

庆祝复旦附中建校 55 周年

吴小新 杨士军 主编

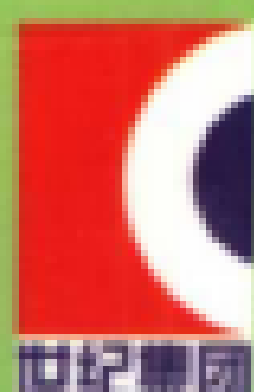
高中生科学研究入门

(下 册)

■ 复旦附中学生科学论文选

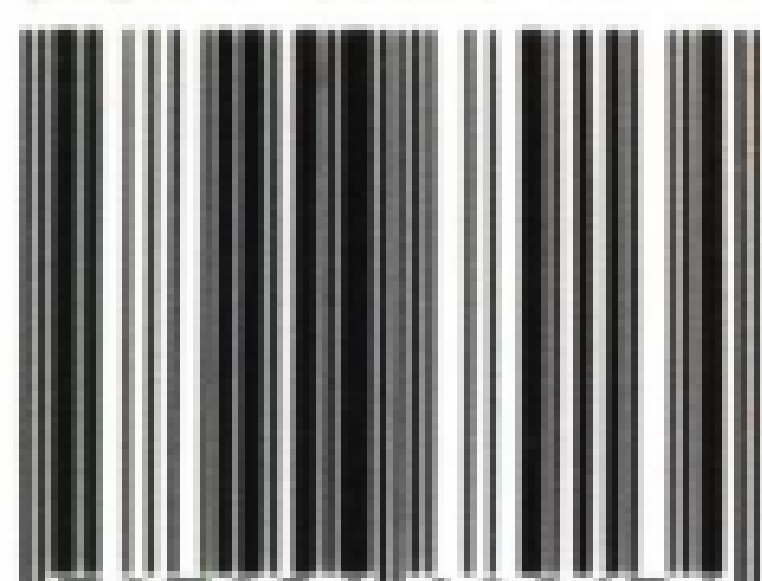
学林出版社

High School Affiliated To Fudan University



复旦大学附属中学 55 周年校庆

ISBN 7-80668-913-3



9 787806 689134 >

定价:25.00 元



庆祝复旦附中建校 55 周年

吴小新 杨士军 主编

高中生科学研究入门

(下 册)

■ 复旦附中学生科学论文选

总 主 编 谢应平 郑胤飞

本册主编 吴小新 杨士军

编 委 (按姓氏笔画排序)

许 新 伍新宝 李方正 刘嵩岩

吴晓柏 杜程鹏 吾用纬 汪杰良

陆俊毅 杨士军 陈雪兵 郑胤飞

学林出版社

High School Affiliated To Fudan University

前 言

有专家在评述复旦大学附属中学(下简称复旦附中)的办学风格时,曾说“附中是沪上最像大学的一所中学”。此话的涵义:复旦附中具有浓厚的“解放思想,崇尚科学,追求一流”的学术氛围,是具有“海纳百川、百花齐放”教学精神的。但附中的学生优秀,只要给他们创造良好的发展条件,他们的潜力是巨大的。复旦附中教师在教学与科研中正是创造了这样良好的学生发展条件:严谨求实,勇于革新,言传身教,学生自踏入复旦附中起,便投入到科学探究活动中。他们自发成立了学生科学院等社团;他们主动走进实验室,走出校门;他们对生活中和课本中的一些问题提出了质疑;他们尝试设计制作机器人……在复旦附中这个充满科学养分的环境里,只要他们有想法,那就等于成功了一半。老师会在他(她)需要的时候,及时地出现,有时为了某个选题和学生一起争论不休,甚至废寝忘食。附中学生相互关照,他们以老带新,以老促新,有的毕业后仍不忘母校同学发展。附中学生经常能面对面地聆听政治家、科学家、经济学家、医学家、文学家和艺术家的教诲与点拨。正是在这民主宽松平等合作的氛围中,学生的科学探究潜能得到了激发。但我们又意识到,要让学生养成自觉研究的习惯或具有主动探究的品质,对他们进行必要的科学研究指导是必要的。正如校友、中科院上海分院院长沈文庆院士说的:“让学生掌握科学研究的过程比单纯的学习科学知识重要得多。”比如,使学生明白什么样的研究过程是符合科学要求的,怎样发现有价值的问题进行探究,如何科学选题并在海量的信息世界中收集具有价值的资料,怎样进行科学调查和实验,如何形成科学的研究成果,又如何进行作品的展示和评价,等等。2000年始,学校专门在高一年级开设了《高中生科学研究入门》必修课,学生更是如鱼得水,经过师生的共同努力,绝大部分学生感到了实实在在的收获。据不少进入大学的同学反馈,这门课程帮助他们尽快走进了大学实验室和教授的课题组,这无疑令我们振奋。

在师生、家长和社会资源的共同努力下,复旦附中学生利用业余时间,结合兴趣搞课题研究蔚然成风。而今,每届学生能独立或合作完成约一百项课题,他们还以学科或班级为单位,形成专题研究的报告文集,他们开选题报告会,举行课题答辩,进行课题布展与评价,一切从容而实在。在如此氛围中,我们学生参加市级以上的青少年科技创新课题和论文成果与五年前相比,无论在学科层面、参与层面还是获奖层次等方面都取得了突破。王之任、屈铭志等同学先后摘取了 ISEF 大赛的数学和生物学等锦标,郭一、张家琳等同学在 IOI 中称雄,黄晟等同学的科研成果申请了国家专利,王晓彦等同学笑傲 2004 年 WEC 大赛。所有这些代表了我校学生科研最高水平,他们犹如雨后春笋,不断地涌现着、壮大着……

今天,恰逢建校 55 周年,复旦附中决定出一套反映师生教与学成果的书。一方面对我校学生科研成果做一个阶段性总结,以待进一步发展;另一方面也可显示出我市学生(尤其是高中生)高质量科学论文的发展水平,为课程改革的研究者提供参考。由于篇幅所限,我们仅选取了最近五年里在数学、物理、化学、工程学、生物学、环境科学,还有医药与健康学等反映附中学生水平的科学论文汇编成册,另外,各论文中的参考文献和附件等也大部分被略去了,在此对我校学生研究过程中被引用过资料的专家表达谢意;也对部分外单位的指导老师的辛勤工作表示感谢。限于能力与编辑时间,其中疏漏与不足,恳请诸位批评指正。

编 者
2005 年 3 月 5 日

目 录

前 言	1
环境生物学	
铬污染水体中水螅生物学和行为研究及其实际应用意义	屈铭志 1
数学与计算机科学	
猜数问题的研究	张 宁 8
数学模型及其在信息学竞赛中的应用	郭 一 24
多项式乘法	张家琳 30
物理学	
照明优化	沈 渊、袁家晖、张 诚 37
化学	
新型旋转圆盘式结晶装置的开发与研制	黄 磊 45
用 EDTA 作配位剂进行电镀的可行性分析	赵明磊、施 毅 54
环境科学	
城市树种模糊控制专家系统	黄毅宸、唐 骏、杜晨斌 59
不同植物滞尘能力的初步研究	罗峙淳等 77
工程学	
基于交通流量的城市交通宏微观仿真监控系统	孙之杰、黄毅宸 83
类八边形单行环路网	
——一种城市道路交通新方案	王晓彦 92
分子生物学大规模移液操作自动化设计	熊 然、戴 亮、孟凡奇 101
医学与健康学	
不同视觉、听觉或剧烈运动条件下,对人反应速度的研究	徐露琼 110

铬污染水体中水螅生物学和行为研究及其实际应用意义

屈铭志

【摘要】目的：通过不同浓度的 Cr^{6+} 离子对水螅形态影响和行为变化研究，揭示出它们之间关系，建立水螅对铬污染水的敏感监测模型。

方法：准备 10 组梯度的 Cr^{6+} 离子(通过重铬酸钾来配制)从 0.07ppm 到 0.7ppm，每组分别放入 10 个不出芽的水螅。通过时间的积累、仔细观察他们的形态和行为变化，记录变化的细节并且拍摄照片。数据的分析和整理则由 MATLAB 软件程序来进行。

结果：水螅对 Cr^{6+} 的形态和行为变化的普遍特点是不可逆的收缩身体和触手萎缩。在触手的顶部出现一个“鼓锤状”的结构之后，内外层的细胞将会分解和脱落。同时捕食行为和运动行为也会停止。数据分析显示水螅在 Cr^{6+} 溶液触手和身体的长度相关性在数学统计中是很有意义的，并且归结出浓度与生物指标关系量化数学模型。

结论：上述的试验已经在工业铬污染废水监测中验证。我们发现水螅是一种能够用来监测铬污染的敏感生物，我们希望这些结论能够进一步运用在类似的污染物水体中去。

关键词：急性中毒 六价铬 水螅 淡水污染物

引言

随着环境污染的日趋严重，人们越来越重视污染物对水环境的影响。除了对受水污染环境采取整治措施之外，必须建立水质监测和评价方法。现有的水质监测和评价方法复杂费时。寻找对水污染物具有敏感反应的指标动物和简易方法，对环保监测具有广泛的应用价值。

水螅是淡水中常见的一种腔肠动物，对水环境变化敏感，在室内易饲养，饲养所需空间很小，只要控制温度、食物和水质等即可以在短时间内大量培养出生理状态一致的供试个体。

作者经过多年对水螅的饲养和观察，发现在不适宜的水体环境中水螅的形态会异常变化。在用废旧电池浸泡水对水螅进行的测试中，发现水螅对污染物的不同浓度表现出不同的反应现象(如身体与触手萎缩、拒食行为、触手出现“鼓锤体”、解体直至水螅死亡等)。曾以水螅对污染物的反应作为监测指标，对上海三条河段(黄浦江吴淞码头、苏州河天目西路、水电路虹口河)及废旧电池浸泡液、已吸香烟过滤嘴浸出液进行测试，证明水螅可作为水污染的生物监测的指标动物。这些研究工作与国内外的文献报道相比，除所用的指标及分级程度不同外基本类似，都只能定性地反映出水质污染的程度。我在以前的研究中发现了有些形态特征不仅在质上而且在量上也发生变化而且有一定的规律性。所以我想能否根据不同污染物浓度下水螅形态特征量的变化，建立起定量生物监测技术。本研究就是在这一思路下所做的工作，工作包括：为了使研究工作的标准化，污染物采用国际标准毒性测试物质重铬酸钾(Cr^{6+})；确定水螅对重铬酸钾溶液(Cr^{6+})反应的形态特征变化方式；建立简单而快速的特征变化量的测量方法和工具；对实验数据采用计算机 MATABL 软件自编统计处理程序处理，建立用水螅来定量监测污染物(Cr^{6+})的数学模型。

1. 材料与方法

1.1 材料

1.1.1 水螅(*Hydra oligactis*.)

取自复旦大学生命科学院教学实验中心实验室饲养的种群,该种群自 1977 年从浙江杭州郊县采集至今已在实验室内连续饲养 24 年余。

水蚤(*Daphnia sp.*) 水蚤来自花鸟鱼集市,室内饲养繁殖水蚤幼体。

1.1.2 饲养条件

饲养用水取已曝气 6 天的自来水,水温为 $25 \pm 1^\circ\text{C}$, pH 7.2—7.5, 实验前后保持不变。

1.1.3 试验器材

隔水式恒温箱、培养皿、试管、吸管、量筒、烧杯、广口瓶、温度计、pH 试纸。

1.1.4 试验观察仪器

NIKON® 双筒解剖镜、OLYMPUS® BH-2 显微镜、NIKON® 990 数码相机、SONY® 数码摄像机

1.1.5 数据及图像处理工具

普通计算机(Intel PIII)、MATLAB® 数学软件编制统计程序、图像处理软件。

1.1.6 测量工具

用计算机制作方格线最小格为 $1 \times 1\text{mm}$, 再利用激光打印机选择 600DPI 点阵打印在透明塑料薄膜上,制成为对数标格线最小格为 $1 \times 1\text{mm}$ (及带有 0.2mm 标格的点,同时可画些弧形线),将薄膜剪成直径为 12cm 圆盘。

1.1.7 化合物重铬酸钾($\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$)分析纯(上海浦江化工厂 1990 年生产)。

1.2 方法与步骤

1.2.1 供试水螅:所有试验都只使用未出芽的水螅。完全伸展时体形大小确定(触手长 6 ± 0.5 毫米,身体长 7 ± 0.5 毫米),试验用水螅必须饥饿三天。

1.2.2 配制溶液:称取重铬酸钾 100mg,加入饲养用水 1000ml 配制成母液,再用试验水稀释配成浓度 100mg/L、90mg/L、80mg/L、70mg/L、60mg/L、50mg/L、40mg/L、30mg/L、20mg/L、10mg/L 10 种。(等价于水中可溶解的 Cr^{+6} 浓度梯度分别为:0.7072mg/L, 0.6364mg/L, 0.5657mg/L, 0.4950mg/L, 0.4243mg/L, 0.3536mg/L, 0.2828mg/L, 0.2121mg/L, 0.1414mg/L, and 0.0707mg/L,)以饲养用水为对照(0mg/L)。

1.2.3 浓度对触手和身体萎缩长度的影响:取上述浓度溶液各取 50ml 溶液置于培养皿中,然后吸入 10 条已饥饿 3 天的水螅进行实验。分别在 6 个时间(0、4、8、12、16、20、24 小时)测量水螅触手和身体萎缩长度。

1.2.4 水螅触手和体长的测量:测量在解剖镜下进行。1 分钟后测量,每次测量间隔为 10 秒钟。水螅触手一般平均为 6 根,测量时剔除其中最长的和最短的,只测其余 4 根伸展时长度,求出每条水螅的触手平均长度,时如水螅的基盘吸附皿底壁身体垂直向上时,用细毛笔触动水螅,以脱离附着物,使水螅体侧卧便于测量。

1.2.5 水螅食物摄入能力测定:每一级浓度和对照组,设 6 支试管,每管加入 15ml 溶液,加入 10 条已饥饿 3 天的供试水螅,在 0、4、8、12、16、24 小时分别各加入幼体水蚤 50 头,投饵 60 分钟后观察有否摄食。在解剖镜下观察到水螅体膨大的部位中有水蚤死体的作为已摄入食物计数。计算每组已摄入食物个体的百分比,作为评定摄食能力大小的标准。食物摄入率($\%$) = 已摄入食物的个数/供测试水螅总数 $\times 100$

1.2.6 数理统计方法: 采用计算机 METLAB 数学软件进行统计编程及运算处理, 从而可建立起一系列不同时间的水螅对浓度定量的判别方程。(详见附录)

(1) 基本数据分析函数方程建立 $[Y]=[a][X]$

(2) 相关系数检验 $\text{corrcoef}=(a,b)$

(3) 建立回归方程 $y=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4$

2. 结果和分析

2.1 水螅对 Cr^{6+} 污染反应的形态变化

2.1.1 利用水螅对 Cr^{6+} 液测试反应中, 发现水螅对 Cr^{6+} 液的反应现象其实是水螅中毒反应程度的表现, 中毒程度高低取决于化学测试物质浓度和浓度的积累时间, 从试验的结果中发现, Cr^{6+} (0.7072mg/L) 浓度对水螅中毒致死, 需 13 小时, 测试温度为 $25 \pm 1^\circ\text{C}$ (图 2.1-1 至图 2.1-6); Cr^{6+} (0.2121mg/L) 浓度对水螅中毒致死需 24 小时, 测试温度 $25 \pm 1^\circ\text{C}$ (图 2.1-7); 低浓度 Cr^{6+} 对水螅的致死影响, 是水螅体对致毒物质的浓度积累导致。在低浓度的 Cr^{6+} 对水螅测试会有很明显的反应现象, 特别是水螅触手变化反应(鼓锤体现象), 更能反映出测试浓度的影响程度。

图 2.1.2—2.1.6 (略) 0.7072mg/L Cr^{6+} 浓度下不同的时间点水螅形态变化

图 2.1-7 (略) 水螅在 Cr^{6+} 溶液(0.2121mg/L) 24 小时测试反应连续变化过程

2.1.2 触手“鼓锤体”结构变化特点

水螅对各种污染物测试反应均有共同的反应现象(触手与身体的萎缩), 这一萎缩现象也是目前国内外水螅研究中常用的定性指标的分析¹, 但用作定量指标分析还属空白研究, 通过我多年观察研究水螅反应指标, 特别是采用不同浓度 Cr^{6+} 液对水螅试验, 发现触手的萎缩反应中有“鼓锤体”结构变化, 这种变化在不同浓度下可以测量出它长度的差异(图 2.1-8、图 2.1-9、图 2.1-10、图 2.1-11), 而且“鼓锤体”结构出现后, 它会随时间变化, 测量的长度会缩短。应该说“鼓锤体”结构是水螅萎缩主要形态, 是可以定量依据。

水螅受 Cr^{6+} 溶液作用影响, 它的触手形态结构出现了一系列变化过程。例对照组观察到水螅触手常处于舒展状态(图 2.1-12), 触手上的刺细胞之间有一定的距离(图 2.1-13)。试验组初期水螅触手轻度收缩, 触手末端细胞密集, 收缩形成了一个鼓锤物(图 2.1-14)。随后触手进一步收缩, 长度变短, 宽度加大(图 2.1-15)。触手特别是“鼓锤体”末端外层细胞出现受损伤(图 2.1-16), 细胞出现解离(图 2.1-20), 解离后触手仍有剩余物残留(使用相差显微镜观察及测试可以判定为中胶层以内的结构图 2.1-17 它具有一定的黏性, 但无收缩功能), 残余物与新形成的鼓锤体之间有明显的分界线(图 2.1-18 图 2.1-19), 这就作为测量触手长度起点。这一分界点它会随着水螅中毒程度加深, 逐渐向触手的基部延续(图 2.1-17), 延续过程中会有大量的完整细胞的脱落(图 2.1-20、图 2.1-21), 触手也慢慢失去它的伸缩能力, 直至水螅触手完全萎缩并解体死亡。(图 2.1-22、图 2.1-23)。通过对水螅触手的形态结构变化详细观察, 表明了化学物质对水螅体作用不仅仅是一种简单的收缩反应现象, 而是有深层次的中毒机理, 水螅所表现出这一萎缩变化过程是水螅触手长度作为定量指标的科学依据。

图 2.1—8—图 2.1—11 (略)水螅触手对不同浓度的 Cr^{6+} 溶液的量化反应现象(12h 观察)

图 2.1—12—图 2.1—13 (略)对照组水螅触手结构

图 2.1—14—图 2.1—23 (略)试验组(Cr^{6+})溶液对水螅触手结构变化影响

2.2 Cr^{6+} 浓度对水螅摄食能力影响

Cr^{6+} 溶液对水螅致毒效应,不仅在形态变化,而且还影响它的摄食能力(图 2.2—1 略),对照组水螅不仅能不断捕捉水蚤,而且能很快将水蚤送入消化腔内(图 2.2—3 略)。试验组因水螅中毒触手收缩,而且体内外细胞层脱落(图 2.2—2 略),导致捕捉能力的下降(图 2.2—1 略)。在观察中,发现即是中毒水螅虽能捕捉住水蚤,但不能将水蚤送入消化腔中,为了正确表达这种将食物摄入消化腔的能力大小,研究中采用了摄入率(%)为指标。图 2.2—4(略)表示了 Cr^{6+} 浓度对水螅食物摄入率的影响,可见摄入率大小与处理浓度或同浓度不同时间之间存在着负相关关系。

2.3 Cr^{6+} 溶液浓度对水螅身体、触手长度变化的影响

(图 2.3—1、图 2.3—2)。反映了 Cr^{6+} 溶液浓度和触手及身体长度变化。可见水螅对中毒浓度有级差反应,在同一浓度下水螅对 Cr^{6+} 反应又随时间长短而变化,这反映化学物质对水螅触手的中毒有积累作用。

图 2.3—1 (略) Cr^{6+} 不同浓度、同一浓度不同时间下水螅触手长度变化

图 2.3—2 (略) Cr^{6+} 不同浓度、同一浓度不同时间的水螅身体长度变化

2.4 运用 MATLAB 数学软件进行数据处理

Cr^{6+} 浓度(0.0707mg/L—0.7072mg/L)对水螅的测试,对获得的触手长度、身体长度、摄入率为三种定量指标的数据,经过统计编程的计算机运算,获得了这三个变量指标分别与浓度的相关系数及其数学公式表达式,有水螅一种指标(触手、身体、能食率)与浓度(表 1、表 2、表 3),二种指标组合与浓度(表 4、表 5、表 6),三种指标组合与浓度的定量关系式(表 7),通过对定量指标的相关性系数从而建立起水螅对化学污染物(Cr^{6+})定量化监测通用模型。

表 1: 水螅触手长度(x)与 Cr^{6+} 浓度(Y)的数学模型以及相关系数

时 间	数 学 模 型		
	代 数 式	相 关 系 数 (R)	相关系数检验
4h	$y = -3.3066 + 3.5573x - 0.98205x^2 + 0.080728x^3$	0.9405	极相关
8h	$y = 1.0752 - 0.14704x - 0.038315x^2 + 0.0052605x^3$	0.9732	极相关
12h	$y = 1.0096 - 0.38013x + 0.059494x^2 - 0.0060754x^3$	0.9835	极相关
16h	$y = 0.80154 - 0.48143x + 0.10314x^2 - 0.0080176x^3$	0.9180	极相关
20h	$y = 0.61043 - 0.45635x + 0.14094x^2 - 0.016375x^3$	0.9083	极相关
24h	$y = 0.5856 - 0.85993x + 0.40356x^2 - 0.056637x^3$	0.8017	极相关

注: 相关系数检验: 触手(X) $> 0.76 = r_{0.01(8)}$ 极相关

表 2: 水螅食物摄入率(x)与 Cr^{6+} 浓度(Y)的数学模型以及相关系数

时 间	数 学 模 型		
	代 数 式	相 关 系 数 (R)	相关系数检验
4h	$y=29.8593-10.2546x+1.2090x^2-0.048096x^3$	0.9283	极相关
8h	$y=1.6293-0.34319x+0.038353x^2-0.0019863x^3$	0.9829	极相关
12h	$y=0.77963-0.044156x-0.0045709x^2+0.0001401x^3$	0.9812	极相关
16h	$y=0.67501-0.11844x+0.011349x^2-0.00062493x^3$	0.9904	极相关
20h	$y=0.59487-0.19159x+0.029182x^2-0.00016019x^3$	0.9356	极相关
24h	$y=0.52606-0.20149x+0.037143x^2-0.0022491x^3$	0.8337	极相关

注: 相关系统检验: 能食率(X) $> 0.76 = r_{0.01(8)}$ 极相关

表 3: 水螅身体长度(x)与 Cr^{6+} 浓度(Y)的数学模型以及相关系数

时 间	数 学 模 型		
	代 数 式	相 关 系 数 (R)	相关系数检验
4h	$y=-56.7124+30.0665x-5.1681x^2+0.29011x^3$	0.9581	极相关
8h	$y=-29.5494+16.7761x-3.0311x^2+0.1769x^3$	0.8893	极相关
12h	$y=73.4515-38.0024x+6.5808x^2-0.38102x^3$	0.8611	极相关
16h	$y=0.78737-0.10816x+0.029712x^2-0.0059718x^3$	0.9287	极相关
24h	$y=0.5922-0.16512x+0.0016263x^2+0.0015789x^3$	0.9386	极相关

注: 相关系数检验: 身体(X) $> 0.76 = r_{0.01(8)}$ 极相关

表 4: 水螅二种指标(触手 x1、身体 x2)与 Cr^{6+} 浓度(Y)的数学模型以及相关系数

时 间	数 学 模 型		
	代 数 式	相 关 系 数 (R)	相关系数检验
4h	$y=2.4188-0.10421x_1-0.27764x_2$	(X1=0.9405 X2=0.9581)	极相关
8h	$y=1.1954-0.19603x_1-0.029977x_2$	(X1=0.9732 X2=0.8893)	极相关
12h	$y=0.95061-0.19955x_1-0.01967x_2$	(X1=0.9835 X2=0.8611)	极相关
16h	$y=0.85415-0.094525x_1-0.086112x_2$	(X1=0.9180 X2=0.92870)	极相关
20h	$y=0.62331-0.04982x_1-0.077385x_2$	(X1=0.9083 X2=0.9645)	极相关
24h	$y=0.5711+0.0277x_1-0.1376x_2$	(X1=0.8017 X2=0.9386)	极相关

注: 相关系数检验: 触手(X1) 身体(X2) $> 0.76 = r_{0.01(8)}$ 极相关

表 5: 水螅二种指标(触手 x_1 、食物摄入率 x_2)与 Cr^{6+} 浓度(Y)的数学模型以及相关系数

时 间	数 学 模 型		
	代 数 式	相 关 系 数 (R)	相 关 系 数 检 验
4h	$y=2.0968-0.15296x_1-0.12271x_2$	($X_1=0.9405$ $X_2=0.9238$)	极相关
8h	$y=1.1746-0.071063x_1-0.077085x_2$	($X_1=0.9732$ $X_2=0.9829$)	极相关
12h	$y=0.86724-0.081707x_1-0.050963x_2$	($X_1=0.9835$ $X_2=0.9812$)	极相关
16h	$y=0.63217+0.018951x_1-0.070654x_2$	($X_1=0.9180$ $X_2=0.9904$)	极相关
20h	$y=0.53418-0.026423x_1-0.049398x_2$	($X_1=0.9083$ $X_2=0.9356$)	极相关
24h	$y=0.49446-0.020766x_1-0.047978x_2$	($X_1=0.8017$ $X_2=0.8337$)	极相关

注: 相关系数检验: 触手(X_1) 食物摄入率(X_2) $> 0.76 = r_{0.01(8)}$ 极相关

表 6: 水螅(身体 x_1 、食物摄入率 x_2)与 Cr^{6+} 浓度(Y)的数学模型以及相关系数

时 间	数 学 模 型		
	代 数 式	相 关 系 数 (R)	相 关 系 数 检 验
4h	$y=2.7528-0.25295x_1-0.099969x_2$	($X_1=0.9581$ $X_2=0.9238$)	极相关
8h	$y=1.4717-0.065744x_1-0.098876x_2$	($X_1=0.8893$ $X_2=0.9829$)	极相关
12h	$y=1.2169-0.083511x_1-0.071562x_2$	($X_1=0.8611$ $X_2=0.9812$)	极相关
16h	$y=0.74911-0.044527x_1-0.048625x_2$	($X_1=0.9287$ $X_2=0.9904$)	极相关
20h	$y=0.61781-0.071167x_1-0.021831x_2$	($X_1=0.9645$ $X_2=0.9356$)	极相关
24h	$y=0.5678-0.13473x_1+0.0081206x_2$	($X_1=0.9386$ $X_2=0.8337$)	极相关

注: 相关系数检验: 身体(X_1) 食物摄入率(X_2) $> 0.76 = r_{0.01(8)}$ 极相关

表 7: 水螅三种指标(触手 x_1 、身体 x_2 、食物摄入率 x_3)与 Cr^{6+} 的数学模型及相关系数

时 间	数 学 模 型		
	代 数 式	相 关 系 数 (R)	相 关 系 数 检 验
4h	$y=2.2807-0.11847x_1-0.080973x_2-0.10601x_3$	($X_1=0.9405$ $X_2=0.9581$ $X_3=0.9238$)	极相关
8h	$y=1.3033-0.057902x_1-0.030288x_2-0.077103x_3$	($X_1=0.9732$ $X_2=0.8893$ $X_3=0.9829$)	极相关
12h	$y=1.1319-0.042057x_1-0.062614x_2-0.057986x_3$	($X_1=0.9835$ $X_2=0.8611$ $X_3=0.9812$)	极相关
16h	$y=0.74788-0.0027495x_1-0.044195x_2-0.049624x_3$	($X_1=0.9180$ $X_2=0.9287$ $X_3=0.9904$)	极相关
20h	$y=0.61865+0.051833x_1-0.074393x_2-0.037912x_3$	($X_1=0.9083$ $X_2=0.9645$ $X_3=0.9356$)	极相关
24h	$y=0.57126+0.025906x_1-0.13871x_2+0.0012598x_3$	($X_1=0.8017$ $X_2=0.9386$ $X_3=0.8337$)	极相关

注: 相关系数检验: 触手(X_1) 身体(X_2) 食物摄入率(X_3) $> 0.76 = r_{0.01(8)}$ 极相关

2.5 水螅对 Cr^{6+} 定量化监测模型的建立

从上述定量化指标与反应浓度的方程中我们得出了许多的指标与浓度关系方程,但从经验而言水螅对污染物最敏感的反应是触手反应指标,我们在实际环境监测时,不仅要考虑监测模型精确性和监测速度,同时还应考虑简便性,所以触手与浓度关系方程理应成为理想的监测模型,通过方程相关系数检验和双盲法验证,初步从众多的数学方程中获得了六价铬(Cr^{6+})定量关系方程模型。

指标	模型	时间	监测方程
一种	触手(x)与浓度	12h	$Y = -0.0061X^3 + 0.0595X^2 - 0.3801X + 1.0096$
二种	(触手 X_1 、能食 X_2)与浓度	12h	$Y = -0.050963X_2 - 0.081707X_1 + 0.86724$
三种	触手 X_1 、身体 X_2 、能食 X_3)与浓度	12h	$Y = -0.057986X_3 - 0.062614X_2 - 0.042057X_1 + 1.1319$

3. 结论

3.1 采用国际上⁽⁶⁾常用标准毒性测试物质重铬酸钾(Cr^{6+})来测试水螅中毒反应,均获得(如身体极度收缩与触手萎缩、触手“鼓锤体”、水螅拒食行为、水螅解离现象、水螅死亡等)现象。

3.2 通过不同 Cr^{6+} 浓度溶液测试水螅,观察发现了水螅形态反应具有可定量的特征,“鼓锤体”形态结构和变化规律。

3.3 设计出圆盘式动态测量水螅体和触手的简便工具。

3.4 水螅身体和触手与 Cr^{6+} 溶液浓度呈相关性关系。

3.5 水螅能食行为与 Cr^{6+} 溶液浓度梯度呈相关性。

3.6 运用 MATLAB 软件编程统计计算,建立了浓度与体长触手长度,摄入率之间的一元,二元和三元回归方程,从而建立水螅对 Cr^{6+} 溶液浓度定量监测模型。

3.7 建立了一套从水螅指标反应测定数值计算预测 Cr^{6+} 浓度及其可信限的计算机自动程序。

参考文献(略)

附录:

(1) MATLAB[®] 软件下统计编程(略)

(2) 测量工具与测量方法的标准(略)

(指导老师: 许 新)

猜数问题的研究

张 宁

【摘要】在逻辑推理中有一类比较特殊的问题——“思维嵌套”问题。即在 C 的脑海中要考虑 B 是如何思考 A 的想法。对于这种问题通常非常抽象,考虑情况又十分繁多,思想极其复杂,用一般方法分析效果极差。本文以一个典型的“思维嵌套”问题——猜数问题为出发点,用一种新的方法从问题本质入手分析,很好的解决了问题,并阐述了新思路的优越性。由本质入手分析,避免了表面上的“思维嵌套”,且总结出了许多结论。使得解决问题的效率大幅度上升。在新思路的指引下将原问题向更普遍的情形推广,虽然问题变得更为繁琐复杂,但是由于把握住问题的命脉,有效地解决了问题。

【关键字】推理 思维嵌套 终结情形 一类情形 二类情形

一、问题原形

问题描述:

一位逻辑学教授有三名非常善于推理且精于心算的学生 A, B 和 C 。有一天,教授给他们三人出了一道题:教授在每个人脑门上贴了一张纸条并告诉他们,每个人的纸条上都写了一个大于 0 的整数,且某两个数的和等于第三个。于是,每个学生都能看见贴在另外两个同学头上的整数,但却看不见自己的数。

教授轮流向 A, B 和 C 发问:是否能够猜出自己头上的数。经过若干次的提问之后,当教授再次询问某人时,此人突然露出了得意的笑容,把贴在自己头上的那个数准确无误的报了出来。

我们的问题就是:证明是否一定有人能够猜出自己头上的数,若有人能够猜出,则计算最早在第几次提问时有人先猜出头上的数,分析整个推理的过程,并总结出结论。

我们先分析一个简单的例子。观察每个人是如何进行推理的。

假设 A, B 和 C 三人,头上的数分别是 1, 2 和 3。

1) 先问 A

这时, A 能看见 B, C 两人头上的数分别是 2, 3。 A 会发现自己头上只可能为 $3+2=5$, 或者 $3-2=1$ 。可到底是 1 还是 5。 A 无法判断,所以只能回答“不能”。

2) 再问 B

B 会发现自己头上只可能为 $3+1=4$, 或者 $3-1=2$ 。可到底是 2 还是 4, B 只能从 A 的回答中入手分析:(以下为 B 脑中的分析)

(1) 如果自己头上是 2。则 A 能看见 B, C 两人头上的数分别是 2, 3, A 会发现自己头上只可能为 $3+2=5$, 或者 $3-2=1$ 。到底是 1 还是 5, A 无法判断,只能回答“不能”。这与 A 实际的回答相同,并不矛盾,所以 B 无法排除这种情况。

(2) 如果自己头上是 4 则 A 能看见 B, C 两人头上的数分别是 4, 3, A 会发现自己头上只可能为 $4+3=7$, 或者 $4-3=1$ 。到底是 1 还是 7, A 无法判断,只能回答“不能”。这也与 A 实

际的回答相同,并不矛盾,所以 B 也无法排除这种情况。

B 无法判断,只能回答“不能”。

3) 再问 C

C 会发现自己头上只可能为 $2+1=3$, 或者 $2-1=1$ 。可到底是 1 还是 3, C 只能从 A 或 B 的回答中入手分析:(以下为 c 脑中的分析)

(1) 如果自己头上是 1。

$a)$ A 会发现自己头上只可能为 $2+1=3$, 或者 $2-1=1$ 。可到底是 1 还是 3, 是无法判断的, 只能回答“不能”。这与 A 实际的回答相同, 并不矛盾。

$b)$ B 会发现自己头上只可能为 $1+1=2$ (因为 B 头上是大于 0 的整数, 所以 B 头上不能是 $1-1=0$)。 B 应回答“能”。但这与 B 实际的回答矛盾。 C 能以此排除头上是 1 这种情况。

(2) 如果继续分析 C 头上是 3 这种情况会发现毫无矛盾(因为与实际情况相符)。

C 将准确判断头上的数是 3, 所以回答“能”。

所以在第三次提问时有人猜出头上的数。

我们从每个人的角度出发, 分析了头上数是 1, 2 和 3 的情况。这种方法也是我们解决简单的逻辑推理问题所采用的普遍做法。但如果将问题的规模变大, 会发现问题的复杂程度会急剧上升, 几乎是多一次推理, 问题的复杂度就要变大一倍。更复杂的例子, 限于篇幅就不举了, 但复杂程度是可以想见的。

靠如此烦琐的推理是不能很好解决问题的。原因在于有大量的“思维嵌套”, 即: 在 C 的脑海中要考虑 B 是如何思考 A 的想法。此外, 这种方法不能够推导出有普遍意义的结论。让我们换一种思路来解决问题。

定义:

下面我们用第一位、第二位、第三位学生分别表示 A, B, C 三人

定义 1: 用四元组 (a_1, a_2, a_3, k) , $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \{1, 2, 3\}$ 来描述推理过程中的一种情形, 其中三个人头上数分别为 a_1, a_2, a_3 , 从第一位学生开始提问, 且当前的被提问者为第 k 位学生。

性质 F_1 : 对于四元组 (a_1, a_2, a_3, k) , 第 k 位学生可以不依靠别人的回答进行推理, 能够直接判断出自己头上数, 并称四元组描述的情形为“终结情形”。

性质 F_2 : 对于四元组 (a_1, a_2, a_3, k) , $a_k < \max\{a_1, a_2, a_3\}$, 并称四元组描述的情形为“一类情形”。

性质 F_3 : 对于四元组 (a_1, a_2, a_3, k) , $a_k = \max\{a_1, a_2, a_3\}$, 并称四元组描述的情形为“二类情形”。

定义 2: 集合 $S_1 = \{(a_1, a_2, a_3, k) \mid (a_1, a_2, a_3, k) \text{ 满足性质 } F_1\}$ 。

定义 3: 集合 $S_2 = \{(a_1, a_2, a_3, k) \mid (a_1, a_2, a_3, k) \text{ 满足性质 } F_2\}$ 。

定义 4: 集合 $S_3 = \{(a_1, a_2, a_3, k) \mid (a_1, a_2, a_3, k) \text{ 满足性质 } F_3\}$ 。

定义 5: 若对于四元组 (a_1, a_2, a_3, k)

1) 若第 k 位学生不能够猜出头上的数, 记 $f(a_1, a_2, a_3, k) = +\infty$ 。

2) 若第 k 位学生能够猜出头上的数, 记 $f(a_1, a_2, a_3, k)$ 为从第一位学生开始提问直到猜出头上的数的过程中总共的提问次数。

定义 6: 对于四元组 (a_1, a_2, a_3, k) , 记 $g(a_1, a_2, a_3, k, R) \in \{T, F\}$ (表示真或假), $R \in \mathbb{Z}^+$, 表示当三位学生头上的数分别为 a_1, a_2, a_3 , 第 k 位学生是否在恰在第 R 次提问时最先猜出头上的数为 a_k 。

定义 7: 对于四元组 (a_1, a_2, a_3, k) , 记 $h(a_1, a_2, a_3, k, R) \in \{T, F\}$ (表示真或假), $R \in \mathbb{Z}^+$, 表示当三位学生头上的数分别为 a_1, a_2, a_3 , 第 k 位学生是否能够在第 R 次提问时排除头上的数为 a_k 的情况。

找出问题的前提, 即已知条件:

- 1) 某两个数的和等于第三个。
- 2) 每个人的纸条上都写了一个大于 0 的整数。

每个人头上的数不是另两数的和就是另两数的差。由于不能直接判断一定是其中某个数, 就只能采取排除法。由于他们不会猜错, 因此在下面只需考虑他们如何能够排除头上数不同于实际的可能情况。

考虑四元组 $(a_1, a_2, a_3, k) \in S_1$, 设 i, j 满足 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, 则第 k 位学生头上的有两种情况 $a_k = a_i + a_j$ 或 $a_k = |a_i - a_j|$ 。其中 $a_i + a_j > 0$, 不能直接排除。由于 $|a_i - a_j| \geq 0$, 所以当且仅当 $|a_i - a_j| = 0$ 能够直接排除这种情况。即 $\forall (a_1, a_2, a_3, k) \in S_1 \Leftrightarrow a_i = a_j$, 其中 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ 。

显然 $a_k = a_i + a_j, a_k = \max\{a, b, c\}$, 因此 $S_1 \subseteq S_3$ 。注意到集合 S_2 与 S_3 的定义, 显然 $S_2 \cap S_3 = \emptyset$, 因此必然有 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ 。

考虑四元组 $(a_1, a_2, a_3, k) \notin S_1$, 即第 k 位学生不能直接猜出自己头上的数, 就需要通过推理来排除头上数的两种情况中的一种。当第 k 位学生假设自己头上是某数, 并通过推理发现别人理应能够在前两次提问中最先猜出头上的数, 就可以根据实际上别人并没有猜出这一矛盾来排除其中一种情况(可以参考前面例子中对 C 思想的分析)

显然三位学生都不可能通过推理排除自己头上数的实际情况(因为他们是永远不会猜错的)。所以下面仅需考虑如何排除头上数不同于实际的另一种情况。

对于四元组 (a_1, a_2, a_3, k) , 为了讨论方便, 不妨设 $a_3 = a_1 + a_2$ 。

注: 下面的 $\vee$ 为析取符号, 即 $T \vee T = T, T \vee F = T, F \vee T = T, F \vee F = F$

1) 当 $k=1$ 时

$$\begin{aligned} g(a_1, a_2, a_3, k, R) &= T \\ \Leftrightarrow g(a_3 - a_2, a_2, a_3, 1, R_1) &= T \\ \Rightarrow h(a_2 + a_3, a_2, a_3, 1, R_1) &= T \\ \Leftrightarrow g(a_2 + a_3, a_2, a_3, 2, R_1 - 2) \vee g(a_2 + a_3, a_2, a_3, 3, R_1 - 1) &= T \end{aligned}$$

2) 当 $k=2$ 时

$$\begin{aligned} g(a_1, a_2, a_3, k, R) &= T \\ \Leftrightarrow g(a_1, a_3 - a_1, a_3, 2, R_2) &= T \\ \Rightarrow h(a_1, a_1 + a_3, a_3, 2, R_2) &= T \\ \Leftrightarrow g(a_1, a_1 + a_3, a_3, 1, R_2 - 1) \vee g(a_1, a_1 + a_3, a_3, 3, R_2 - 2) &= T \end{aligned}$$

3) 当 $k=3$ 时

$$\begin{aligned} g(a_1, a_2, a_3, k, R) &= T \\ \Leftrightarrow g(a_1, a_2, a_1 + a_2, 3, R_3) &= T \\ \Rightarrow h(a_1, a_2, |a_1 - a_2|, 3, R_3) &= T \\ \Leftrightarrow g(a_1, a_2, |a_1 - a_2|, 1, R_3 - 2) \vee g(a_1, a_2, |a_1 - a_2|, 2, R_3 - 1) &= T \end{aligned}$$

对于四元组 (a_1, a_2, a_3, k) , 设 i, j 满足 $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, $a'_i = a_i, a'_j = a_j$ 。当 $a_k = a_i + a_j$ 时, $a'_k = |a_i - a_j|$; 当 $a_k = |a_i - a_j|$ 时, $a'_k = a_i + a_j$ 。

1. 当 $k > i$ 时, 设 $V_i = V - (k - i)$, 当 $k < i$ 时, 设 $V_i = V - (n + k - i)$
2. 当 $k > j$ 时, 设 $V_j = V - (k - j)$, 当 $k < j$ 时, 设 $V_j = V - (n + k - j)$ 。

由上面定义可得 $g(a_1, a_2, a_3, k, V) = T \Rightarrow g(a_1', a_2', a_3', i, V_i) \vee g(a_1', a_2', a_3', j, V_j) = T$
 分别考虑四元组 $(a_1, a_2, a_3, k) \in S_2$ 和 $(a_1, a_2, a_3, k) \in S_3$ 两种情形:

- 1) 当 $(a_1, a_2, a_3, k) \in S_2$, 有 $a_k < \max\{a_1, a_2, a_3\}$, 则 $a_k = |a_i - a_j|$ 。由于 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, 第 k 位学生须通过推理排除头上数为 $a'_k = a_i + a_j$ 的情况。

若 $\exists (a_1, a_2, a_3, k) \in S_2$ 满足 $g(a_1, a_2, a_3, k, f(a_1, a_2, a_3, k)) = T$, 记 $V = \min\{f(a_1, a_2, a_3, k) \mid (a_1, a_2, a_3, k) \in S_2, g(a_1, a_2, a_3, k, f(a_1, a_2, a_3, k)) = T\}$ 。
 $\exists (a_1, a_2, a_3, k) \in S_2$ 满足 $f(a_1, a_2, a_3, k) = V, g(a_1, a_2, a_3, k, V) = T$, 则可以得到 $g(a_1', a_2', a_3', i, V_i) = T$ 或 $g(a_1', a_2', a_3', j, V_j) = T$, 因此 $f(a_1', a_2', a_3', i) = V_i$ 或 $f(a_1', a_2', a_3', j) = V_j$ 。
 $a'_k = a_i + a_j = a'_i + a'_j$, 因此 $(a_1', a_2', a_3', i) \in S_2, (a_1', a_2', a_3', j) \in S_2$, 而 $V_i < V, V_j < V$, 矛盾。

结论: 对 $\forall (a_1, a_2, a_3, k) \in S_2, g(a_1, a_2, a_3, k, R) = F, R \in \mathbb{Z}^+$ 。

- 2) 当 $(a_1, a_2, a_3, k) \in S_3$, 且 $(a_1, a_2, a_3, k) \notin S_1$ 。有 $a_k = \max\{a_1, a_2, a_3\}, a_k = a_i + a_j$, 第 k 位学生须通过推理排除头上数为 $a'_k = |a_i - a_j|$ 的情况。由于 $(a_1, a_2, a_3, k) \notin S_1$, 显然 $a_i \neq a_j$ 。

由前面讨论 1) 可推得 $g(a_1, a_2, a_3, k, V) = T \Leftrightarrow h(a_1', a_2', a_3', k, V) = T$

a) 当 $a_i > a_j$, 即 $a'_i > a'_j, (a_1', a_2', a_3', i) \in S_3, (a_1', a_2', a_3', j) \in S_2$ 。因此 $g(a_1', a_2', a_3', j, V_j) = F, g(a_1, a_2, a_3, k, V) = T \Leftrightarrow g(a_1', a_2', a_3', i, V_i) = T$ 。

b) 当 $a_j > a_i$, 即 $a'_j > a'_i, (a_1', a_2', a_3', j) \in S_3, (a_1', a_2', a_3', i) \in S_2$ 。因此 $g(a_1', a_2', a_3', i, V_i) = F, g(a_1, a_2, a_3, k, V) = T \Leftrightarrow g(a_1', a_2', a_3', j, V_j) = T$ 。

我们可以从考虑四元组 $(a_1, a_2, a_3, k) \in S_3$, 变为考虑四元组 $(a_1', a_2', a_3', i) \in S_3$ 或 $(a_1', a_2', a_3', j) \in S_3$ 。这样就形成了一个线性的推理方式, 而非先前分支庞大的推理方式。

由于可以只考虑 $(a_1, a_2, a_3, k) \in S_3$, 若 $(a_1, a_2, a_3, k) \notin S_1$, 可以转而考虑四元组 $(a_1', a_2', a_3', i) \in S_3$ 或 $(a_1', a_2', a_3', j) \in S_3$ 。由于三个数不可能无穷的递减, 因此在有限次转化后必然达到“终结情形”。

结论: 无论三个数如何变化, 无论从谁开始提问, 必然是头上数最大的人最先猜出自己头上的数。

由上述结论, 对于 (a_1, a_2, a_3, k) , 可以定义 $f(a_1, a_2, a_3, k)$ 的递推式:

- 1) 当 $k=1$ 时
 1. 当 $a_2 = a_3$ 时, $f(a_1, a_2, a_3, 1) = 1$
 2. 当 $a_2 > a_3$ 时, $f(a_1, a_2, a_3, 1) = f(a_2 - a_3, a_2, a_3, 2) + 2$
 3. 当 $a_2 < a_3$ 时, $f(a_1, a_2, a_3, 1) = f(a_3 - a_2, a_2, a_3, 3) + 1$
- 2) 当 $k=2$ 时
 1. 当 $a_1 = a_3$ 时, $f(a_1, a_2, a_3, 2) = 2$
 2. 当 $a_1 > a_3$ 时, $f(a_1, a_2, a_3, 2) = f(a_1, a_1 - a_3, a_3, 1) + 1$
 3. 当 $a_1 < a_3$ 时, $f(a_1, a_2, a_3, 2) = f(a_1, a_3 - a_1, a_3, 3) + 2$
- 3) 当 $k=3$ 时
 1. 当 $a_1 = a_2$ 时, $f(a_1, a_2, a_3, 3) = 3$

2. 当 $a_1 > a_2$ 时, $f(a_1, a_2, a_3, 3) = f(a_1, a_2, a_1 - a_2, 1) + 2$

3. 当 $a_1 < a_2$ 时, $f(a_1, a_2, a_3, 3) = f(a_1, a_2, a_2 - a_1, 2) + 1$

由于我们只考虑 $(a_1, a_2, a_3, k) \in S_3$, 因此 k 可由 a_1, a_2, a_3 三个数直接确定, 因此 $f(a_1, a_2, a_3, k)$ 可以简化为 $f(a_1, a_2, a_3)$ 。

利用上面的公式, 通过计算机编程来解决问题。参见源程序 1。

由于建立了线性的递推关系, 因此避免了问题规模随着提问次数呈指数型增长。有效的解决了问题, 其解决方法是建立在对问题的深入分析之上的。现在让我们总结解决问题中思路的主线;

提炼重要的前提条件 $\rightarrow$ 考虑何种情形为“终结情形” $\rightarrow$ 对非“终结情形”建立推理的等价关系 $\rightarrow$ 考虑何种情形能归结到“终结情形” $\rightarrow$ 分情况讨论并加以证明 $\rightarrow$ 得出结论并改写等价关系 $\rightarrow$ 得出公式

整个过程是从分析问题的本质入手, 而非一味单纯地从每个人思想出发, 并推导出普遍意义的结论。从综观全局的角度分析问题, 避免了最烦琐的“思维嵌套”, 并且使得问题规模从指数型转变为线性。

二、第一种推广

问题描述:

一位逻辑学教授有 $n(n \geq 3)$ 名非常善于推理且精于心算的学生。有一天, 教授给他们 n 人出了一道题: 教授在每个人脑门上贴了一张纸条并告诉他们, 每个人的纸条上都写了一个大于 0 的整数, 且某个数等于其余 $n-1$ 个数的和。于是, 每个学生都能看见贴在另外 $n-1$ 个同学头上的整数, 但却看不见自己的数。

教授轮流向 n 发问: 是否能够猜出自己头上的数。经过若干次的提问之后, 当教授再次询问某人时, 此人突然露出了得意的笑容, 把贴在自己头上的那个数准确无误的报了出来。

我们的问题就是: 证明是否一定有人能够猜出自己头上的数, 若有人能够猜出, 则计算最早在第几次提问时有人先猜出头上的数, 分析整个推理的过程, 并总结出结论。

我们对 $n=3$ 时的定义加以修改:

定义:

定义 1: 用 $n+1$ 元组 $(a_1, a_2, \dots, a_n, k)$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^+$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ 来描述推理过程中的一种情形, 其中 n 个人头上数分别为 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 从第一位学生开始提问, 且当前的被提问者为第 k 位学生。

性质 F_1 : 对于 $n+1$ 元组 $(a_1, a_2, \dots, a_n, k)$, 第 k 位学生可以不依靠别人的回答进行推理, 能够直接判断出自己头上数, 并称 $n+1$ 元组描述的情形为“终结情形”。

性质 F_2 : 对于 $n+1$ 元组 $(a_1, a_2, \dots, a_n, k)$, $a_k < \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 并称 $n+1$ 元组描述的情形为“一类情形”。

性质 F_3 : 对于 $n+1$ 元组 $(a_1, a_2, \dots, a_n, k)$, $a_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 并称 $n+1$ 元组描述的情形为“二类情形”。

定义 2: 集合 $S_1 = \{(a_1, a_2, \dots, a_n, k) \mid (a_1, a_2, \dots, a_n, k) \text{ 满足性质 } F_1\}$ 。

定义 3: 集合 $S_2 = \{(a_1, a_2, \dots, a_n, k) \mid (a_1, a_2, \dots, a_n, k) \text{ 满足性质 } F_2\}$ 。

定义 4: 集合 $S_3 = \{(a_1, a_2, \dots, a_n, k) \mid (a_1, a_2, \dots, a_n, k) \text{ 满足性质 } F_3\}$ 。