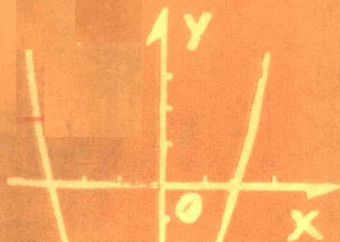
小学教师进修中等师范教材

代数与初等函数

习题解答

华 棋　建 生

XIAO JIAO JINXIUZHONGSHIJIAOCAI



北京市
河南省 小学教师进修中师数学教材编写组

河南大学出版社

小学教师进修中等师范教材

代数与初等函数
习题解答

华棋　建生

河南大学出版社

小学教师进修中等师范教材
代数与初等函数
习题解答
华 棋　建 生
责任编辑　程　庆

河南大学出版社出版
河南省新华书店发行
兰考县印刷厂印刷

开本，787×1092　1/32　印张，11.375　字数，236千字
1986年7月第1版　1987年1月第2次印刷
印数，　25，000—65，000
统一书号：7435·011　　定价：1.60元

说　明

由陕西、河南、甘肃、内蒙古、北京五省、市、自治区协作编写的一套小学教师进修中等师范教材已经出版发行。本书是这套教材中《代数与初等函数》一书的习题解答，以配合广大小学教师进修学习相应教材。

本书按照原教材的逻辑系统，以原教材中相应的基础知识和思考方法为依据，除第十章第二节习题四十一略去外，对原教材上、下两册每章各节的习题全部作了解答。为有利于自学，对较难的题目，解答之前先作了分析，尤其对读者感到困难的排列、组合和概率部分的习题，分析还相当详细。为开阔思路，对有些习题还给出了多种解法。

本书内容的编排顺序与原教材相同。目录中的章、节标题即是原教材中的章、节标题，目录中习题后面括号中所注页码即是该习题在原教材中的页码。

本书稿曾由河南大学李若冰同志认真审阅，在此表示感谢。

限于编者水平，加之时间仓促，缺点错误在所难免，望广大读者在使用中随时提出意见，以便进一步修改。

编　者

一九八六年一月

目　　录

第一章　数集

第一节　有理数集

习题一　（第9页）…………（1）

第二节　实数集

习题二　（第17页）…………（3）

第三节　实数的运算

习题三　（第24页）…………（7）

第四节　复数集

习题四　（第34页）…………（10）

第二章　二元二次方程组和线性方程组

第一节　二元二次方程组

习题五　（第45页）…………（16）

第二节　线性方程组

习题六　（第69页）…………（26）

第三章　不等式

第一节　不等式的性质

习题七　（第80页）…………（40）

第二节　分式不等式和绝对值不等式

习题八　（第88页）…………（44）

第三节　不等式的证明

习题九　（第97页）…………（55）

第四章　不定方程

第一节　二元一次不定方程
习题十　（第114页）…………………………………………（65）
第二节　一次不定方程组
习题十一　（第118页）……………………………………（72）
第五章　函数、幂函数、指数函数和对数函数
第一节　函数
习题十二　（第123页）……………………………………（77）
第二节　函数的单调性、奇偶性
习题十三　（第130页）……………………………………（81）
第三节　反函数、互为反函数的函数图象间的关系
习题十四　（第137页）……………………………………（87）
第四节　幂函数、指数函数、对数函数
习题十五　（第152页）……………………………………（93）
第五节　指数方程和对数方程
习题十六　（第157页）……………………………………（100）
复习题　（第160页）………………………………………（108）
第六章　三角函数
第一节　角的概念
习题十七　（第11页）……………………………………（128）
第二节　任意角的三角函数
习题十八　（第23页）……………………………………（133）
第三节　三角函数的诱导公式
习题十九　（第31页）……………………………………（141）
第四节　已知三角函数值求角
习题二十　（第35页）……………………………………（145）
第五节　三角函数的图象和性质

习题二十一　（第46页）……………………………………（150）
习题二十二　（第56页）……………………………………（155）
习题二十三　（第61页）……………………………………（164）
第六节　两角和与差、倍角、半角的三角函数
习题二十四　（第69页）……………………………………（167）
习题二十五　（第78页）……………………………………（176）
第七节　三角函数的积化和差与和差化积
习题二十六　（第87页）……………………………………（182）
第八节　反三角函数和简单的三角方程
习题二十七　（第102页）……………………………………（188）
习题二十八　（第114页）……………………………………（195）
第七章　多项式
第一节　一元多项式
习题二十九　（第129页）……………………………………（204）
第二节　多项式的除法
习题三十　（第134页）……………………………………（208）
第三节　数余定理、因式定理及其应用
习题三十一　（第138页）……………………………………（210）
习题三十二　（第142页）……………………………………（212）
第八章　数列和数学归纳法
第一节　等差数列
习题三十三　（第155页）……………………………………（217）
第二节　等比数列
习题三十四　（第165页）……………………………………（234）
第三节　数列的极限
习题三十五　（第189页）……………………………………（248）
第四节　数学归纳法

习题三十六　（第204页）……………………………………（258）

第九章　排列、组合和二项式定理

第一节　排列

习题三十七　（第226页）……………………………………（217）

第二节　组合

习题三十八　（第242页）……………………………………（286）

第三节　二项式定理

习题三十九　（第254页）……………………………………（299）

第十章　概率统计初步

第一节　概率初步

习题四十　（第276页）……………………………………（305）

复习题　（第326页）……………………………………（316）

第一章　数集

第一节　有理数集

习题一　（第9页）

1. 判断下列各命题的真假，并说明理由：

（1）有理数都是分数，分数也都是有理数；

（2）有理数都是小数，小数也都是有理数；

（3）两个有理数的和、差、积、商都是有理数；

（4）任何正有理数都大于任何负有理数。

答：（1）如果把每一个自然数m都看成是一个以1为分母，以m为分子的分数，把数0看成以1为分母，以0为分子的分数，并且规定$\frac{-m}{n}=-\frac{m}{n}$（其中$m$、$n$是自然数），那么，我们可以说有理数都是分数，反之，分数也都是有理数，所以命题是真的。

（2）因为一切有理数都可以表示成分数$\frac{m}{n}$（其中m是整数，n是自然数），而一切分数都可以化成有限小数或无限循环小数，整数可以看作是小数点后面有无限个0的小数，所以，有理数都是小数。但小数不一定是有理数，因为无限不循环小数是小数，但不是有理数。前者为真命题，后者是假命题。

（3）因为在有理数集内，和、差、积、商（除数不是零）运算是封闭的，就是说有理数的四则运算的结果仍是有理数。所以这个命题是真的。

（4）根据有理数大小的规定，在数轴上，正有理数所对应的点在负有理数对应的点的右边。所以，任何正有理数都大于任何负有理数这个命题是真的。

2. 指出在下面列举的数集里，各对哪些算术运算是封闭的？

（1）由所有正偶数组成的集合A，即

$$A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\};$$

（2）所有10的倍数组成的集合B，即

$$B=\{\cdots, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, \cdots\};$$

（3）一切能被3整除的数的集合。

答：（1）集合A对于加法和乘法是封闭的。

（2）集合B对加法、减法、乘法是封闭的。

（3）一切能被3整除的数的集合对于加法、减法和乘法是封闭的。

3. 在下列两个有理数之间，写出三个有理数：

（1）1.4与1.5；　（2）-0.178与-0.179；

（3）32.8与-0.87；（4）-17.685与17.684

解：（1）1.41，1.421，1.4325；

（2）-0.1782，-0.17835，-0.178351；

（3）-0.86，1，32.6；

（4）-5.7，2.718254，10.315。

4. 有理数集的性质中，哪些是和整数集所共有？哪些是整数集所没有的？

答： 在有理数集的性质中，有序性和可数性和整数集的性质相同，而有理数的稠密性是整数集所没有的。

第二节　实数集

习题二　（第17页）

1. 什么叫做无理数？举出两个无理数的例子。

答： 无限的不循环小数，叫做无理数。例如，

$\sqrt[3]{2}=1.25992\cdots$，3.4040040004…等等

2. 下面的话对吗？如果不对，举一反例：

（1）带根号的数都是无理数；

（2）无限小数都是无理数。

答：（1）"带根号的数都是无理数"这句话不对。例如，$\sqrt{4}$就是有理数。

（2）"无限小数都是无理数"这句话不对。

例如，3.151515…是无限小数，但它是无限循环小数，所以不是无理数。

3. 圆周率π是有理数吗？是无理数吗？是实数吗？

答： 圆周率π不是有理数，π是无理数，也是实数。

4. 请你举出两个无理数来。

答： $\sqrt{3}$、0.1010010001…是无理数。

5. 证明$\sqrt{3}$是无理数。

证明： 因为负数的平方等于与它相反的正数的平方，而$0^2=0\neq 3$，所以，只要证明没有一个正有理数的平方等于3就可以了。

设$x^2=3$，x不可能是整数，因为$1^2=1$，$2^2=4$，$1^2<3<2^2$，而1与2之间不存在其他整数。

设x是一个正分数，则可把它化为最简分数$\frac{n}{m}$的形式，即$x=\frac{n}{m}$（m、n是互质数），则有

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2=3,$$

由此可得 $$n^2=3m^2$$

由此可知，n^2能被3整除，所以，n^2是3的倍数。因为只有3的倍数的平方能被3整除，所以，n是3的倍数，令$n=3p$（p是自然数），由此得

$(3p)^2=3m^2$，$9p^2=3m^2$，$m^2=3p^2$。

所以，m^2也是3的倍数。即m也是3的倍数。

因为m、n都是3的倍数，所以$\frac{n}{m}$不是一个最简分数，这与假设$\frac{n}{m}$是最简分数相矛盾，说明x不可能是正分数，即x不是有理数，它是一个无理数。

6. （1）已知$\sqrt{2.71}$精确到0.01的不足近似值是1.64，写出它的对应过剩近似值。

（2）已知$\sqrt{22.15}$精确到0.001的过剩近似值是4.704，写出它的对应的不足近似值。

答：（1）对应的过剩近似值是1.65。

（2）对应的不足近似值是4.706。

7. 求无理数2.71828183…精确到0.001、0.0001和0.000001的不足近似值和过剩近似值。

答：精确到0.001的不足近似值为：2.718，

过剩近似值为：2.719；

精确到0.0001的不足近似值为：2.7182，

过剩近似值为：2.7183；

精确到0.000001的不足近似值为：2.718281，

过剩近似值为：2.718282。

8. 一个正方形的面积是3.06米^2，求它的边长。（精确到1毫米）

答：正方形的边长为$x=\sqrt{3.06}\approx1.749$（米）。

9. 下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？写出它们的绝对值。

$-\pi$，-3.1416，$0.3174531745\cdots$，$2\frac{2}{3}$，$-\sqrt{3}$，

1.732，0，$-\sqrt{16}$，$-3.030030003\cdots$。

答：有理数有：-3.1416，$0.3174531745\cdots$，$2\frac{2}{3}$

1.732，0，$-\sqrt{16}$；

无理数有：$-\pi$，$-\sqrt{3}$，$-3.030030003\cdots$。

$|-3.1416|=3.1416$，

$|0.3174531745\cdots|=0.3174531745\cdots$，

$\left|2\frac{2}{3}\right|=2\frac{2}{3}$，$|1.732|=1.732$，$|0|=0$，

$|-\sqrt{16}|=4$，$|-\pi|=\pi$，$|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$，

$|-3.030030003\cdots|=3.030030003\cdots$。

10．（1）如果a表示一个正实数，那么$-a$表示什么数？$|a|=$？

（2）如果a表示一个负实数，那么$-a$表示什么数？$|a|=$？举例说明。

答：（1）如果a表示一个正实数，则$-a$表示一个负实数，$|a|=a$。

（2）如果a表示一个负实数，则$-a$表示一个正实数，$|a|=-a$。

例如，$a=-2$，则$-a=-(-2)=2$，

$|a|=-a=-(-2)=2$。

11．有没有最小的无理数？有没有最小的实数？有没有绝对值最小的实数？

答：没有最小的无理数，也没有最小的实数，绝对值最小的实数是0。

12．比较下列各组数里两个实数的大小：

（1）1.5和$1.\dot{5}$；

（2）-3.14159和-3.1416；

（3）π和3.14；　　（4）1.5和$-1.55\cdots$；

（5）$-\sqrt{10}$和$-\pi$；　　（6）$-2.\dot{5}\dot{3}$和-2.535。

答：（1）$1.5<1.\dot{5}$，

（2）$-3.14159>-3.1416$

（3）$\pi>3.14$，　　（4）$1.5>-1.55\cdots$，

（5）$-\sqrt{10}<-\pi$，　　（6）$-2.\dot{5}\dot{3}>-2.53\dot{5}$

13. 回答下列问题：

（1）如果$a>0$，$b<0$，那么，a和b哪一个大？

（2）如果$a<0$，$b<0$，并且$|a|>|b|$，那么，a和b哪一个大？

（3）如果$a<b$，那么，$|a|$和$|b|$哪一个大？（要进行讨论）

答：（1）如果$a>0$，$b<0$，则$a>b$。

（2）如果$a<0$，$b<0$，且$|a|>|b|$，则$a<b$。

（3）如果$a<b$。

若$a<0$，$b<0$，则$|a|>|b|$，

若$a>0$，$b>0$，则$|a|<|b|$。

若$a\leqslant 0$，$b>0$，$\begin{cases} |a|\geqslant b, & 则|a|\geqslant|b|, \\ |a|<b, & 则|a|<|b|. \end{cases}$

14. 设R是实数集，Q为有理数集，$\overline{Q}$为无理数集，求

（1）$R\cup Q$，$R\cup\overline{Q}$，$Q\cup\overline{Q}$，

（2）$R\cap Q$，$R\cap\overline{Q}$，$Q\cap\overline{Q}$。

解：（1）$R\cup Q=R$，$R\cup\overline{Q}=R$，$Q\cup\overline{Q}=R$。

（2）$R\cap Q=Q$，$R\cap\overline{Q}=\overline{Q}$，$Q\cap\overline{Q}=\varnothing$。

第三节　实数的运算

习题三　（第24页）

1. 两个无理数的和与差能否等于有理数？能否等于无

理数？举例说明。

答： 两个无理数的和与差可能是有理数，例如

$0.030030003\cdots + 0.303303330\cdots = 0.3333\cdots$，

$0.232232223\cdots - 0.010010001\cdots = 0.2222\cdots$。

两个无理数的和与差也可能是无理数，例如

$$3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}，$$

$$3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}。$$

2．两个无理数的积与商能否等于有理数？能否等于无理数？举例说明。

答：（1）两个无理数的积与商可能等于有理数，

例如 $$2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 18，$$

$$2\sqrt{3} \div 3\sqrt{3} = \frac{2}{3}。$$

（2）两个无理数的积与商可能等于无理数，

例如 $$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{2} \div \sqrt{5} = \frac{1}{5}\sqrt{10}。$$

3．试证明：一个加数是有理数，另一个加数是无理数，则它们的和是无理数。

证明： 设 α是有理数，β是无理数，$\alpha + \beta = \gamma$。

由此可得$\gamma - \alpha = \beta$。

如果γ是有理数，根据有理数集对于减法是封闭的，即$\gamma - \alpha$是有理数，这与已知β是无理数相矛盾，所以，α与β的和是无理数。

4．试证明：一个因数是非零有理数，另一个因数是无理数，则它们的积是无理数。

证明：设α是非零有理数，β是无理数，$\alpha\cdot\beta=\gamma$。

由此可得 $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\beta$。

如果γ是有理数，而有理数集对除法（除数不是零）是封闭的，即$\dfrac{\gamma}{\alpha}$应是有理数，这与假设β是无理数相矛盾，因此，γ应是无理数。

5. $2+\sqrt{3}$这个数是否属于实数集？

答：因为实数集对加法运算是封闭的，所以，2与$\sqrt{3}$的和属于实数集。

6. 在下列两个实数之间，写出三个实数：

（1）$\alpha=2.8156$，$\beta=2.9083$；

（2）$\alpha=3.54281\cdots$，$\beta=3.54376$；

（3）$\alpha=0.101001000\cdots$，$\beta=0.110111011110\cdots$；

（4）$\alpha=\sqrt{2}$，$\beta=1.5$；

（5）$\alpha=3.76$，$\beta=3.848448444\cdots$。

解：（1）2.823，2.8701，2.8904。

（2）3.54291，3.5429456，3.542901。

（3）0.1012，0.1013，0.1010014。

（4）1.42503，1.4152，1.4143。

（5）3.761，3.762，3.763。

7. 在任意两个实数a与b之间，，写出两个实数来。

解： $\dfrac{a+b}{2}$， $\dfrac{a+3b}{4}$。

8. 实数集有哪些性质？

答：实数集有以下性质：