有限元分析的基本方法及工程应用

周昌玉　贺小华　编著

化学工业出版社
教材出版中心

有限元分析的基本方法及工程应用

周昌玉　贺小华　编著

化学工业出版社
教材出版中心
·北京·

本书较系统地介绍了有限元法的基本理论和方法、ANSYS 软件基本使用方法和工程应用方法，力求使读者掌握有限元法的基本概念、基本理论以及应用。

全书共分 2 篇，13 章，内容包括有限元法的基本方法和理论、平面问题的有限元法、轴对称问题的有限元法、空间问题的有限元法、杆梁问题的有限元法、板壳问题的有限元法、结构振动问题的有限元法、温度场问题的有限元法、非线性问题的有限元法、ANSYS 基本使用方法、ANSYS 应用案例、基于 ANSYS 的工程应用。

本书可作为机械类专业的研究生、高年级本科生教材，也可供从事有限元教学的教师以及工程技术人员和科学工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

有限元分析的基本方法及工程应用 / 周昌玉，贺小华编著. —北京：化学工业出版社，2006.6

ISBN 7-5025-8738-1

Ⅰ. 有… Ⅱ. ①周… ②贺… Ⅲ. 有限元分析－高等学校－教材 Ⅳ. 0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 072668 号

有限元分析的基本方法及工程应用

周昌玉 贺小华 编著

责任编辑：程树珍

文字编辑：项 潋

责任校对：凌亚男

封面设计：潘 峰

*

化学工业出版社
教 材 出 版 中 心 出版发行

(北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029)

购书咨询：(010)64982530

(010)64918013

购书传真：(010)64982630

http: // www.cip.com.cn

*

新华书店北京发行所经销

北京永鑫印刷有限责任公司

三河市前程装订厂装订

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 16½ 字数 428 千字

2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-8738-1

定 价：38.00 元

前　言

有限元法已经成为当今工程问题中应用最广泛的数值计算方法。了解有限元分析的基本理论和方法，掌握有限元分析软件的应用已经成为机械工程类专业研究生的基本要求。根据近几年研究生课程教学实践和经验，本书将重点放在有限元的基本概念、基本方法以及 ANSYS 软件的实际应用上。通过这样一本教材使得学生达到学以致用的目的。

全书共分 2 篇，13 章。第 1 篇的具体内容包括有限元法的基本方法和理论、平面问题的有限元法、轴对称问题的有限元法、空间问题的有限元法、杆梁问题的有限元法、板壳问题的有限元法、结构振动问题的有限元法、温度场问题的有限元法、非线性问题的有限元法。第 2 篇具体内容包括 ANSYS 基本使用方法、ANSYS 应用案例、基于 ANSYS 的工程应用。

本书第 1～9、10、12 章由周昌玉编写，第 11、13 章由贺小华编写。在编写过程中，南京工业大学纪冬梅硕士、张国栋硕士、张伯君硕士等为本书的文字输入工作付出了许多精力和时间，在此表示感谢。

本书的出版得到了“南京工业大学研究生重点课程建设基金”的资助，在此特别致谢。

由于编者水平所限，书中不妥之处敬请读者批评指正。联系方式: changyu_zhou@163.com。

编　者

2006.04.08

目　录

第1篇　有限元分析的基本方法和理论

第 2 篇 有限元法应用——ANSYS 应用案例

附 录

第 1 篇

有限元分析的基本方法和理论

第1章 绪 论

科学技术领域的许多工程分析问题，如固体力学中的位移场和应力场分析、传热学中温度场分析、流体力学中的流体分析、振动特性分析以及电磁学中的场分析等，可归结为在给定边界条件下求解控制方程的问题。这些问题中，能用解析方法求出精确解的只是少数方程性质比较简单，而且几何形状相当规则的问题。对于大多数工程技术问题，由于求解对象的几何形状比较复杂，或者是问题的非线性性质，无法得到问题的解析解。要解决这类问题，必须针对性地进行处理。一种途径是简化假设，将方程和几何边界简化为能够处理的问题，获得在简化条件下的解。但过多的简化可能导致结果的不正确甚至错误。另一种途径是借助计算机技术的发展，采用数值计算方法求解复杂工程问题，获得问题的近似解。

目前，在工程技术领域，数值分析方法主要有：有限元法、边界元法和有限差分法等，其中有限元法已成为当今工程问题中应用最广泛的数值计算方法。有限元法经过 40 多年的发展，理论已经相当完善。科技人员将有限元理论、数值计算技术和计算机辅助设计技术等相结合，开发出一批通用的有限元软件。这些软件功能强大、使用方便、结果可靠，解决了涉及机械、土木、冶金、气象、宇航等行业的工程问题，其计算结果已经成为各类工业产品设计和性能分析的重要依据。

1.1 有限元的发展历史

有限元法的基本思想早在 20 世纪 40 年代初期就有人提出。1941 年赫兰尼可夫（A. Hrenikoff）首先提出用隔栅的集合体表示二维与三维的结构体，这是离散化的最早思想。1943 年库兰特（R. Courant）也应用了“单元”的法则，但当时没有引起人们的注意和重视。到了 20 世纪 50 年代，由于工程上的需要，特别是高速电子计算机的出现与应用，有限元法才在结构分析矩阵方法的基础上迅速发展起来，并得到愈来愈广泛的应用。1952 年拉格福斯（B. Langefors）采用了矩阵变换方法对壳体进行结构分析。1954～1955 年阿吉里斯（J.H. Argris）相继发表了一系列有关结构分析矩阵方法的论文，并于 1960 年出版了《能量原理与结构分析》一书。它对弹性结构的基本能量原理作了综合和推广，并发展实际的分析方法，成为结构分析、矩阵方法的经典著作之一。

1955 年特纳（M.J. Turner）、克拉夫（R.W. Clough）、马丁（H.C. Martin）和托普（L.C. Topp）等在他们的著作中，提出了计算复杂结构刚度影响系数的方法，并应用电子计算机进行计算分析。他们将位移法应用到平面应力问题中，把结构分割成单个的三角形和矩形单元。每一单元特性用单元的结点力与结点位移相联系的单元刚度矩阵表征。1959 年特纳在《结构分析的直接刚度法》一文中正式提出了用直接刚度法集合有限元的总方程组。“有限元法”这一名称由克拉夫于 1960 年首先提出。

在 1960～1970 年这十年中，许多学者，例如梅劳歇（R.J. Meloshi）、贝赛林（J.F. Besseling）、王京斯（R.E. Jones）、卞学璜、赫尔曼（L.R. Herrmann）、巴脱（M.A. Biot）、普拉格（W. Prager）、董平等对各种不同变分原理的有限元模型做出了卓越的贡献。

1969 年奥登（J.T. Oden）从能量平衡法出发，成功地列出了热弹性问题有限元解析的方

程组。斯查勃（B.A. Szabo）和李（G.C. Lee）在1969年利用迦辽金（Б.Г.Галёркин）法得到了平面问题的有限元解。

从单元的类型而言，已从一维的杆单元、二维的平面单元发展到三维的空间单元、板壳单元、管单元等；从常应变单元发展到高次单元。1966年欧格托蒂斯（B. Ergatoudia）、艾路斯（B.M. Irons）和齐克维茨（O.C. Zienkiewicz）为等参单元的发展奠定了基础，使计算精度有了较大的提高，并可适用各种复杂的几何形状和边界条件。

有限元法起源于结构分析理论，近年来由于它的理论与公式逐步改进和推广，不仅在结构理论本身范围内由静力分析发展到动力问题、稳定问题和波动问题，由线性发展到非线弹性和塑性，而且该方法已经在连续体力学的一些场问题中得到应用，例如热传导、流体力学、电磁场等领域中的问题。

近些年来，在计算机程序的编制方面，也有了非常大的发展。由于有限元法的通用性，它已经成为解决各种问题的强有力和灵活通用的工具。因此不少国家编制了大型通用的计算机程序，其中比较常用的有：SAP、ADINA、ANSYS、ALGOR、NASTRAN、ABAQUS、COSMOS和MARC等。

有限元在工程分析中的作用已从分析、校核扩展到优化设计并和计算机辅助设计技术相结合。可以预见，随着现代力学、计算数学和计算机技术等学科的发展，有限元法作为一个具有巩固理论基础和广泛应用效力的数值分析工具，必将得到进一步的发展和完善，在国民经济建设和科学技术中发挥更大的作用。

1.2 有限元的基本思想

有限元的基本思想可归纳如下。

首先，将表示结构的连续体离散为若干个子域（单元），单元之间通过其边界上的结点相连接成组合体。

其次，用每个单元内所假设的近似函数分片地表示全求解域内待求的未知场变量。每个单元内的近似函数用未知场变量函数在单元各个结点上的数值和与其对应的插值函数表示。由于在连接相邻单元的结点上，场变量函数应具有相同的数值，因而将它们用作数值求解的基本未知量，将求解原函数的无穷多自由度问题转换为求解场变量函数结点值的有限自由度问题。

最后，通过和原问题数学模型（基本方程、边界条件）等效的变分原理或加权余量法，建立求解基本未知量（场变量函数的结点值）的代数方程组或常微分方程组，应用数值方法求解，从而得到问题的解答。

简言之，有限元分析实际问题的主要步骤为：建立模型，推导有限元方程列式，求解有限元方程组，数值结果表述。

1.3 有限元方法的特点

有限元法经过 50 多年的迅速发展和愈来愈广泛的应用，成为现代工业与工程技术密不可分的组成部分。有限元法所具有的特点表现在以下几个方面。

（1）物理概念清晰

可以在不同的理论层面建立有限元法的理解，既可以通过非常直观的物理解释来理解，也可以建立严格的数学理论分析。

（2）复杂结构的适应性

在固体力学及其他连续体力学中，只有一些特殊类型的位移场和应力场才能求得微分方程式的解。对于多数复杂的实际结构得不到解，而有限元法对于完成这些复杂结构的分析是一种十分有效的方法。有限元法利用离散化将无限自由度的连续体力学问题变为有限单元结点参数的计算，虽然它的解是近似的，但适当选择单元的形状与大小，可使近似解达到满意的程度。

（3）各种物理问题的适用性

有限元法不仅能处理线弹性力学、非均质材料、各向异性材料、非线性应力-应变关系、大变形、动力学和屈曲问题等，还能解决热传导、流体力学、电磁场等问题以及不同物理现象的耦合问题，应用范围极为广泛。

（4）适合计算机实现的高效性

有限元法引入边界条件的办法简单，边界条件不需要引进单个有限元的方程，而是求得整个集合体的代数方程后再引进，所以对内部和边界上的单元都能采用相同的场变量函数，而且当边界条件改变时，场变量函数不需要改变，对编制通用化程序带来了极大的简化。其次，有限元法通常采用矩阵表达式，便于编程计算。计算机不仅可以快速求解问题，而且使求解问题的方法规范化、软件商业化，为有限元的发展、应用奠定了坚实的基础。

第 2 章　有限元法的基本方法和理论

2.1　弹性连续体的有限元——位移法

在工程技术领域，许多问题需要求解弹性连续体的应力与应变分布状况。一般有二维平面应力或应变问题、轴对称问题、板弯曲问题、壳体问题以及三维问题。对于这些问题的求解可以用位移法获得。

① 将连续面或连续体用线或面分解成若干有限单元；

② 这些单元在其边界上的离散结点处互相连续，其结点位移为所求问题的基本未知参数；

③ 选择一组函数，用每个有限单元的结点位移唯一地确定该单元中的位移状态；

④ 根据结点位移由位移函数唯一地确定单元中的应变状态，再由单元材料的本构性质，确定单元内部及边界上的应力状态；

⑤ 确定作用在各结点的集中载荷，得到单元的刚度关系式；

⑥ 位移、应力方程的求解。

显然，上述过程已经引入近似处理方法，一是保证所选的位移函数满足相邻单元间位移连续要求，在单元边界处可能违反协调条件；二是等效集中载荷在总体意义下满足平衡条件，而每个单元中以及其边界上可能会局部违反平衡条件。

为了得到适用于任何情况的一般形式结果，以下用平面应力分析案例说明一般关系。

2.1.1　位移函数

一典型的有限单元 e 由结点 i,j,m 以及直线边界确定，该单元中任意一点的位移 $\boldsymbol{\delta}$ 为

$$\boldsymbol{\delta}=\sum \boldsymbol{N}_i\boldsymbol{\delta}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_i & \boldsymbol{N}_j & \boldsymbol{N}_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}_i\\ \boldsymbol{\delta}_j\\ \boldsymbol{\delta}_m\end{Bmatrix}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^e \tag{2-1}$$

式中　$\boldsymbol{N}$——给定分量，位置的函数；

$\boldsymbol{\delta}^e$——单元的结点位移。

对于平面应力情况

$$\boldsymbol{\delta}=\begin{Bmatrix}u(x,y)\\ v(x,y)\end{Bmatrix} \tag{2-2}$$

式（2-2）表示单元中任意一点 (x,y) 的水平及垂直位移。

$$\boldsymbol{\delta}_i=\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\end{Bmatrix} \tag{2-3}$$

式（2-3）表示单元中结点 i 的水平及垂直位移。

函数 $\boldsymbol{N}_i$，$\boldsymbol{N}_j$，$\boldsymbol{N}_m$ 的选择原则：在式（2-1）中分别代入各结点的坐标时，将得到相应结点的位移，故有

$$\boldsymbol{N}_i(x_i,\ y_i)=\boldsymbol{I}\ （单位矩阵）$$

$$N_i(x_j, y_j) = N_i(x_m, y_m) = 0$$

函数 $\boldsymbol{N}$ 称为形状函数，它在有限元分析中起着重要作用。

2.1.2 应变

利用单元中各点处已知的位移，确定任意一点处的应变

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{L\delta} \tag{2-4}$$

式中 $\boldsymbol{L}$ 是一个线性算子，利用式(2-1)，有

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{LN\delta}^e \tag{2-5}$$

记 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{LN}$ ，有

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B\delta}^e \tag{2-6}$$

对于平面应力情况，线性算子 $\boldsymbol{L}$ 由位移关系式确定

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \tag{2-7}$$

利用已经确定的形状函数 $\boldsymbol{N}_i$, $\boldsymbol{N}_j$, $\boldsymbol{N}_m$，即可得到 $\boldsymbol{B}$。

2.1.3 应力

一般情况下，单元边界内的材料可以承受初应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$，则应力由真实应变与初应变之差引起。假设材料是一般的线性弹性体，则应力与应变之间的关系是线性的，具有以下形式

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \tag{2-8}$$

对于平面应力情况，应力记为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2-9}$$

弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$ 可由弹性力学理论得到

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x - (\varepsilon)_0 &= \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}\sigma_y \\ \varepsilon_y - (\varepsilon)_0 &= -\frac{\mu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y \\ \gamma_{xy} - (\gamma_{xy})_0 &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{2-10}$$

由上式可得

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{2-11}$$

2.1.4 等效结点力

用列阵

$$\boldsymbol{F}^e=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}_i^e\\ \boldsymbol{F}_j^e\\ \vdots\end{Bmatrix} \tag{2-12}$$

表示作用在单元上的集中力、分布载荷、体积力等静力等效的结点力。

平面应力情况下

$$\boldsymbol{F}_i^e=\begin{Bmatrix}F_{xi}\\ F_{yi}\end{Bmatrix} \tag{2-13}$$

其中分量 F_{xi} 和 F_{yi} 的方向与位移 u、v 方向一致。

为了使结点力同实际边界应力以及分布载荷静力等价，简单的方法是施加一任意的（虚）结点位移，使位移所做的外力功与内力功相等。

设各结点处的虚位移是 $\boldsymbol{\delta}^{e*}$，由式(2-1）和式(2-6)，虚位移在单元中引起的位移及应变分别为

$$\boldsymbol{\delta}^*=\boldsymbol{N\delta}^{e*}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^*=\boldsymbol{B\delta}^{e*}$$

结点力所做的功等于各个力的分量与相应位移分量的乘积之和，矢量表达形式为

$$(\boldsymbol{\delta}^{e*})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^e$$

单位体积中应力所做的内力功

$$(\boldsymbol{\varepsilon}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}=(\boldsymbol{B\delta}^{e*})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}$$

对单元的体积 V^e 积分得到总的内力功，使外力功与它的内力功相等，有

$$(\boldsymbol{\delta}^{e*})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^e=\int_{V^e}(\boldsymbol{B\delta}^{e*})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}V \tag{2-14}$$

对于任意虚位移，式(2-14）成立，所以两边乘子必定相等，于是

$$\boldsymbol{F}^e=\int_{V^e}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}V \tag{2-15}$$

上式普遍地适用于任一应力-应变关系的情况，据式(2-8)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}^e&=\int_{V^e}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_0)\mathrm{d}V\\ &=\int_{V^e}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D\varepsilon}\mathrm{d}V-\int_{V^e}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D\varepsilon}_0\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{2-16}$$

记

$$\boldsymbol{k}=\int_{V^e}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DB}\mathrm{d}V$$
$$\boldsymbol{F}_0^e=-\int_{V^e}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D\varepsilon}_0\mathrm{d}V$$
$$\boldsymbol{F}^e=\boldsymbol{k\delta}^e+\boldsymbol{F}_0^e \tag{2-17}$$

式(2-16）右端第二项表示由初应变所引起的力。

通过求解总的“结构”型方程组(2-17）确定结点位移，就能由式(2-6）和式(2-8）求出系统中任一点处的应力

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{DB\delta}^e-\boldsymbol{D\varepsilon}_0 \tag{2-18}$$

2.2 有限元概念的一般化理论基础——加权余量法

2.2.1 微分方程的等效积分形式

工程技术或物理学中许多问题都以未知场函数应满足的微分方程和边界条件的形式提

出，一般可表示为未知函数$\boldsymbol{\delta}$ 应满足微分方程组

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\delta})=\begin{Bmatrix}A_1(\boldsymbol{\delta})\\A_2(\boldsymbol{\delta})\\\vdots\\\vdots\end{Bmatrix}=0 \qquad （在域 \varOmega 内） \tag{2-19}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\delta})\begin{Bmatrix}B_1(\boldsymbol{\delta})\\B_2(\boldsymbol{\delta})\\\vdots\\\vdots\end{Bmatrix}=0 \qquad （在边界 \varGamma 上） \tag{2-20}$$

域 $\varOmega$——体积域或面积域；边界 $\varGamma$——域 $\varOmega$ 的边界。

所求的未知函数$\boldsymbol{\delta}$可以是标量，也可以是若干变量组成的一个向量。微分方程可以是单个方程或一组方程。所以式(2-19）和式(2-20）采用矩阵向量形式。

由于微分方程组式(2-19）在域 $\varOmega$ 中每一点都为零，于是有

$$\int_{\varOmega}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\delta})\mathrm{d}\varOmega\equiv\int_{\varOmega}\left[v_1A_1(\boldsymbol{\delta})+v_2A_2(\boldsymbol{\delta})+\cdots\right]\mathrm{d}\varOmega\equiv 0 \tag{2-21}$$

式中，$\boldsymbol{v}=\left[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n\right]^{\mathrm{T}}$ 为任一函数向量，其个数等于方程数。式(2-21)是与式(2-19)完全等效的积分形式。

若积分方程式(2-21）对任意$\boldsymbol{v}$都能成立，则微分方程式(2-19）必定在域内任一点都能满足。这一结论很显然，假如在域中的任意一点或部分子域有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\delta})\neq 0$，则可以找到一个函数$\boldsymbol{v}$，使式(2-21）的积分不等于零。

同理，对边界条件式(2-20）有积分表达式

$$\int_{\varGamma}\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\delta})\mathrm{d}\varGamma\equiv\int_{\varGamma}[\bar{v}_1B_1(\boldsymbol{\delta})+\bar{v}_2B_2(\boldsymbol{\delta})+\cdots]\mathrm{d}\varGamma\equiv 0 \tag{2-22}$$

合并式(2-21）和式(2-22)，积分表达式

$$\int_{\varOmega}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\delta})\mathrm{d}\varOmega+\int_{\varGamma}\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\delta})\mathrm{d}\varGamma=0 \tag{2-23}$$

对任一$\boldsymbol{v}$和$\bar{\boldsymbol{v}}$都满足上式即等价于满足微分方程式(2-19）和边界条件式(2-20)。式(2-23)称为微分方程的等效积分形式。

2.2.2 等效积分形式的近似方程——加权余量法

在求解域 $\varOmega$ 及其边界 $\varGamma$ 上的任一点都满足微分方程式(2-19）和边界条件式(2-20）的精确解$\boldsymbol{\delta}$ 一般难以找到，因此，需要寻找其近似解。

对于求解问题的微分方程式(2-19）和边界条件式(2-20)，将未知函数$\boldsymbol{\delta}$ 采用近似函数表示

$$\boldsymbol{\delta}\approx\tilde{\boldsymbol{\delta}}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{N}\boldsymbol{a} \tag{2-24}$$

式中 $\boldsymbol{a}_i$——待定系数；

$\boldsymbol{N}_i$——给定的形函数；

n——待定函数的个数。

在n为有限项数的情况下，近似解不能完全满足微分方程式(2-19）和式(2-20)，即产生残差，记

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a})\\\bar{\boldsymbol{R}}&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a})\end{aligned} \tag{2-25}$$

残差 $\boldsymbol{R}$ 、 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 称为余量。

取有限个给定的函数代替式（2-23）中任意的函数 $\boldsymbol{v}$ 、 $\overline{\boldsymbol{v}}$ ，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{W}_j\\ \overline{\boldsymbol{v}}&=\overline{\boldsymbol{W}}_j\end{aligned}\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{2-26}$$

代入式（2-23），近似的等效积分形式为

$$\int_\Omega \boldsymbol{W}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a})\mathrm{d}\Omega+\int_\Gamma \overline{\boldsymbol{W}}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a})\mathrm{d}\Gamma=0\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{2-27}$$

写成余量的形式，则有

$$\int_\Omega \boldsymbol{W}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\mathrm{d}\Omega+\int_\Gamma \overline{\boldsymbol{W}}_j^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{R}}\mathrm{d}\Gamma=0\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{2-28}$$

式（2-28）为余量的加权积分， $\boldsymbol{W}_j$ 和 $\overline{\boldsymbol{W}}_j$ 称为权函数，因此，这种近似方法可称为加权余量法。

由余量的加权积分为零，确定近似函数 $\boldsymbol{\delta}$ 或残量中的待定系数 $\boldsymbol{a}_i$ ，得到原问题的近似解。

加权余量法是求解微分方程近似解的一种有效方法。由于任何独立的函数 $\boldsymbol{W}_j$ 、 $\overline{\boldsymbol{W}}_j$ 可作为权函数，选择不同的加权余量，其计算方法有不同的名称，如配点法、子域法、最小二乘法、力矩法和伽辽金法等。

2.2.3 伽辽金法

伽辽金法是加权余量方法中的一种。它将原来的形函数作为权函数，即： $\boldsymbol{W}_j=\boldsymbol{N}_j$ ，在边界 Γ 上， $\overline{\boldsymbol{W}}_j=-\boldsymbol{W}_j=-\boldsymbol{N}_j$ ，于是式（2-27）可写为

$$\int_\Omega \boldsymbol{N}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{a}_i\right)\mathrm{d}\Omega-\int_\Gamma \boldsymbol{N}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{a}_i\right)\mathrm{d}\Gamma=0\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{2-29}$$

伽辽金方法求解方程的系数矩阵往往是对称的，因此在用加权余数法建立有限元法时，大多采用伽辽金方法。

下面给出一个应用伽辽金法求解一维热传导问题的例子。

【例 2-1】 一维热传导问题，热传导系数为 1，则热传导方程为

$$A(\Phi)=\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2}+Q=0\qquad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

式中

$$Q(x)=\begin{cases}1, & \text{当}\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 0, & \text{当}\ \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

边界条件为 $x=0$ 和 $x=1$ 时， $\Phi=0$ ，用伽辽金法求近似解。

解 取傅里叶级数为近似解，即有

$$\Phi\approx\widetilde{\Phi}=\sum_{i=1}^{n}a_i\sin i\pi x$$

a_i 为待定系数，形函数为 $N_i=\sin i\pi x$ ，近似解 $\widetilde{\Phi}$ 满足边界条件，无余量，近似解 $\widetilde{\Phi}$ 在域中连续。因此，由式（2-28）

$$\int_0^1 W_j\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\sum_{i=1}^{n}N_ia_i\right)+Q\right]\mathrm{d}x=0$$

由伽辽金法，$W_j = N_j$，对上式进行分部积分，有

$$W_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i a_i\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i a_i\right)\frac{\mathrm{d}W_j}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \int_0^1 W_j Q \mathrm{d}x = 0$$

由于在边界处$W_j = 0$，上式简化为

$$\int_0^1 \left[\frac{\mathrm{d}W_j}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i a_i\right) - W_j Q\right]\mathrm{d}x = 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

上式可改写为

$$\boldsymbol{Ka} + \boldsymbol{F} = 0$$

式中

$$\boldsymbol{F} = [F_1 \quad F_2 \quad \cdots \quad F_n]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]^{\mathrm{T}}$$

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}N_j}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$F_i = -\int_0^1 W_i Q \mathrm{d}x$$

对伽辽金法$W_j = N_j$，存在$K_{ij} = K_{ji}$，即求解待定系数a_i的代数方程组的系数矩阵K为对称的。

当然，近似解的项数对求解的精度有影响，近似的阶次越高，所得解的精度越好。

本例伽辽金法的近似一项解和二项解求解过程如下。

当$i = 1$时，$\varPhi = a_1 \sin \pi x$，有

$$N_1 = \sin \pi x, \quad W_1 = \sin \pi x$$

故

$$\int_0^1 \left[\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} N_1 a_1 - W_1 Q\right]\mathrm{d}x = 0$$

即

$$\int_0^1 [\pi \cos(\pi x) a_1 \pi \cos \pi x - Q \sin \pi x]\mathrm{d}x = 0$$

求得

$$a_1 = \frac{2}{\pi^3}$$

则一项解

$$\tilde{\varPhi} = \frac{2}{\pi^3} \sin \pi x$$

当$i = 2$时，$\varPhi = a_1 \sin \pi x + a_2 \sin 2\pi x$，有

$$W_1 = N_1 = \sin \pi x, \quad W_2 = N_2 = \sin 2\pi x$$

故

$$\int_0^1 \left[\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(N_1 a_1 + N_2 a_2) - W_1 Q\right]\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_0^1 \left[\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(N_1 a_1 + N_2 a_2) - W_2 Q\right]\mathrm{d}x = 0$$