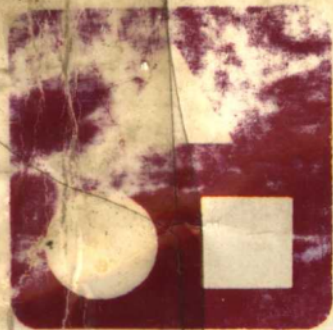




数学

高二解析几何

中国教育电视台讲座用书

同步辅导教材

兼做家教、配有录像带

- 学习方法介绍
- 重点难点讲解
- 解题思路分析
- 巩固思路分析
- 紧扣教学大纲
- 同步辅导必备

北京名师导学

九州图书出版社

北京名师异学 高二解析几何

北京艺豪语言教育中心

高中同步辅导用书

高中一年级语文	13.00	高中二年级语文	13.00	高中三年级语文	13.00
高中代数(上册)	11.00	高中代数(下册)	11.00	高中三年级英语	11.00
高中立体几何	9.00	高中解析几何	9.00	高中三年级物理	11.00
高中一年级英语	13.00	高中二年级英语	10.00	高中三年级化学	10.00
高中一年级物理	8.00	高中二年级物理	11.00	高中三年级历史	9.00
高中二年级化学	11.00	高中二年级化学	11.00	高中三年级政治	8.00
高中一年级政治	9.00	高中二年级历史	9.00		

中国教育电视台第一套节目、北京电视台35频道从1996年9月9日起播讲
4和教材,敬请关注。请查看《中国电视报》。

责任编辑:黄 铭 刘 通

封面设计:柏 青

ISBN 7-80114-150-4



0-787801-1507>

ISBN 7-80114-150-4

72

中国教育电视台讲座用书
北京艺豪语言教育中心资料

北京名师导学

高中二年级解析几何

主编 王建民(中国科大附中 特级教师)
编者 李公月 闫达伟 徐 延 王建民
审定 陈 翔(北京一二三中 高级教师)
王人伟(北京北航附中 特级教师)

九洲图书出版社

· 北京 ·

《北京名师导学》编写委员会成员

主 任 王绍宗

副主任 刘玉兰 刘 强

编 委 李龙文 杨绍波 李 恕 陈 颖

王英民 刘千捷 李秉仁 王树森

苑书博 刘庆海 邓淑敏

北 京 名 师 导 学 高中二年级解析几何

王建民 主编

*

九洲图书出版社出版

(地址:北京市车公庄大街6号市委党校2号楼 邮编:100044)

新华书店发行

北京市京东印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张8.875 字数 170 千字

1996年9月第1版 1996年9月第1次印刷

印数 1—10,000 册

ISBN 7-80114-150-4/G·75

定价:9.00 元

版权所有 翻印必究

如发现印、装质量问题,影响阅读请与九洲图书出版社联系

编写说明

《北京名师导学》丛书由北京市一帮一助教协会和北京艺豪语言教育中心组织编写,由九州图书出版社出版,由中国教育电视台面向全国播放。

这套丛书共计 64 册,参与编写、审定的教师达 200 余人,经过一年的讨论、编写、修改,把各位特级教师、高级教师的一生心血、经验体会都渗透到丛书中,这是一套加强素质教育的丛书。

这套书主要内容有:学习方法介绍、知识要点提炼、重点难点讲解、解题思路分析、巩固提高练习(A、B 卷)、期中期末测试。

各年级各册均以大纲为主,与人教社最新教材同步,抓住基础,培养能力,搞好测试。使丛书成为广大师生的良师益友,具有开卷有益、初读有趣、复读启迪、教学参考、学习助手的作用。

本册供高中二年级学生全学年使用。

《北京名师导学》编委会

1996 年 9 月

目 录

第一章 直线..... (1)

知识要点..... (1)

学习指导..... (2)

1. 有向线段、两点间距离..... (2)

2. 线段的定比分点..... (6)

3. 直线的方程..... (10)

4. 直线方程的几种形式..... (21)

5. 两条直线的平行与垂直..... (27)

6. 两条直线的夹角(所成的角)..... (40)

7. 两条直线的交点..... (47)

8. 点到直线的距离..... (52)

综合训练(A)(B)..... (58)

第二章 圆锥曲线..... (64)

知识要点..... (64)

学习指导..... (66)

1. 曲线的方程..... (66)

2. 求曲线的方程..... (70)

3. 充要条件..... (82)

4. 曲线的交点..... (86)

5. 圆..... (102)

6. 椭圆..... (123)

7. 双曲线..... (153)

8. 抛物线	(166)
9. 坐标变换	(176)
综合训练(A)(B)	(185)
第三章 参数方程与极坐标	(191)
知识要点	(191)
学习指导	(191)
1. 参数方程的定义	(191)
2. 参普互化	(193)
3. 直线的参数方程	(195)
4. 圆、椭圆、双曲线、抛物线的参数方程	(201)
5. 参数方程的应用	(202)
6. 极坐标	(211)
7. 极坐标系中的中心对称、轴对称问题	(214)
8. 曲线的极坐标方程	(216)
9. 极坐标的应用	(222)
10. 画极坐标方程表示的图形	(229)
综合训练(A)(B)	(235)
附录	(241)
(一) 轨迹方程问题的题型分析	(241)
(二) 方程的思想方法在解析几何中的应用	(248)
(三) 直线和圆锥曲线	(254)
参考答案	(262)

第一章 直线

【知识要点】

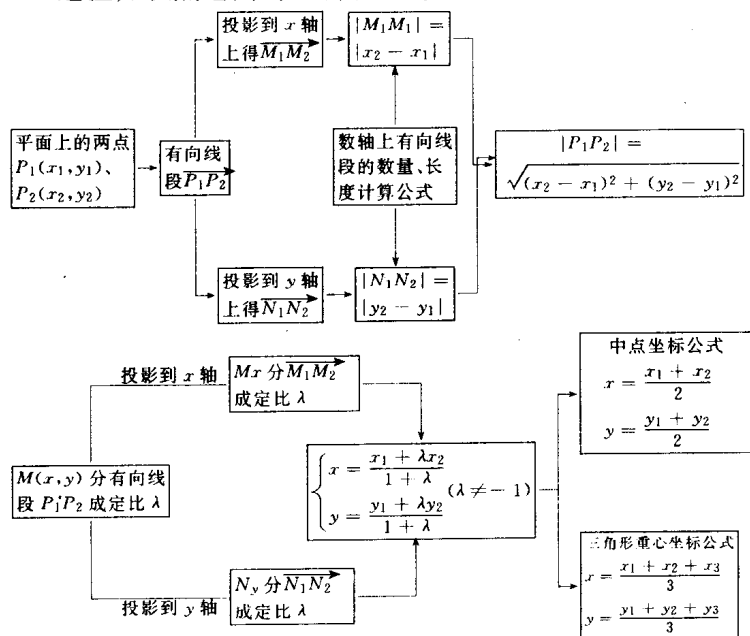
本章的主要知识点包括

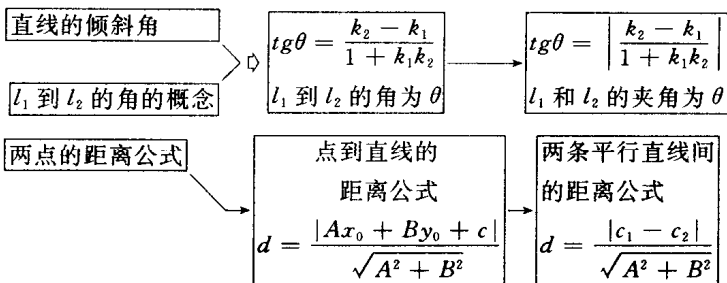
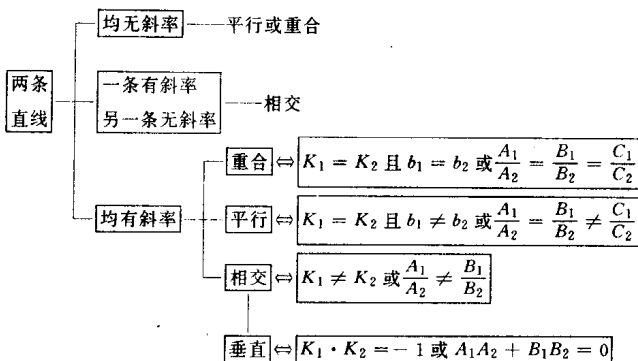
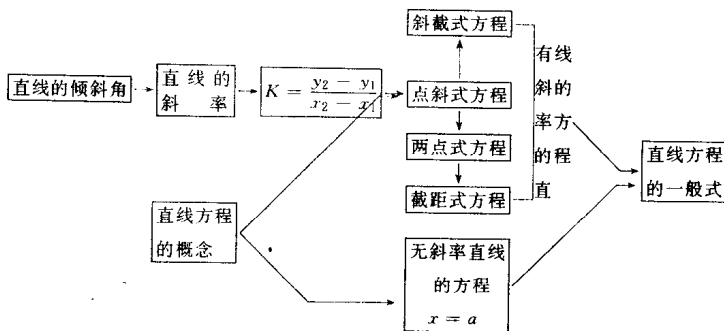
有向线段、两点间的距离、线段的定比分点

直线的方程、直线的斜率、直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程、直线方程的一般式。

两条直线平行与垂直的条件、两条直线所成的角、两条直线的交点、点到直线的距离。

这些知识点之间的逻辑联系可用如下的框图说明。





【学习指导】

1. 有向线段、两点间距离

(1) 有向直线, 规定了方向(用箭头标出正向)的直线叫有向直线.

(2) 有向线段及其数量, 规定了起点和终点的线段叫有向线

段,其方向是由起点 A 指向终点 B ,记为有向线段 $\overrightarrow{AB}$,显然 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BA}$ 是方向相反,长度相同的两条有向线段,所以表示有向线段的两个字母是有序的.

用有向直线便可判定与它平行或就在此有向直线上的有向线段的方向,如有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的方向与有向直线 l 的方向一致,是正向,而 $\overrightarrow{BA}$ 便是负向,所以有向线段的方向便可用“正”“负”号表示,而有向线段的长度,用给定的长度单位来度量,其值称绝对值,记为 $|\overrightarrow{AB}|$.

有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度再加上表示其方向的正负号就叫做有向线段的数量,记为 AB ,数量是实数.

(3) 数轴上的有向线段的坐标表示,数轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$,就是点 P 对应的坐标,其中 O 是原点,数轴上有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的数量 $AB = OB - OA = x_2 - x_1$,亦就是终点坐标减起点坐标,用它可以证明,数轴上任意三点 A, B, C ,不论它们的顺序如何,总有 $AB + BC = AC$,特别地 $AB + BA = AA = O$ 所以 $AB = -BA$.

例1 设线段 AB 的中点为 M ,点 P 为直线 AB 上任意一点,求证:

$$(1) PA + PB = 2PM; \quad (2) PA^2 - PB^2 = -2AB \cdot PM.$$

证:(1) 直线 AB 上建立数轴,于是

$$PA + PB = x_A - x_P + x_B - x_P = (x_A + x_B) - 2x_P = 2x_M - 2x_P = 2(x_M - x_P) = 2PM;$$

$$(2) PA^2 - PB^2 = (PA + PB)(PA - PB) = 2PM \cdot (-AP - PB) = -2PM \cdot (AP + PB) = -2PM \cdot AB.$$

(4) 坐标平面上有向线段的表示,对于坐标平面上一般的不与坐标轴平行的有向线段的表示,我们可以将它的起点、终点分别向两坐标轴投影,而且它们的起终点方向关系保持不变,於是数轴上的有向线段的数量便容易求得:

有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在 x 轴上投影为 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $M_1M_2 = x_2 - x_1$.

有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在 y 轴上投影为 $\overrightarrow{N_1N_2}$, $N_1N_2 = y_2 - y_1$.

于是有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 便可类似于“坐标”的形式表示: $\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, 坐标平面上任一有向线段的这种“坐标”是唯一的,但反之由“坐标”确定有向线段却不唯一,但它们却彼此相等(平行且长度相等),若定义的是以原点为起点的有向线段,则此坐标对应的有向线段便唯一.

(5) 两点间距离公式,在上述定义中,

$$|P_1P_2|^2 = |M_1M_2|^2 + |N_1N_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

$$\therefore |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

这就是两点间距离公式

特别地

$\overline{P_1P_2} \parallel x$ 轴

$\overline{P_1P_2} \parallel y$ 轴

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1|, \quad |P_1P_2| = |y_2 - y_1|.$$

$\overline{P_1P_2} \parallel$ 一、三条限角平分线,

二、四条限角平分线,

$$|P_1P_2| = \sqrt{2} |x_2 - x_1| = \sqrt{2} |y_2 - y_1|.$$

平面上任意点 (x, y) 到坐标原点的距离:

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

例2 已知 $A(-2, 5)$ 和 $M(x, y)$ 两点间距离等于 3 在下列条件下, 分别求 M 点坐标:

(1) AM 平行于 x 轴; (2) AM 平行于 y 轴;

(3) M 点在 y 轴上; (4) A, M 都在直线 $x + y = 3$ 上.

解: (1) $AM \parallel x$ 轴, $y = 5$,

$$|AM| = |x + 2| = 3, x + 2 = \pm 3, x = 1 \text{ 或 } x = 5,$$

$\therefore M$ 点坐标为 $(1, 5)$ 或 $(5, 5)$.

(2) $AM \parallel y$ 轴, $x = -2$,

$$|AM| = |y - 5| = 3, y - 5 = \pm 3, y = 8 \text{ 或 } y = 2,$$

$\therefore M$ 点坐标为 $(-2, 8)$ 或 $(-2, 2)$.

(3) M 点在 y 轴上

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2 + (y+5)^2} = 3, & x=0 \text{ 代入上式} \\ x=0, & 2^2 + (y-5)^2 = 9, (y-5)^2 = 5, \end{cases}$$

$$y = 5 \pm \sqrt{5},$$

$\therefore M$ 点坐标为 $(0, 5 + \sqrt{5})$ 或 $(0, 5 - \sqrt{5})$.

$$(4) \begin{cases} \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2} = 3, \\ x + y = 3, \end{cases}$$

$$y = 3 - x \text{ 代入上式: } 2(x+2)^2 = 9, x = -2 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 对应的 } y =$$

$$3 - x = 3 - (-2 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}) = 5 \mp \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore M \text{ 点坐标为 } (-2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, 5 - \frac{3\sqrt{2}}{2}) \text{ 或 } (-2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, 5 + \frac{3\sqrt{2}}{2}).$$

例3 设 A, B, C, D 是同一直线上四个不同点. 证明: (1) $AB \cdot CD + BC \cdot AD + CA \cdot BD = 0$;

$$(2) \text{ 若 } \frac{AC}{CB} + \frac{AD}{DB} = 0, \text{ 则 } \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}.$$

证:直线上建立数轴,以 A 为原点,且 B, C, D 对应的坐标为 b, c, d .

$$(1) AB \cdot CD + BC \cdot AD + CA \cdot BD = b(d-c) + (c-b) \cdot d + (-c)(d-b) = bd - bc + cd - bd - cd + bc = 0.$$

$$(2) \frac{AC}{CB} + \frac{AD}{DB} = 0, \frac{c}{b-c} + \frac{d}{b-d} = 0.$$

$$\because A, B, C, D \text{ 为四个不同点}, \therefore b-c \neq 0, b-d \neq 0, \\ c(b-d) + d(b-c) = 0, bc - cd + bd - cd = 0,$$

$$b(c+d) = 2cd, \quad \frac{c+d}{cd} = \frac{2}{b},$$

$$\therefore \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{2}{b}, \text{ 即 } \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}.$$

例4 求与 y 轴及点 $A(-4, 2)$ 的距离都是 10 的点的坐标.

解:设所求的点 $P(x, y)$, 依题意 圆心 半径

$$\begin{cases} |x| = 10, \\ \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} = 10. \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} x = -10, \\ (x+4)^2 + (y-2)^2 = 100, \\ (y-2)^2 = 64, \quad y-2 = \pm 8, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -10, \\ y = 10, \end{cases}$$

即 $P_1(-10, 10)$,

$$\text{或 } \begin{cases} x = -10, \\ y = -6, \end{cases}$$

即 $P_2(-10, -6)$.

$$\text{或 } \begin{cases} x = 10, \\ (x+4)^2 + (y-2)^2 = 100, \\ (y-2)^2 = -96, \text{ 无解.} \end{cases}$$

所求的点为 $P_1(-10, 10)$, $P_2(-10, -6)$.

此题的结论告诉我们,与 $A(-4, 2)$ 距离为 10 的圆和与 y 轴距离为 10 的两平行线 $x = +10$ 及 $x = -10$ 位置关系是,圆与直线 $x = -10$ 有两个交点 P_1, P_2 , 而与直线 $x = 10$ 没有交点,如图 1-1-1 所示.

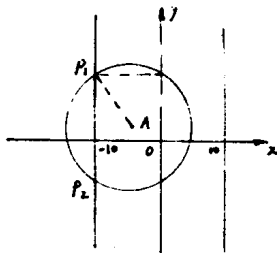


图 1-1-1

例5 求函数 $y = \sqrt{x^2+4x+13} + \sqrt{x^2-2x+5}$ 的最小值,并求出 y 取得最小值时的 x 值.

$$\text{解: } y = \sqrt{x^2+4x+13} + \sqrt{x^2-2x+5} = \sqrt{(x+2)^2+9} + \sqrt{(x-1)^2+4} = \sqrt{(x+2)^2+(0+3)^2} + \sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2}$$

此式表示 x 轴上的点 $P(x, 0)$ 与选在 x 轴的两侧的点 $A(-2, -3), B(1, 2)$ 距离之和, 根据三角形两边之和大于第三边的性质, 当 A, P, B 共线时, $|PA| + |PB|$ 为最小, 最小值为

$$|AB| = \sqrt{(2+3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{34}.$$

又 AB 的方程为 $\frac{y+3}{2+3} = \frac{x+2}{1+2}$, 求 $5x-3y+1=0$ 与 x 轴的交点, 令 $y=0, x=-\frac{1}{5}$.

$$\therefore \text{当 } x = -\frac{1}{5} \text{ 时, } y_{\text{最小}} = \sqrt{34}.$$

例6 求函数 $y = \sqrt{x^2+4x+13} - \sqrt{x^2-2x+5}$ 的最大值, 并求出 y 取最大值时的 x 值.

$$\begin{aligned} \text{解: } y &= \sqrt{(x^2+4x+13)} - \sqrt{x^2-2x+5} \\ &= \sqrt{(x+2)^2+(0+3)^2} - \sqrt{(x-1)^2+(0+2)^2} \end{aligned}$$

此式表示 x 轴上的点 $P(x, 0)$ 与在 x 轴同侧的两定点 $A(-2, -3), B(1, -2)$ 的距离之差, 根据三角形两边之差小于第三边的性质, 当 A, B, P 共线时 $|PA| - |PB|$ 为最大, 最大值为

$$|AB| = \sqrt{(-3+2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}.$$

AB 的方程为 $\frac{y+3}{-2+3} = \frac{x+2}{1+2}$, 求 $x-3y-7=0$ 与 x 轴交点, 令 $y=0, x=7$.

$$\therefore \text{当 } x=7 \text{ 时, } y_{\text{最大}} = \sqrt{10}.$$

(6) 有向线段的一些应用, 判定两个实数 a, b 的大小, 由 a 对应于数轴上的 A 点, b 对应于 B 点, 若 $\overrightarrow{AB}$ 为正向, 即 $AB > 0$, 则 $b > a$, 但是由 $AB > 0$, 可得 $b-a > 0, b > a$, 同样, 若 $AB < 0, b-a < 0$ 则 $b < a$, 这就是常用的差的比较法判定任意两个实数间的大小.

2. 线段的定比分点

(1) 线段的定比分点, 设 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 为坐标平面上任意两点, 有向线段 P_1P_2 上或其延长线上有点 P , 那么点 P 就把 $\overline{P_1P_2}$ 分成定比 $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$, 其中 P_1P, PP_2 为相应向有向线段的数量, 此时 P 算定比分点, 定比 λ 可以是 $\lambda \neq -1$ 的任意实数, λ 的取值和 P 点对应的位置关系如下图所示

$$\begin{array}{ccccccc}
 -1 < \lambda < 0 & 0 < \lambda < 1 & 1 < \lambda < +\infty & & & & \\
 P \rightarrow -\infty & P_1 & \text{中点 } M & P_2 & P \rightarrow +\infty & & \\
 \lambda \rightarrow -1 & P = P_1 & P = M & P = P_2 & \lambda \rightarrow -1 & & \\
 & \lambda = 0 & \lambda = 1 & \text{无意义} & & &
 \end{array}$$

从图中不难看出, $\lambda = -1$ 是 $P \rightarrow \pm\infty$ 时的极限值.

(2) 线段定比分点标公式

将 P_1P_2 及定比分点在两条轴上进行投影, 它们的相关位置关系保持不变, 那么再由平行截割定理得到

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{N_1N}{NN_2}.$$

于是 $\frac{x-x_1}{x_2-x} = \lambda, \quad \frac{y-y_1}{y_2-y} = \lambda,$

解得 $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} (\lambda \neq -1).$

这就是定比分点坐标公式.

(3) 定比分点坐标公式的应用.

定比分点坐标公式中两个式子中都含有 λ , 只要三点 P_1, P_2, P 共线, 由此两式求出的 λ 值必然相同, 彼此相容, 说明了公式亦可用来证明给定的三点是否共线.

例 7 已知 $M_1(2, 3), M_2(-4, 6), M_3(0, 4)$ 三点.

求证: M_1, M_2, M_3 三点在同一条直线上.

证: $\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} = \frac{0-2}{-4-2} = \frac{1}{2} = \lambda_1,$

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1} = \frac{4-3}{6-3} = \frac{1}{3} = \lambda_2,$$

$$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda.$$

即 M_1, M_2, M_3 三线共点, M_3 分 $\overline{M_1M_2}$ 为定比 λ .

在定比分点坐标公式中, 令 $\lambda=1$ 就是线段 P_1P_2 中点 M 的坐标公式

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

应用定比分点坐标公式时, 应注意起点、终点和定比分点坐标以及相应的定比 λ 的值, 但在实际应用时, 起终点, 定比分点及相应 λ 值都是相对的, 它们的相位关系可作适当的变换, 不过变换后, 对应的定比 λ 值也随之相应的改变.

例 8 已知 $A(3, 0), B(-1, -6)$, 延长 BA 到 P , 使 $|AP| = \frac{1}{3}|AB|$, 求 P 点的坐标.

解一: P 分 $\overline{AB}$ 为定比

$$\lambda = \frac{AP}{PB} = -\frac{1}{4}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{3 + (-\frac{1}{4}) \times (-1)}{1 + (-\frac{1}{4})} = \frac{13}{3}, \\ y = \frac{0 + (-\frac{1}{4}) \times (-6)}{1 + (-\frac{1}{4})} = 2, \end{cases}$$

所求点 $P(\frac{13}{3}, 2)$.

解二: A 分 $\overline{BP}$ 为定比 λ

$$\lambda = \frac{BA}{AP} = \frac{|BA|}{|AP|} = 3.$$

$$\begin{cases} 3 = \frac{-1+3x}{1+3}, \\ 0 = \frac{-6+3y}{1+3}, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = \frac{13}{3}, \\ y = 2. \end{cases}$$

$\therefore P(\frac{13}{3}, 2)$.

解三: 显然 A 为 BP 的四等分点之一, 设 C 为 BP 的中点, 则 C 点坐标为 $(\frac{-1+x}{2}, \frac{-6+y}{2})$. 而 A 又是 CP 的中点, 所以

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{-1+x}{2}) = 3, \\ \frac{1}{2}(\frac{-6+y}{2}) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{13}{3}, \\ y = 2. \end{cases} \quad \therefore P(\frac{13}{3}, 2).$$

例 9 过点 $P(-5, -4)$ 的直线与 x 轴和 y 轴分别交于 A, B 点, 且 $|AP| : |BP| = 3 : 5$, 求此直线方程.

解: 若 P 点内分 AB , 则 $\lambda = \frac{AP}{PB} = \frac{3}{5}$.

$$\begin{cases} -5 = \frac{a+0}{1+\frac{3}{5}}, \\ -4 = \frac{0+\frac{3}{5}b}{1+\frac{3}{5}}, \end{cases}$$

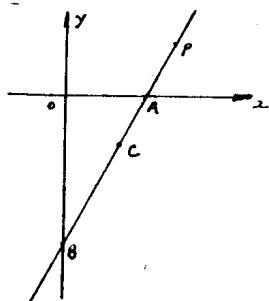


图 1-2-1

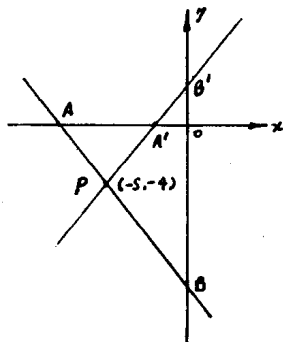


图 1-2-2

$$\begin{cases} a = -5 \times \frac{8}{5} = -8, \\ b = \frac{-4 \times 8}{3} = -\frac{32}{3}. \end{cases}$$

$$\therefore A(-8, 0), B(0, -\frac{32}{3}).$$

所求 AB 直线方程为

$$\frac{x}{-8} + \frac{y}{-\frac{32}{3}} = 1,$$

$$\text{即 } 4x + 3y + 32 = 0.$$

$$\text{若 } P \text{ 点外分 } A'B', \text{ 则 } \lambda = \frac{A'P}{PB'} = -\frac{3}{5}.$$

$$\begin{cases} -5 = \frac{a+0}{1+(-\frac{3}{5})}, \\ -4 = \frac{0+(-\frac{3}{5}) \times b}{1+(-\frac{3}{5})}, \end{cases} \quad \begin{cases} a = -5 \times \frac{2}{5} = -2, \\ b = -4 \times \frac{2}{5} / -\frac{3}{5} = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

$$\therefore A'(-2, 0), B'(0, \frac{8}{3}).$$

所求 A'B' 方程为:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{8}{3}} = 1, \quad \therefore 4x - 3y + 8 = 0.$$

例 10 (1) 如果不过点 $P_2(x_2, y_2)$ 的直线 $Ax + By + C = 0$ 和点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 的连线相交, 试证: 直线分 $\overline{P_1P_2}$ 之比为 $-\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}$;

(2) 已知 $P_1(1, 3)$ 和 $P_2(7, 2)$, 试求 $\overline{P_1P_2}$ 被直线 $2x - 5y + 8 = 0$ 分割的比.

解: (1) 直线 $Ax + By + C = 0$ 与 P_1P_2 连结的交点为 $P(x, y)$, P

点分 $\overline{P_1P_2}$ 为定比 λ , 那么 $\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \end{cases}$ 该点又在直线 $Ax + By + C = 0$ 上,

$$\therefore A(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}) + B(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}) + C = 0,$$

$$\therefore (Ax_1 + By_1 + C) + \lambda(Ax_2 + By_2 + C) = 0.$$

∵ 直线不过 P_2 点, ∴ $Ax_2 + By_2 + C \neq 0$,

$$\therefore \lambda = -\frac{Ax_2 + By_2 + C}{Ax_2 + By_2 + C}.$$

$$(2) \lambda = -\frac{2 \times 1 - 5 \times 3 + 8}{2 \times 7 - 5 \times 2 + 9} = -\frac{-5}{12} = \frac{5}{12}.$$

我们再看一个典型例题:

已知三角形的顶点是 $A(5, -1)$, $B(-1, 7)$, $C(1, 2)$, 求 $\angle A$ 的平分线 AD 的长及所在的直线方程.

$$\text{解: } |AC| = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-2)^2} = 5,$$

$$|AB| = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-7)^2} = 10.$$

$$D \text{ 分 } \overline{CB} \text{ 为定比 } \lambda = \frac{CD}{DB} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{得 } \begin{cases} x = \frac{1 + \frac{1}{2}(-1)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \\ y = \frac{2 + \frac{1}{2} \times 7}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{11}{3}. \end{cases} \therefore D\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right).$$

$$|AD| = \sqrt{\left(5 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1 - \frac{11}{3}\right)^2} = \frac{14}{3} \sqrt{2}.$$

角平分线 AD 的方程:

$$\frac{y+1}{\frac{11}{3}+1} = \frac{x-5}{\frac{1}{3}-5}, \quad \therefore x+y-4=0.$$

3. 直线的方程

(1) 直线的方程概念: 设直线 l 和方程 $F(x, y) = 0$. ① 若对于直线上任意一点 $P(x_0, y_0)$ 均有 $F(x_0, y_0) = 0$, 即点 P 的坐标满足方程; ② 若对于方程 $F(x, y) = 0$ 的任意一组解 x_1, y_1 , 以 (x_1, y_1) 为坐标的点 $Q(x_1, y_1)$ 均在直线 l 上. 同时具备上述两条, 就称直线 l 是方程 $F(x, y) = 0$ 的直线, 方程 $F(x, y) = 0$ 是直线 l 的方程.

点的轨迹必须具备纯粹性与完备性. 纯粹性又称无杂性, 即曲线上的点都必须具备该轨迹的性质; 完备性又称为无遗漏性, 即满足该轨迹性质的点都在曲线上, 称曲线是点的轨迹. 直线方程概念中的①叙述了轨迹的纯粹性, ②叙述了轨迹的完备性. 两个条件缺一不可.

例 11 若命题“直线 l 上的点的坐标都是方程 $f(x, y) = 0$ 的解”是正确的, 则下列命题正确的是()