赵选泽, 张仁津, 华梦霞 (12)
例说多元函数条件极值求法中的三个“陷阱”	申兰珍 (15)
非线性泛函分析随机序集一般原理	李志龙 (17)
集值平方可积鞅	周华任, 徐 艳, 李世楷 (21)
关于 Ozawa M. 的一个结果(英文)	张同对, 王赞春 (24)
一类含参数的二维非线性差分方程周期解的存在与稳定性	谭福锦 (28)
弱奇性的第一类 volterra 积分方程的机械求积算法	李于锋, 吕 涛 (32)
非线性脉冲时滞差分方程的振动性	黄先勇, 吴光年 (36)
求解线性方程组的残差算法	顾阿伦, 孙永广 (40)
气体流动积分方程的求解方法	何明飞, 吕 涛 (44)
模 2^m 剩余类环上对合矩阵的标准型	陈 溪 (48)
四元数矩阵的 Gauss 消去法及其应用	俞 森, 冯良贵 (51)
求结式循环矩阵的逆与广义逆的快速算法	吴 伟 (55)
用匈牙利算法计算置换的漂移分布	张 谨 (58)
多属性决策中的一种选择排序算子	刘学生, 邹开其, 吴 伟 (63)
v 阶 Steiner 三连系个数 N 的计算方法	俞万禧 (66)
一种具有正交应力模式的杂交膜元	王 宇, 曹 睿 (71)
关于强伪压缩映射不动点的收敛问题	常进荣 (75)
关于 DVD 在线租赁分配问题的研究	赵临龙, 沈小卫, 罗云蒸, 等 (78)
16 名乒乓球选手单打比赛安排问题	俞万禧 (82)

· 数学模型的理论建立和应用 ·

- 社会等级结构模型的研究 张 良, 窦春轶, 时书丽 (89)
- 非线性人口发展模型的整体经典解 闫 萍 (92)
- 一种基于支持向量机的企业财务危机预警模型 宋杰鲲, 张在旭, 张 宇 (98)
- 厂商的新建、扩建和原状三者方案中最优选择 丘冠英 (103)

· 计算机数学 ·

- 基于优化理论的 TCP/IP 拥塞控制算法 陈元琰, 闫友彪, 罗晓曙 (109)
- LZW 无损压缩算法的 Java 语言实现与研究 张海波, 蒙应杰, 杨金涛 (113)
- 时延约束组播路由的动态规划算法(英文) 卞 静, 钟 镭 (116)
- 一类特殊完备秘密共享方案的条件 亢保元, 刘 欣, 韩金广 (120)
- 公钥密码体制中模求幂运算的快速实现 亢保元, 刘 欣, 王庆菊 (123)
- 已知签名者和验证者的不可否认的签名方案(英文) 韩金广, 亢保元, 王庆菊 (125)
- 一个门限代理签名方案的改进 亢保元, 王庆菊, 韩金广 (131)

· 工程技术中的数学力问题 ·

- 边界积分方程的机械求积法在油气藏数值模拟中的应用 王婷婷, 吕 涛 (137)
- 二维河道移动边界的流矢量处理法 程 冰, 周晓阳 (141)
- 概率统计在岩土工程技术中的应用浅述 宋强辉, 张 浪 (145)

· 图像压缩与数据处理 ·

- 面向对象的自相似二维分形图动态模板设计 李洪波 (151)
- 基于分形维数的二叉树图像编码 王小侠, 赵凤群, 戴 芳, 等 (156)
- 一种基于 Haar 小波的图像处理技术 吴 昊, 曾国卿 (159)
- 一种基于 HVS 的小波域彩色图像水印算法 董 彬, 林小竹 (163)

基于肤色的人脸检测方法研究	黄 涛 (168)
矩函数在图像重构中的应用	于 晶, 郭 航 (173)
改进的嵌入式小波零树编码算法	王冬梅, 王秀芳, 路敬祎, 等 (176)
影响遥感数据分形测量的因素研究	杜华强, 范文义, 赵宪文, 等 (180)
含噪声的多时间尺度动态系统辨识	罗 晓, 陈 耀, 徐静波, 等 (186)
基于 ARM 与 DSP 的雷达信号处理机的设计	胡玉川, 高世桥 (191)
双边定时截尾场合三参数 Weibull 分布的参数估计	王蓉华, 徐晓岭 (196)
数据缺失场合三参数对数正态分布的参数估计	徐晓岭, 王蓉华, 常 磊 (200)
基于相异度系数和的孤立点挖掘应用与研究	房 伟, 逢玉俊, 路 爽 (206)
基于数值型和分类型混合属性数据集的聚类算法研究	曹露燕, 蒋晓云, 孟凡荣 (209)

· 数学教学研究 ·

类比、联想、推广和数学创造	张 毅 (217)
数学思维在数学教学中的应用	王若恩 (221)
从一道数学竞赛题的开放性教学看数学美	傅 航, 张 毅 (224)
基于网络环境下的高等数学教学改革	李泽好, 窦家维, 郝 莹 (228)
以 Mathematica 为平台的线性代数实验教学	谭宏远 (231)
《复变函数论》教改的探索与实践	马立新, 姜曰华 (234)

CONTENTS

• Mathematics basic study evolve •

The index type entire function defined by hyperspherical series	WANG An - bin, WANG Xiao - hong (3)
Discussion on properties of quasi - concave function and its application	LIU Zong - qian, YU Jia - shang (6)
The intergete function system (IFS) and its application	ZHAO Xuan - ze, ZHANG Ren - jin, HUA Meng - xia (12)
Illustrate three "traps" in the solution of conditional extreme of many variable function with example	SHENG Lan - zhen (15)
Random ordered set theory on nonlinear functional analysis	LI Zhi - long (17)
Set valued square integral martingale	ZHOU Hua - ren, XU Yan, LI Shi - kai (21)
On the theorem of M. Ozawa	ZHANG Tong - dui, WANG Zan - chun (24)
Existence and stability of periodic solutions of a class two - dimensional nonlinear difference equation with parameters	TAN Fu - jin (28)
Mechanical quadrature methods for the first kind volterra integral equations with weakly singular kernels	LI Yu - feng, LU Tao (32)
Osillation of a kind of nonlinear delay difference equation with impulses	HUANG Xian - yong, WU Guang - nian (36)
Method of solving linear equations based on residual space	GU A - lun, SUN Yong - guang (40)
Solution to integral gas fluid equation	HE Ming - fei, LU Tao (44)
Canonical forms under similarity for involutory matrices over the ring of integers modulo 2^m	CHEN Xi (48)
Gauss elimination method of quaternion matrices and its application	YU Sen, FENG Liang - gui (51)
The fast algorithms for finding the inverses and generalized inverses of real tant cyclic matrix	WU Wei (55)
Computing the shift distribution of a permutation using the hungarian method	ZHANG Jin (58)
A selecting and ordering operator in multiple attribute decision making	LIU Xue - sheng, ZOU Kai - qi, WU Wei (63)
A method of calculating steiner triple systems of order v	CHOU Wan - xi (66)
A hybrid quadrilateral membrane element with orthogonal stress ...	WANG Yu, CAO Rui (71)
On the convergence problem of fixed points for strongly pseudo - contractive mapping	CHANG Jing - rong (75)

Concerning the on – line leasing of DVD allotment research of problem

..... ZHAO Lin – long, SHEN Xiao – wei, LUO Yun – zheng, et al (78)

Singles competition arrangment problem for 16 table tennis players CHOU Wan – xi (82)

• Theory foundation and application of mathematics model •

A research on the mathematical model of social grades structure

..... ZHANG Liang, DOU Chun – yi, SHI Shu – li (89)

Global classical solutions to the nonlinear population evolution equation YAN Ping (92)

A model for pre – warning of enterprise financial crisis based on support vector machine

..... SONG Jie – kun, ZHANG Zai – xu, ZHANG Yu (98)

A factory optimal plan decision is only choisen from new building, extended building and

original building QIU Guan – ying (103)

• Computer mathematics •

Optimization theory – based TCP/IP congestion control algorithm

..... CHEN Yuan – yan, YAN You – biao, LUO Xiao – shu (109)

Java language realization and research of LZW lossless compression algorithm

..... ZHANG Hai – bo, MENG Ying – jie, YANG Jin – tao (113)

A dynamic programming algorithm for delay – bounded constraint multicast routing

..... BIAN Jing, ZHONG Lei (116)

Conditions for a class of perfect secret sharing schemes

..... KANG Bao – yuan, LIU Xin, HAN Jing – guang (120)

The speedy implementation of modular exponentiations in public – key cryptosystems

..... KANG Bao – yuan, LIU Xin, WANG Qing – ju (123)

A nonrepudiable threshold proxy signature scheme with known signers and verifiers

..... HAN Jing – guang, KANG Bao – yuan, WANG Qing – ju (125)

An improvement of nonrepudiable threshold proxy signature scheme with known signers

..... KANG Bao – yuan, WANG Qing – ju, HAN Jin – guang (131)

• Mathematics mechanics problem in engineering and engineering and technology •

Quadrature methods for solving boundary integral equation in petroleum industry

..... WANG Ting – ting, LU Tao (137)

The dealing method of moving boundary with finite volume and KFVS for two dimensional
channel CHENG Bing, ZHOU Xiao – yang (141)

Application to the probability and statistics theory for the geotechnical engineering

..... SONG Qiang – hui, ZHANG Lang (145)

• Image condensation and data disposal •

- Design of dynamic template of 2D fractal images of similarity to self based OO
 LI Hong - bo (151)
- Quadtree Image coding based on fractal dimension
 WANG Xiao - xia, ZHAO Feng - qun, DAI Fang, et al (156)
- Image processing based on haar wavelet transform WU Hao, ZENG Guo - qing (159)
- A digital watermarking in wavelet domain based on human visual system
 DONG Bin, LIN Xiao - zhu (163)
- The study of face detection method based on color of skin HUANG Tao (168)
- The use of moment function in image reconstruction YU Jing, GUO Hang (173)
- Improved embedded wavelet zerotree coding algorithm
 WANG Dong - mei, WANG Xiu - fang, LU Jing - yi, et al (176)
- The factors of influence fractal measurement of remote sensing data
 DU Hua - qiang, FAN Wen - yi, ZHAO Xian - wen, et al (180)
- Identification of multiple - time - scale dynamical systems under noisy environment
 LUO Xiao, CHEN Yao, XU Jing - bo, et al (186)
- Design of radar signal processor base on DSP and ARM subsystem
 HU Yu - chuan, GAO Shi - qiao (191)
- The estimation of parameters of three - parameter weibull distribution based on bilateral
 type - i censored sample WANG Rong - hua, XU Xiao - ling (196)
- The estimation of parameters of three - parameter lognormal distribution based on missing
 data XU Xiao - ling, WANG Rong - hua, CHANG Lei (200)
- Application and research of outlier mining based on sum of dissimilarity coefficient
 FANG Wei, PANG Yu - jun, LU Shuang (206)
- Research of clustering algorithm based on numeric - and - bomial mixed data
 CAO Lu - yan, JIANG Xiao - yun, MENG Fan - rong (209)

• Mathematics teach study •

- Analogy, associate with something in thinking, spread and mathematical creation
 ZHANG Yi (217)
- The application of mathematical thinking in mathematics teaching WANG Ruo - en (221)
- From the opening strategy of a mathematic competition problem to research the beauty of
 mathematics FU Hang, ZHANG Yi (224)
- Educational improvement in higher mathematics based on internet environment
 LI Ze - yu, DOU Jia - wei, HAO Ying (228)
- Linear algebra teaching based on mathematica TAN Hong - yuan (231)
- On improving《the theory of functions of complex variables》
 MA Li - xin, JIANG Yue - hua (234)

数 学 基 础 研 究 进 展

Mathematics basic study evolve

超球级数所定义指数型整函数*

王安斌¹, 王小红²

(1. 湖南理工学院 数学与应用数学系, 湖南 岳阳 414006; 2. 岳阳市第九中学, 湖南 岳阳 414000)

摘要: 本文得出了用超球级数所定义整函数为指数型的充要条件, 讨论了两个指数型整函数的和、积及 Hadamard 积的性质及其指标图的性质.

关键词: 超球级数; 指数型整函数; 阶; 型; 指标图; 支持函数

中图分类号 O 174.52 文献标识码: A 文章编号: 7-5416-2336-9(2006)-0003-03

$$\text{设 } F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n^{(\alpha, \alpha)}(z) \quad (1)$$

其中 $p_n^{(\alpha, \alpha)}(z)$ 是 n 次超球多项式, 文[1]证明了当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ 时, $F(Z)$ 为整函数. 对于 $\alpha = 0$ 的情形文[2]得出了(1)的阶与型的公式, 文[1]将文[2]的结果推广到 α 为复数 ($\operatorname{Re} \alpha > 0$) 的情形, 文[3]利用文[2]的结果研究了超球级数的增长性, 文[4]在文[3]的基础上研究了超球级数所定义整函数的型函数. 当 $F(Z)$ 的阶 $\rho \leq 1$ 且型 λ 有限时则称 $F(Z)$ 为指数型整函数. 该文研究由超球级数所定义指数型整函数的性质, 得出了超球级数为指数型整函数的充要条件, 并讨论了指数型整函数的和、积、Hadamard 积的性质, 最后还讨论了指标图的性质.

1 引 理

为了定理的证明我们先证下面的几个引理.

引理 1 设

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (2)$$

为整函数, $M(r) = \max_{|z|=r} |G(z)|$, 则 $G(z)$ 为指数型整函数的充要条件是:

$$M(r) < e^{kr}, r > r_0. \quad (3)$$

其中 k 为一有限正常数.

证明: 首先证明必要性, 设 $G(z)$ 为指数型整函数, 若 $G(z)$ 的阶 $\rho = 1$, 型 λ 为有限, 则可选取正数 $k > \lambda$, 使(3)成立. 若 $G(z)$ 的阶 $\rho < 1$, 则可选取 $\varepsilon > 0$, 使 $\rho + \varepsilon < 1$; 于是当 r 足够大时, 有

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad (4)$$

注意到 $\rho + \varepsilon < 1$, 故 r 足够大时 $r^{\rho+\varepsilon} < kr$

从此及(4)即得(3)式成立.

再证充分性. 从(3)得

$$\log M(r) < kr, r > r_0 \quad (5)$$

于是当 r 足够大时,

$$\frac{\log M(r)}{\log r} < 1 + \frac{\log k}{\log r}$$

从此即知 $G(z)$ 的阶

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} \leq 1$$

若 $G(z)$ 的阶为 1, 则从(5)得

$$\frac{\log M(r)}{r} < k, r > r_0$$

从此即知 $G(z)$ 的型

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r} \leq k$$

即 $G(z)$ 的型 λ 有限, 故 $G(z)$ 是指数型整函数. 充分性证毕, 引理证完.

引理 2 设凸集 G 的支持函数为 $k(\theta)$; 将凸

集 G 平移一向量 $z_0 = x_0 + iy_0$, 得凸集 $\tilde{G}$. 则 $\tilde{G}$ 的支持函数为

$$\tilde{k}(\theta) = k(\theta) + x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$$

2 主要结果及证明

定理 1 设

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} p_n^{(\alpha, \alpha)}(z) \quad (6)$$

* 第一作者简介: 王安斌(1939 -), 男, 教授. 主要研究方向: 特殊函数论.

则 $f(z)$ 为指数型整函数的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty \quad (7)$$

证明: 令 $c_n = \frac{\alpha_n}{n!}, \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

则由条件(7)可写作

$$\delta < +\infty \quad (8)$$

由斯特林公式 $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \{1 + o(1)\}$, 知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n \sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt{2\pi n} (1 + o(1))^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{e}} \right\} \\ &= e\delta \end{aligned} \quad (9)$$

设 $f(z)$ 为由超球级数所定义的指数型整函数, 若 $f(z)$ 的阶 $\rho = 1$, 其型 λ 为有限, 从文献[3]可知

$$(e\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad (10)$$

上式令 $\rho = 1$ 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{2} \sigma e \quad (11)$$

比较(9)、(11)两式, 即知(8)式成立.

若 $f(z)$ 的阶 $\rho < 1$, 选取 μ , 使 $\rho < \mu < 1$, 由文献[3]可知求阶公式为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}}$$

于是当 n 足够大时

$$\log n / \log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} < \mu$$

$$\text{即 } n \sqrt[n]{|c_n|} < n^{1-\frac{1}{\mu}}$$

从此求得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0 \quad (12)$$

从(9)、与(12)可知 $\delta = 0$, 此时(8)式也成立, 必要性得证.

设(8)式成立, 于是可选取正数 k 使 $k > \delta$, 从(9)式可知当 n 足够大时,

$$n \sqrt[n]{|c_n|} < ek \quad \text{因此} \quad \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{ek}{n} \quad (13)$$

从此即知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, 由文献[1]知 $f(z)$ 为整函数, 又从(13)可得

$$\log n / \log \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} < \log n / \log \frac{n}{ek} \quad \text{从此及求阶公式, 知 } f(z) \text{ 的阶}$$

$$\rho \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\log n / \log \frac{n}{ek}) = 1$$

若 $\rho = 1$, 从(8)知 $f(z)$ 的型 λ 有限, 于是 $f(z)$ 为指数型整函数, 充分性证毕, 定理证完.

定理 2 设整函数 $f(z)$ 在椭圆 E_a 上的最大模为 $M(\alpha)$, 则 $f(z)$ 为指数型整函数的充要条件为

$$\tilde{M}(\alpha) < e^{kr}, \quad r > r_0 \quad (14)$$

其中 k 为一有限正数与 r 无关,

$$\alpha = \log(r + \sqrt{1 + r^2}).$$

证明: 记 $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ 显然有

$$M(r) \leq \tilde{M}(\alpha) \leq M(\sqrt{1 + r^2})$$

于是证明定理 2 就等价于证明: $f(z)$ 为指数型整函数的充要条件是 $M(r) < e^{kr}, r > r_0$ 由定理 1 可知定理 2 的结论成立.

定理 3 设

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} p_n^{(\alpha, \alpha)}(z), \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} p_n^{(\alpha, \alpha)}(z) \quad (15)$$

为指数型整函数, 则 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 Hadamard

积

$$f(z) * g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n b_n}{(n!)^2} p_n^{(\alpha, \alpha)}(z) \quad (16)$$

仍为指数型整函数, 且型为零.

证明: 由条件及定理 1 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} < +\infty$$

由斯特林公式, 可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 / \left((2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \cdot \frac{n}{e} (1 + o(1))^{\frac{1}{n}} \right) \right\} \\ &= \sigma \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n b_n}{n!}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0 < +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0 < +\infty$$

再由定理 1 可知 $f(z) * g(z)$ 是指数型整函数, 型为 0 显然.

定理 4 设 $f(z), g(z)$ 都是超球级数所定义的整函数且其阶都不超过 1, 型都有限, 则 $f(z) * g(z)$ 与 $f(z) + g(z)$ 都是指数型整函数.

证明: 由定理 2 知存在正常数 k_1 与 k_2 使

$$\tilde{M}_f(\alpha) < e^{k_1 r}, \quad r > r_1, \quad \tilde{M}_g(\alpha) < e^{k_2 r}, \quad r > r_2$$

$$\text{令 } r_0 = \max(r_1, r_2) = \max(k_1, k_2)$$

$$F(z) = f(z) * g(z) \quad G(z) = f(z) + g(z)$$

于是当 $r > r_0$ 时

$$|G(z)| \leq |f(z)| + |g(z)| < e^{k_1 r} + e^{k_2 r} \leq 2e^{kr} < e^{(k+s)r}$$

$$|F(z)| = |f(z)| |g(z)| < e^{k_1 r} \cdot e^{k_2 r} \leq e^{2kr}$$

从此即得当 $r > r_0$ 时, 有

$$\hat{M}_G(a) < e^{(k_1+a)r}, \hat{M}_F(a) < e^{2kr}$$

于是由定理 2 即知 $G(z)$ 、 $F(z)$ 都为指数型整函数, 定理 4 论完.

推论 有限个由超球级数所定义的指数型整函数之和与积都为指数型整函数.

定理 5 设 $f(z)$ 为由超球级数 (1) 所定义的指数型整函数, α 为常数, 则 $g(z) = e^{\alpha z} f(z)$, 亦为指数型整函数且 $g(z)$ 的指标图 I_g , 可将指标图 I_f 平移向量 $\bar{a}$ 而得.

证明: 显然 $e^{\alpha z}$ 为指数型整函数, 由定理 4 知 $g(z)$ 亦为指数型整函数.

令 $a = \alpha e^{i\varphi}$ ($\alpha > 0$), 则

$$|g(re^{i\theta})| = |e^{\alpha e^{i\varphi} z} f(re^{i\theta})| = e^{\alpha \cos(\theta+\varphi)r} |f(re^{i\theta})|$$

从此即得

$$\frac{\log |g(re^{i\theta})|}{r} = \alpha \cos(\theta + \varphi) + \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } h_g(\theta) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |g(re^{i\theta})|}{r} \\ &= \alpha \cos(\theta + \varphi) \\ &\quad + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r} \end{aligned}$$

$$\text{即 } h_g(\theta) = \alpha \cos(\theta + \varphi) + h_f(\theta)$$

由引理 2 知 $f(z)$ 的指标图 I_f 平移向量 $\bar{a} = \alpha e^{-i\varphi}$ 其所得凸集的支持函数为

$$\begin{aligned} h_f(\theta) + \alpha \cos \theta \cos \varphi - \alpha \sin \theta \sin \varphi \\ = h_f(\theta) + \alpha \cos(\theta + \varphi) \end{aligned}$$

所以 $g(z)$ 的指标图 I_g 为将 I_f 平移向量 $\bar{a}$ 而得.

定理 6 由超球级数所定义的两个指数型函数 $f_1(z)$ 、 $f_2(z)$ 它们的乘积指标图 $I_{f_1 f_2}$ 为 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 指标图 I_{f_1} 、 I_{f_2} 的和集的子集. 即

$$I_{f_1 f_2} \subset I_{f_1} + I_{f_2}$$

证明: 设 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 为两个由超球级数所定义的指数型整函数, 其指数函数顺次为 $h_1(\theta)$ 及 $h_2(\theta)$, 指标图顺次为 I_1 和 I_2 , 令

$$f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$$

则

$$\frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r} = \frac{\log |f_1(re^{i\theta})|}{r} + \frac{\log |f_2(re^{i\theta})|}{r} \quad (17)$$

当 n 充分大时

$$\frac{\log |f_1(re^{i\theta})|}{r} < h_1(\theta) + \varepsilon \quad (18)$$

$$\frac{\log |f_2(re^{i\theta})|}{r} < h_2(\theta) + \varepsilon$$

其中 $\varepsilon > 0$, 从此及 (17) 式即知

$$\begin{aligned} h(\theta) = h_f(\theta) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r} \leq h_1(\theta) \\ &\quad + h_2(\theta) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

由 ε 任意性, 于是可得

$$h(\theta) \leq h_1(\theta) + h_2(\theta) \quad (19)$$

令 $G = I_1 + I_2$, 由定理 4 知 G 的支持函数为

$h_1(\theta) + h_2(\theta)$ 所以从 (19) 式即知 $f(z)$ 的指标图 $I_f \subset G$.

参考文献:

- [1] 王安斌. 超球级数所定义整函数的极大项[J]. 湖南数学年刊, 1998, 18(1): 32~34
- [2] 仪洪勋. 勒让特级数所定义整函数的极大项[J]. 数学杂志, 1983, (4): 371~374
- [3] 王安斌. 关于超球级数的增长性质[J]. 数学研究与评论, 2003, 23(3): 510~513
- [4] 王安斌. 超球级数所定整函数的型函数[J]. 数学研究, 2005, 38(2): 200~207

The index type entire fuction defined by hyperspherical series

WANG An - bin¹, WANG Xiao - hong²

(1. Department of Mathematics, Hunan Institute and Technology, Yueyang 414006, China;

2. The No. 9 Middle School of Yueyang, Yueyang 414000, China)

Abstract: In this paper, the necessary and sufficient condition is established which entire fuction defined by Hyperspherical series is index type entire fuction, and deals with the quality of sum, product and the hadamard product between two index type entire fuctions, their indicatrix qualits also has been given.

Key words: hyperspherical series; entire function; order; type; indicatrix; support function

拟凹函数特性及其应用的讨论^{*}

刘宗谦¹, 于加尚²

(1. 首都师范大学 数学系, 北京 100037; 2. 菏泽学院 数学系, 山东 菏泽 274015)

摘要: 凹函数和拟凹函数的概念及其性质一直是经济学家使用来研究厂商理论和消费者理论的主要数学技术, 函数拟凹性也在其中得到许多深刻的研究. 但是, 在数学上和应用上函数拟凹性并没有得到更为系统的论述, 有的结论不一致, 有的结论可能是错误的. 这篇论文结合函数拟凹性在数学方面和经济学应用中的发展, 比较完整地介绍和叙述了拟凹函数的概念及其一些性质、拟凹函数和凹函数的关系; 对大部分命题给出了扼要的说明或不同的证明; 特别是它通过几个命题而使这些命题之间建立起了一定的逻辑关系, 指出一些命题在经济理论中的应用.

关键词: 拟凹函数; 凹函数; 经济; 应用

中图分类号: F244.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 7-5416-2336-9(2006)-0006-06

在数学中函数拟凹性是函数凹性概念的推广, 在经济学的研究中函数拟凹性又得到了深刻的发展.

在拟凹函数应用于经济理论的最初研究中, de Finetti (1949) 和 Fenchel (1953) 考虑了在什么条件下一个拟凹函数可以通过一个变量的递增函数而变换为一个凹函数的问题^[1]. Arrow 和 Debreu (1954) 最早研究偏好关系的凸性假设, 提出了定义在一个凸消费集上的偏好关系如果满足连续性假设和弱凸性假设, 那么这些偏好就可以用连续的拟凹函数来表示^[2]. 由于数学规划问题几乎被应用来刻画所有经济范围中的基本问题, 且导致这些问题的比较静态分析, 同时数学规划问题如有关约束条件的问题又是通过对确定性经济问题的研究受到影响而发展起来的. 函数拟凹性也在其中得到了广泛的应用和研究, 例如 Arrow 和 Enthoven (1961)、Mangasarian (1969)、Intriligator (1971) 等推广了 Kuhn-Tucker (1951) 条件在相应拟凹假设下是充分条件的结论, 从而导致了需求理论深入的研究^[3]. 上述 3 方面的介绍说明函数拟凹性在经济学的研究和应用中起到了重要的作用. 随后, 有关拟凹和(或)凹函数的文献不断出现, 相应的结果也在效用理论、需求理论、最优化理论、博弈理论等中得到了发挥. 例如, 在效用理论中假设消费者的效用函数是(严格)拟凹的, 通过对其性质的研究, 可

以深刻得出许多刻画消费者行为的结果; 在连续博弈纳什均衡存在的充分条件中同样要求其中的局中人的支付函数是拟凹的, 就能够利用不动点定理证明均衡的存在^[4]. 与此同时, 有关介绍数理经济学内容的、经济学者使用数学分析的一些书, 以及经济学数学手册等都介绍了函数拟凹性的知识^[5-7]. 但是, 在数学和应用上的研究中函数拟凹性并没有得到更为系统的论述, 有的结论不一致, 有的结论可能是错误的.

因此, 在论文余下部分, 即我们在第二部分结合函数拟凹性在经济学中的应用, 介绍和叙述了拟凹函数的概念和一些性质、拟凹函数与凹函数的关系; 对给出的命题做了扼要的说明或不同的证明, 指出其中一些命题在经济理论中的应用, 例如指出抽象经济的社会均衡存在定理^[4]中的条件可以减弱. 而在第三部分, 以拟凹函数的优化问题为主叙述了它的一些特性, 类似给出了简要的说明或其他的证明; 此外, 评价了函数拟凹性与加边 Hessian 矩阵的关系. 特别是, 我们在这篇论文中通过定义 2, 3 和命题 5, 12 等而建立起了若干命题之间一定的逻辑关系.

1 拟凹函数及其他在经济理论中的特性

定义 1 设 $f(x)$ 是凸子集 $X \subset R^n$ 上的连续函

^{*} 第一作者简介: 刘宗谦 (1949 -) 男, 硕士, 副教授. 主要研究方向: 数理经济学.

数, 如果对 $\forall x, x' \in X, \forall \lambda \in [0, 1]$ 都有 $f(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x')$ 或 $f(\lambda x + (1 - \lambda)x') \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x')$, 就称 $f(x)$ 是 X 上的下凸或上凸函数.

在经济学理论中下凸函数称为凸函数, 上凸函数称为凹函数. 在微观经济学中拟凹函数有两个常用的定义.

定义 2 设 f 是一个 R^n 的子集 X 上的函数, 对 $\forall a \in R, P_a = \{x \in X: f(x) \geq a\}$ 称为 f 的水平集; 如果对 $\forall a \in R, P_a$ 都是凸的, 则称函数 f 是 X 上的拟凹函数; 如果 $-f(x)$ 是 X 上的拟凹函数, 则称 $f(x)$ 是 X 上的拟凸函数; 此外, $f(x) = a$ 称为无差异曲面.

由定义 2, 知道拟凹函数性质类似可知拟凸函数的性质. 如拟凹函数的“极大”可转化为凸函数的“极小”. 定义 2 的意义是显然的. 例如在消费者理论中利用它可以得到: 如果 f 是一个凸上偏好次序集上的效用函数, 当且仅当 f 是拟凹的^[8].

定义 3 设 f 是一个 R^n 的非空凸子集 X 上的函数, 如果对 $\forall x, x' \in X, \lambda \in [0, 1]$ 都有 $f(\lambda x + (1 - \lambda)x') \geq \min\{f(x), f(x')\}$, 则称 f 是 X 上的拟凹函数.

定义 3 的意义也是明显的. 例如由它和定义 1 立刻知道: 一个凹函数总是拟凹的, 反过来就未必成立. 这就是拟凹函数称为广义凹函数的由来.

下述命题说明定义 2 和定义 3 是等价的:

命题 1 $f(x)$ 是适合定义 2 的一个拟凹函数, 当且仅当定义 3 被满足.

必要性、充分性直接按 $f(x)$ 满足定义 3、定义 2 的条件来证明; 其中充分性的证明中注意到 $P_a = \emptyset$ 或 P_a 是一个单点集时, P_a 是凸的.

由定义 1 知: 拟凹函数 f 是连续的, 那么 P_a 是闭的. 因为对 $\forall a \in R$, 令 $A = [a, +\infty)$, 则知 $f^{-1}(A) = \{x \in R^n: f(x) \in A\} = \{x \in R^n: f(x) \geq a\} = P_a$ 是闭的.

由定义 3 还容易得到:

命题 2 任意一个定义在非空凸子集上的单调函数是拟凹的.

用函数单调和拟凹性定义可以推出: 拟凹性有直接关系到次序不变的性质, 即

命题 3 f 是 R^n 的凸子集 X 上的拟凹函数, F 是一个定义在 f 的值域上的递增函数, 那么 $F(f(x))$ 在 X 上是拟凹的.

Sydsaeter 指出一个凹函数在严格递增变换下却不一定是凹的^[6]. 而结论应是:

f 是 R^n 的凸子集 X 上的凹函数, F 是一个定义在 f 的值域上的递增凹函数, 那么 $U(x) = F(f(x))$ 是 X 上的凹函数.

然而, 和凹函数不同的是: 拟凹函数的和却不一定是拟凹函数^[7].

凹函数是拟凹函数的子类, 那么在什么条件下一个拟凹函数会是凹函数呢^[1]? 由于微观经济学频繁地研究齐次函数及其应用, Newman(1969) 证明了: 一个 n 元变量的 α ($0 < \alpha \leq 1$) 次齐次函数 f 是凹的当且仅当它是拟凹的^[9]. 有关对 Cobb - Douglas 函数齐次度的讨论验证了 Newman 的结果. Kannai(1977) 也提出: 一个凸偏好次序在什么条件下会成为一个凹函数^[8]? 继续这一讨论, Sydsaeter 和 Hammond(1995) 的结论是, 如果 f 是一个定义在凸锥 $C \subset R^n$ 上的齐次度为 1 的、拟凹的正函数, 则 f 是 C 上的凹函数^[10] (注[1], 见后面注[2]). 由于凹函数是拟凹的, 因此他们的结论也是充分的. 此外, 以凹函数为中间变量的复合函数在下述条件下是拟凹的:

命题 4 设 $f_1, \dots, f_m$ 是定义在 R^n 的非空凸子集 X 上的凹函数, 对 $\forall x \in X$ 定义 $g(x) = F(f_1(x), \dots, f_m(x))$, 且 $F(y_1, \dots, y_m)$ 对变量 $y_j = f_j(x)$ ($j = 1, \dots, m$) 是拟凹的和递增的, 则 $g(x)$ 是 X 上的拟凹函数.

证明 $f_j(x)$ ($j = 1, \dots, m$) 是非空凸子集 X 上的凹函数, 则对 $\forall x, x' \in X, \forall \lambda \in [0, 1]$ 有 $f_j(\lambda x + (1 - \lambda)x') \geq \lambda f_j(x) + (1 - \lambda)f_j(x') \geq \min\{f_j(x), f_j(x')\}$, $j = 1, \dots, m$. 现在 $F(y_1, \dots, y_m)$ 对每个变量 $y_j = f_j(x)$ 是递增的和拟凹的, 这时就有

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1 - \lambda)x') &\geq F(\lambda f_1(x) + (1 - \lambda)f_1(x'), \dots, \lambda f_m(x) + (1 - \lambda)f_m(x')) \\ &= F(\lambda(f_1(x), \dots, f_m(x)) + (1 - \lambda)(f_1(x'), \dots, f_m(x'))) \\ &\geq \min\{g(x), g(x')\} \end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 在 X 上是拟凹的.

下面给出一个可微函数是拟凹函数的充要条件.

命题 5 设 f 是 R^n 的凸子集 X 内的可微函数, 则 f 在 $\text{int}X$ 内是拟凹的, 当且仅当对 $\forall x, x' \in \text{int}X$, $f(x') \geq f(x)$ 时, 有 $\nabla f(x)(x' - x)^T \geq 0$; 其中 $\nabla f(x) = \text{grad}f(x) \neq 0$ 是 f 在点 x 处的梯度, $\nabla f(x)(x' - x)^T$ 表示 $\text{grad}f(x)$ 与 $x' - x$ 的数量积.

证明 给定 $\forall x, x' \in \text{int}X$, 定义 $g(\lambda) = f(x + \lambda(x' - x))$, $\lambda \in [0, 1]$, 则有

$$g'(\lambda) = \nabla f(x + \lambda(x' - x))(x' - x)^T$$

必要性:由 f 在 $\text{int}X$ 内是拟凹的和命题 1, 知 $g(\lambda) \geq g(0)$, 从而

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [g(\lambda) - g(0)]/\lambda = g'(0) = \nabla f(x)(x' - x)^T \geq 0$$

充分性:只要证当 $f(x') \geq f(x)$ 时, $g(\lambda) \geq g(0)$. 若不然, 有一个 $\lambda_0 \in (0, 1)$, 使得 $g(\lambda_0) < g(0)$, 即 $f(x) > f(x_0)$ 且 $\nabla f(x_0)(x - x_0)^T \geq 0$. 这时, 因为 $g(1) \geq g(0)$ 且 g 在 $[0, 1]$ 上连续, 可取 $g'(\lambda_0) > 0$, 有 $\nabla f(x_0)(x' - x)^T > 0$, 而 $x - x_0 = \lambda(x - x')$, 得到

$\nabla f(x_0)(x' - x) = -(1/\lambda_0)\nabla f(x_0)(x - x_0)^T \leq 0$ 这就出现了矛盾. 所以, 对 $\lambda \in [0, 1]$, 总有 $g(\lambda) \geq g(0)$, 即 f 是拟凹的.

命题 5 中必要条件等价于 $\nabla f(x)(x' - x)^T < 0$ 时, $f(x') < f(x)$.

命题 5 中当 f 是凹函数时, 利用方向导数和可微的关系容易证明: f 在 $\text{int}X$ 内是凹的, 当且仅当对 $\forall x, x' \in \text{int}X$, 有 $\nabla f(x)(x' - x)^T \geq f(x') - f(x)$ 成立.

注意(1) f 的拟凹性蕴含 $f(x') > f(x)$, $\lambda \in (0, 1)$, 则 $f(x + \lambda(x' - x)) \geq f(x)$; 这时, 命题必要条件为 $f(x') > f(x)$ 时 $\nabla f(x)(x' - x)^T > 0$, 或 $\nabla f(x)(x' - x)^T \leq 0$ 时 $f(x') \leq f(x)$.

证明 由 $x \in \text{int}X$, 则存在它的一个邻域 $U \subset X$ 和 $\lambda_0 \in (0, 1)$, 使得 $x_0 = x + \lambda_0(x' - x) \in U$, 适合于 $f(x_0) > f(x)$ 利用 f 的连续性, 存在 x_0 的邻域 $V \subseteq U$, 对 $\forall y \in V$, 有 $f(y) > f(x)$; 而 $\nabla f(x) \neq 0$, 可选取 $y \in V$, 使得 $\nabla f(x)(x_0 - y)^T > 0$, 且 $\nabla f(x)(x' - x)^T \geq 0$ 成立, 得出

$$\nabla f(x)[(x_0 - y) + (y - x)]^T = \nabla f(x)(x_0 - x)^T = \nabla f(x)[x + \lambda_0(x' - x) - x]^T = \lambda_0 \nabla f(x)(x' - x)^T > 0 \text{ 所以, } \nabla f(x_1)(x_2 - x_1)^T > 0.$$

定义 4 如果对 $\forall x, x' \in \text{int}X$, $\nabla f(x)(x' - x)^T \leq 0$ 有 $f(x') \leq f(x)$, 则称 f 是 X 上的伪凹函数.

利用命题 5, 我们立刻得到:

f 是 R^n 的凸子集 X 内的可微函数, 对 $\forall x \in \text{int}X$, $\nabla f(x) \neq 0$, 则 f 是拟凹的, 当且仅当它是伪凹的.

命题 4 中的 $f_1, \dots, f_m, g$ 是可微函数时, 其条件可减弱为:

命题 6 设 $f_1, \dots, f_m$ 是 R^n 的凸子集 X 内的可微函数, 对 $\forall x \in X$, 定义 $g(x) = F(f_1(x), \dots, f_m(x)), F(y_1, \dots, y_m)$ 对变量 $y_j = f_j(x) (j = 1, \dots,$

$m)$ 是拟凹的和递增的, 且 g 具有一阶连续的偏导数, 则 $g(x)$ 在 X 上是拟凹的.

证明 利用复合函数偏导的链式规则得到

$$\begin{aligned} \nabla g(x) &= (\partial g / \partial x_1, \dots, \partial g / \partial x_n) \\ &= (\partial F / \partial y_1, \dots, \partial F / \partial y_m)(\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_m(x))^T \\ &= \sum_{j=1}^m \partial F / \partial y_j \cdot \nabla f_j(x) \end{aligned}$$

其中 $\nabla f_j(x) = (\partial f_j(x) / \partial x_1, \dots, \partial f_j(x) / \partial x_n), j = 1, \dots, m$. 由命题条件和命题 5, 对 $\forall x, x' \in \text{int}X$, 不妨假设 $f_j(x') \geq f_j(x)$, 就有 $\nabla f_j(x)(x' - x)^T \geq 0$ 且 $\partial F / \partial y_j \geq 0, j = 1, \dots, n$. 同时, 可知 $g(x') \geq g(x)$. 从而得到 $\nabla g(x)(x' - x)^T \geq 0$, 因此 g 在 X 上是拟凹的.

令 $y_j = f_j(x_1, \dots, x_n) = x_j, j = 1, \dots, n$ 且 $g(x) = f(x_1, \dots, x_m)$, 即 $F = f, n = m$. 这时由命题 4 或命题 6 得到

命题 7 $f(x_1, \dots, x_n)$ 在 R^n 的非空凸子集 X 上是拟凹的, 当且仅当 $f(x_1, \dots, x_m)$ 对每个变量 $x_i (i = 1, \dots, n)$ 是拟凹的.

Debreu(1952) 描述了抽象经济社会且证明该抽象经济社会存在一个经济均衡; 受到 Mas - Colell(1974) 类似于 Debreu 工作的激发, Shafer 和 Sonnenschein(1975) 建立了抽象经济的社会均衡存在定理; 在这个社会经济中局中人的偏好关系可以不是完备的或可递的. 连续博弈的纳什均衡存在定理中的一个证明就是作为一种特殊的社会均衡存在定理来证明的^[4,11]. 利用命题 7, 我们可以把上述定理中的条件“局中人的支付函数是他自己策略集上的拟凹函数”变成“局中人的支付函数都是策略直积上的拟凹函数”, 而不会改变这些定理的结果.

除拟凹函数外, 在效用理论、(非) 线性规划中, 严格拟凹函数是重要的. 因为经济学家更关心总体最优值; 且严格拟凹函数等价于严格凸偏好关系, 而严格凸偏好下的任何无差异类都不包含有非单点的非空凸子集; 此外, 需求函数的存在性还以严格凸性为基础^[12].

定义 5 设 f 是 R^n 的凸子集 X 上的一个函数, 如果对 $\forall x, x' \in X$ (或 $\forall x, x' \in \text{int}X$), 当 $x' \neq x$ 且 $\lambda \in (0, 1)$, 都有 $f(\lambda x + (1 - \lambda)x') > \min\{f(x), f(x')\}$, 则称 f 在 X 上(或 X 内) 是严格拟凹的; 若 $-f$ 为严格拟凹的, 则称 f 为严格拟凸的.

在现有文献中有关对严格拟凹函数的定义是