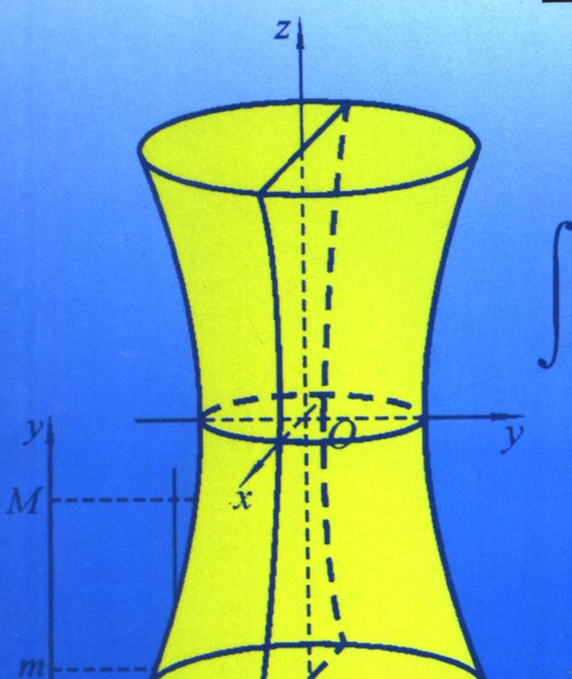
21 世纪高等教育规划教材

上册

# 应用高等数学

供非理工类各专业用

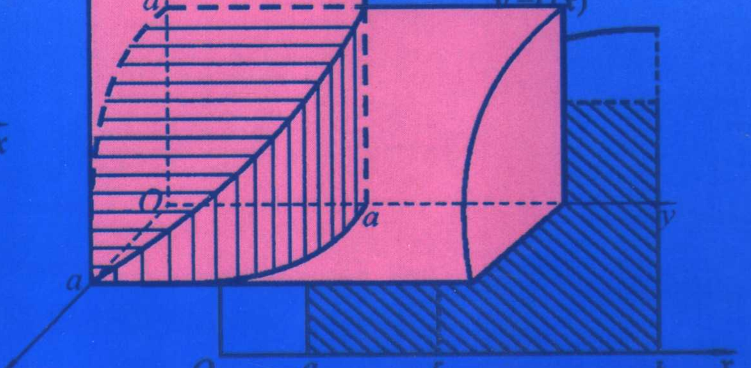
主编 于德明




$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$$(-\infty, +\infty)$$




浙江科学技术出版社

21世纪高等教育规划教材
浙江省高等教育重点教材

上册

# 应用高等数学

供非理工类各专业用

主　　编　于德明
主　　审　施沛沄
副 主 编　（按姓氏笔画为序）
华荣伟　沈建根
罗道宝　洪　哲
童宏胜
编写人员　（按姓氏笔画为序）
毕道旺　杨乃如
陆　毅　金友良
金来友

浙江科学技术出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

应用高等数学.上册/于德明主编.—修订本.—杭州:浙江科学技术出版社,2005.9
供非理工类各专业用
ISBN 7-5341-2757-2

Ⅰ.应...　Ⅱ.于...　Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 106849 号

责任编辑:宋　东
封面设计:金　晖

21 世纪高等教育规划教材
浙江省高等教育重点教材
**应用高等数学**
**上　册**
(供非理工类各专业用)
主编　于德明
*
浙江科学技术出版社出版发行
杭州富春电子印务有限公司排版
杭州富春印务有限公司印刷
开本:787×1092　1/16　印张:11.25　字数:275 000
2005年9月第　1　版
2006年8月第2次印刷
**ISBN 7-5341-2757-2**
**定　　价:20.00 元**

# 前 言

《应用高等数学》由浙江省二十多所高职高专院校联合编写。全书共三册，包括上册（供理工类各专业用）、上册（供非理工类各专业用）和下册（供各类专业选用）。本教材于2001年首次出版，经过不断地修订完善，逐渐成为浙江省较有影响的高职高专数学教材之一。2005年，《应用高等数学》被列为浙江省高等教育重点建设教材，为此，成立了《应用高等数学》编写委员会，由温州职业技术学院王小明老师担任编写委员会主任。

本书编委会在教材的建设中力求体现以下原则：

一、以学生为本。针对高职高专学生的特点，在保留高等数学核心内容的前提下，对教学内容予以不同程度的精简与优化。我们注重突出基本概念和基本方法，讲清重要结论，淡化某些过于繁杂的理论推证。本教材基本上能够满足高职高专素质教育和各类专业教育的要求。为方便学生，我们还将初等数学的知识要点编成"预备知识"附于书后，以供备查。

二、重视直观化描述。对常用数学概念和结论的叙述，尽可能配以直观化描述。全书配有大量插图和图表，意在从直观意义和几何意义入手，帮助学生更好地掌握数学知识。

三、突出应用能力。实践应用是数学知识价值的最好体现。在教材知识结构、编写构思以及例题、习题等方面的安排上，我们着意培养学生处理实际问题的应用能力。

四、运用计算机。本书安排了数学软件 Mathematica 的选学内容，以强化学生处理数据和图形的能力，并强化他们运用计算机的意识。这些内容易懂易学，对于提高学生实际应用能力有显著的作用。

五、知识模块组合灵活化。本书的框架结构已为模块式教学留下较大的组合空间。常用的数学知识模块在本书中已经齐全。我们力图使这些知识模块保持最大限度的独立性，以方便各类专业选学。

本教材理工类上册内容，除一元和多元函数微积分以外，还包括常微分方程、级数和 Laplace 变换。非理工类上册以一元和多元微积分为主，同时加强了高等数学在经济领域中的应用。下册为线性代数和概率统计的内容。三册内容前后贯串，又有相对的独立性，选用自由度大。各册中都安排了结合本册内容的 Mathematica 数学实验。

为了有利于学生复习巩固和提高，我们同时编写了与本书配套的《应用高等数学练习册》供各校选用。该练习册一套共三册，题目题型与难度和各册教材的教学内容密切配合。它们已在教学实践中经过多年的使用，相信定能成为读者得心应手的朋友。

本套教材非理工类上册主编为于德明（浙江机电职业技术学院），理工类上册主编为孔亚仙（浙江建设职业技术学院），下册主编为王小明（温州职业技术学院）。

非理工类上册副主编（按姓氏笔画排序，下同）为华荣伟（浙江医学高等专科学校）、沈建根（嘉兴职业技术学院）、罗道宝（浙江经贸职业技术学院）、洪哲（浙江科技学院）、童宏胜（杭州职业技术学院）；参加编写的人员还有：毕道旺（浙江万里学院国际经贸职业技术学院）、杨乃如（杭州职业技术学院）、陆毅（浙江国际海运职业技术学院）、金友良（丽水职业技术学院）、金来友（浙江旅游职业技术学院）。

理工类上册副主编为王珍娥（浙江机电职业技术学院）、严小宝（丽水职业技术学院）、陈建芳（绍兴托普信息职业技术学院）、金辉（浙江医药高等专科学校）、潘仲川（浙江交通职业技术学院）；参加编写的人员还有：丁匡平（丽水职业技术学院）、李淑红（丽水学院）、李新柯（浙江建设职业技术

学院)、吴晓红(杭州万向职业技术学院)、钟继雷(浙江国际海运职业技术学院)。

下册副主编为王新力(浙江经济职业技术学院)、杨迪明(浙江邮电职业技术学院)、胡亚红(丽水学院)、宣明(温州职业技术学院);参加编写的人员还有:王新成(温州职业技术学院)、戎笑(浙江机电职业技术学院)、阮晓刚(浙江电力职业技术学院)、骆秋琴(温州科技职业学院)、高永久(杭州科技职业技术学院)、黄柏江(浙江邮电职业技术学院)、蓝春霞(丽水学院)。

本教材各分册中有关 Mathematica 数学实验的内容,均由温州职业技术学院王小明撰写。

上述全体编写人员即为本书编写委员会成员,其中具有高级职称的老师占 80%以上。

我省高职高专数学界的前辈骆忍冬、施沛　、王潘玲老师,是最早主持编写本教材的三位学者,多年来他们始终积极参与本教材的撰写与组织工作,这次又承蒙担任本套教材各分册的主审,为提高本书的质量作出了重要贡献。编委会特向他们致以崇高的敬意。

本书的编写与发行得到了浙江省数学会职教数学专业委员会的大力支持与帮助,编委会一并致以诚挚的感谢。

《应用高等数学》编写委员会

2006 年 7 月

# 目　　录

# 第一章　函数的极限与连续

函数是微积分研究的主要对象,极限的概念、理论和方法是微积分学研究的基本工具.本章将在复习函数概念和性质的基础上进一步介绍复合函数、初等函数、函数的极限及连续性等内容.

## §1-1　初等函数

### 一、函数的概念

**1. 函数定义**

日常生活中,我们经常看到两个事物之间存在着某种联系,如购买物品的单价确定后,付款金额与购买数量之间存在着一种关系;某天的气温与所处的时间之间存在着一种关系;汽车的耗油量与所行驶的路程之间存在着一种关系,我们把上述这些关系统称为是一种函数关系.

**定义 1.1**　设 $D$ 是一个实数集,如果有一个对应法则 $f$,对每一个 $x\in D$,都有惟一数值 $y$ 和它对应,则将对应法则 $f$ 称为定义在$D$ 上的一个**函数**,记作 $y=f(x)$,$x$ 称为**自变量**,$y$ 称为**因变量**,数集 $D$ 称为函数的**定义域**.当 $x$ 取遍$D$ 中的数,对应的 $y$ 构成一个数集$M$ 称为函数的**值域**.

函数的定义域、对应法则称为函数的二要素.在函数定义中,由定义域与对应法则确定了函数的值域,如果两个函数的定义域、对应法则均相同,则称这两个函数是同一个函数,否则是两个不同的函数.如 $y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$,因为它们的定义域与对应法则完全相同,所以是同一个函数;而 $y=1$ 与 $y=\frac{x}{x}$,由于定义域的不同,是两个不同的函数.

**2. 函数值**

当自变量 $x$ 在定义域内取某一定值$x_0$ 时,因变量 $y$ 按对应法则$f$ 得出的对应值称为函数当$x=x_0$ 的**函数值**,记为 $f(x_0)$.

**例 1**　已知 $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$,求 $f(0),f(-x)$.

**解**　$f(0)=\frac{0}{1+0}=0,f(-x)=\frac{(-x)^2}{1+(-x)}=\frac{x^2}{1-x}$

**例 2**　已知 $f(x+1)=x^2-3$,求 $f(x),f(1),f(x^2)$.

**解**　令 $x+1=t$,则 $x=t-1$

$f(t)=(t-1)^2-3=t^2-2t-2$

改写　$f(x)=x^2-2x-2$

$f(1)=1^2-2\times1-2=-3$

$f(x^2)=(x^2)^2-2x^2-2=x^4-2x^2-2$

**3. 函数的定义域**

如果一个函数是用解析式来表示的,我们约定其定义域为使数学表达式有意义的自变量所能取的实数集合.要使表达式有意义,一般应考虑以下五个方面:

a. 分母不等于零;　　b. 偶次根式根号内的式子大于或等于零;

c. $\log_a x$ 的真数需大于零;　　d. $\arcsin x,\arccos x$ 中,$|x|\leqslant1$;

e. 表达式中含有分式、根式和反三角函数式,则应取各部分定义域的交集.

**例 3** 已知函数 $y=\dfrac{5x+7}{\sqrt{2x-6}}$,求定义域.

**解** 因为偶次根号内的式子非负,分母不能为零,有

$2x-6>0$,即 $x>3$

所以函数的定义域为 $x\in(3,+\infty)$

**例 4** 求函数 $y=\log_2(x^2-3x+2)+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域.

**解** 因为真数必须大于零,同时考虑反正弦函数的定义域要求,有

$$\begin{cases}x^2-3x+2>0\\ -1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1\text{ 或 }x>2\\ -3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow -3\leqslant x<1\text{ 或 }2<x\leqslant 4$$

所以函数的定义域为 $x\in[-3,1)\cup(2,4]$

在研究函数时,经常用到邻域概念. 设 $x_0$ 是实数轴上一点,$\delta$ 为某一正数,我们把以 $x_0$ 为中心,长度为 $2\delta$ 的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为 $x_0$ 的 $\delta$ **邻域**,或简称为点 $x_0$ 的**邻域**.

**4. 函数的表示法**

通常函数有三种表示法:表格法、图形法和公式法(又称解析法).

一个函数在其定义域的不同区间内,用不同的式子分段表示的函数称为**分段函数**. 如

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 2x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

就是一个分段函数

**注意** 上面的函数不是两个函数,而是用两个式子表示一个函数. 因此,要求定义域内某个自变量 $x$ 的函数值时,一定要注意将此自变量代入分段函数在相应定义区间上的公式. 分段函数的定义域是各自变量取值集合的并集.

**例 5** 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0;\\ x^2, & 0<x\leqslant 1;\\ -2x+4, & x>1.\end{cases}$ 求(1) $f(-1)$;

(2) $f(1)$; (3) 函数的定义域; (4) 画出函数图形.

**解** (1) $f(-1)=-1+1=0$.

(2) $f(1)=1^2=1$.

(3) 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(4) 作图如右.

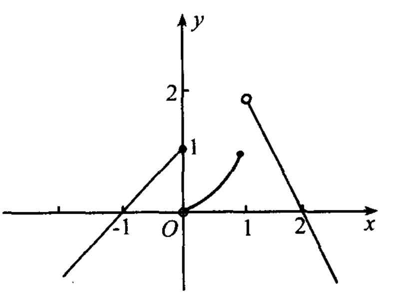



图 1-1

## 二、函数的几种特性

**1. 周期性**

**定义 1.2** 设函数 $y=f(x)$在区间$(a,b)$内有定义,若存在非零常数 $T$,对任意 $x\in(a,b)$与 $x+T\in(a,b)$,都有 $f(x+T)=f(x)$恒成立,则称 $y=f(x)$是以 $T$ 为周期的**周期函数**,满足这个等式的最小正数 $T$ 称为函数$y=f(x)$的**最小正周期**,简称**周期**.

例如 $y=\sin x$、$y=\cos x$ 的周期是 $2\pi$,$y=\tan x$、$y=\cot x$ 的周期是 $\pi$.

**例 6** 计算 $y=\sin^2 x$ 的周期.

**解** $y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos 2x}{2}$,由于 $y=\cos u$ 的周期为 $2\pi$,$y=\cos 2x$ 的周期为$\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$,所以函数的周期为 $\pi$.

2. **奇偶性**

**定义 1.3** 设函数 $y=f(x)$的定义域 $A$ 关于原点对称.若对任意的 $x\in A$,都有 $f(-x)=-f(x)$恒成立,则称 $y=f(x)$是**奇函数**;如果对任意的 $x\in A$,都有 $f(-x)=f(x)$恒成立,则称 $y=f(x)$是**偶函数**.

在直角坐标系下,奇函数的图形关于原点对称,偶函数图形关于 $y$ 轴对称.

**例 7** 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=x\sin x$; (2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; (3) $y=x+\cos x$.

**解** 本例中定义域都是$(-\infty,+\infty)$.

(1) 因为 $f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x)$,所以 $y=x\sin x$ 是偶函数;

(2) 因为 $f(-x)=\ln[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

$$=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x);$$

所以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数;

(3) 因为 $f(-x)=-x+\cos(-x)=-x+\cos x$,所以 $y=x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

3. **单调性**

**定义 1.4** 设函数 $y=f(x)$在$(a,b)$内有定义.对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$,若 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$恒成立,则称函数 $y=f(x)$在区间$(a,b)$内是**单调增加的**;若 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$恒成立,则称函数 $y=f(x)$在区间$(a,b)$内是**单调减少的**.

**例 8** 讨论函数 $y=x^2$ 的单调性.

**解** 函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$,在区间$(-\infty,+\infty)$上任取两点 $x_1,x_2$,不妨设 $x_1<x_2$,于是

$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)$

当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$时,$f(x_2)-f(x_1)>0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以函数 $y=x^2$ 在区间$(0,+\infty)$上是单调增加的;

当 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$时,$f(x_2)-f(x_1)<0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,所以函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上是单调减少的;

当 $x_1\in(-\infty,0)$,$x_2\in(0,+\infty)$时,无法一般性地判断 $f(x_2)-f(x_1)$的正、负号,即无法判断 $f(x_1)$,$f(x_2)$的大小,所以函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是不单调的.

4. **有界性**

**定义 1.5** 设函数 $y=f(x)$在区间$(a,b)$上有定义.如果存在正数 $M$,对于任意 $x\in(a,b)$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$在$(a,b)$上是**有界**的,正数 $M$ 称为函数 $y=f(x)$的**界**;若不存在这样的正数 $M$,则称 $y=f(x)$在$(a,b)$上是**无界**的.

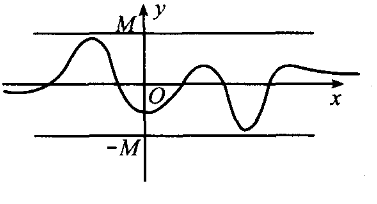


图 1-2

从几何上看,有界函数的图形被限制在两条平行于 $x$ 轴的直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 所确定的带形区域内.如:$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界的,$|\sin x|\leqslant 1$,$M=1$.

$y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上是无界的,因为找不到这样的正数 $M$,使得$|x^3|\leqslant M$ 恒成立.

而 $y=x^3$ 在$(-10,1)$上是有界的,$|x^3|\leqslant 10^3$,$M=10^3$.

## 三、反函数

**定义 1.6** 设函数 $y=f(x)$在区间$(a,b)$内有定义,其值域为$(c,d)$,若对于任意 $y\in(c,d)$,都存在惟一一个 $x\in(a,b)$与之对应,则得到一个以 $y$ 为自变量,$x$ 为因变量的函数,称这个定义在$(c,d)$上的函数为 $y=f(x)$的**反函数**.记作 $x=f^{-1}(y)$,这里 $f^{-1}$是反函数的记号,$f^{-1}$的定义域是$(c,d)$,值域是$(a,b)$.

由于习惯上用 $x$ 表示自变量,$y$ 表示因变量,于是 $y=f(x)$的反函数可表示为:$y=f^{-1}(x)$.

**例 9** 苹果零售价为2元/斤,购买金额 $y$ 元与重量$x$ 斤的关系为$y=2x$,试确定购买重量与金额间的函数关系.

**解** $x=f^{-1}(y)=\frac{1}{2}y$,改写 $y=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x$.

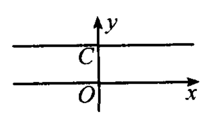
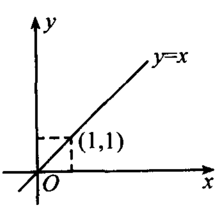
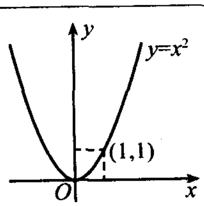
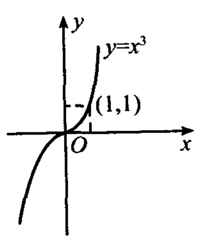
由反函数的定义知,在定义区间上单调的函数必有反函数,且反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形与原函数 $y=f(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

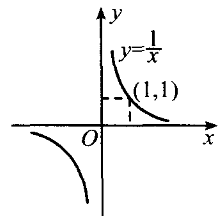
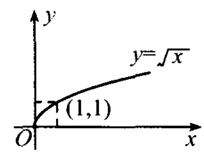
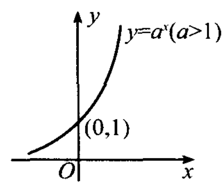
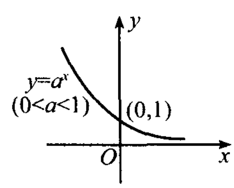
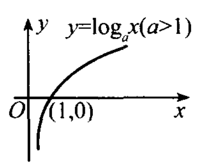
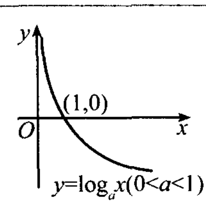
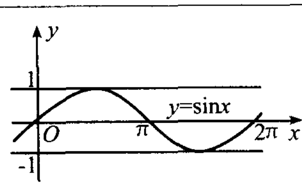
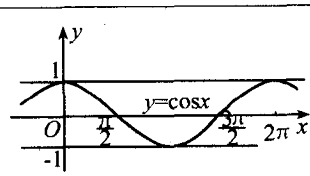
## 四、初等函数

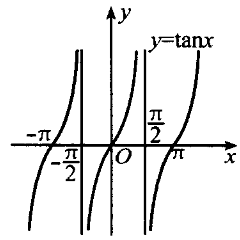
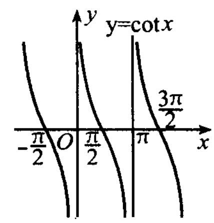
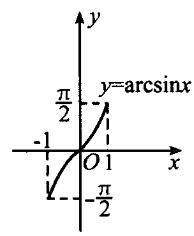
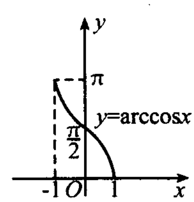
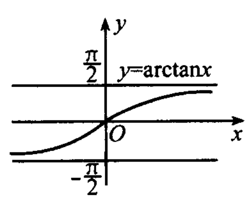
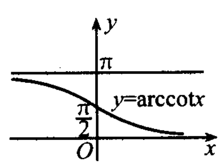
### 1. 基本初等函数

中学学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**,现将其图形及性质列表如下:

**表 1-1 基本初等函数的图形与主要性质**

| | | 定义域和值域 | 图像 | 特性 |
|---|---|---|---|---|
| 常数函数 | $y=C$ | $x\in(-\infty,+\infty)$ |  | 偶函数 |
| 幂函数 | $y=x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数,单调增加 |
| | $y=x^2$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in[0,+\infty)$ |  | 偶函数.在$(-\infty,0)$内单调减少,在$(0,+\infty)$内单调增加 |
| | $y=x^3$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数,单调增加 |

| | | 定义域和值域 | 图像 | 特性 |
|---|---|---|---|---|
| 幂函数 | $y=x^{-1}$ | $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$<br>$y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ |  | 奇函数,单调减少 |
| | $y=x^{\frac{1}{2}}$ | $x\in[0,+\infty)$<br>$y\in[0,+\infty)$ |  | 单调增加 |
| 指数函数 | $y=a^x$<br>$(a>1)$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(0,+\infty)$ |  | 单调增加,经过点(0,1) |
| | $y=a^x$<br>$(0<a<1)$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(0,+\infty)$ |  | 单调减少,经过点(0,1) |
| 对数函数 | $y=\log_a x$<br>$(a>1)$ | $x\in(0,+\infty)$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 单调增加,经过点(1,0) |
| | $y=\log_a x$<br>$(0<a<1)$ | $x\in(0,+\infty)$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 单调减少,经过点(1,0) |
| 三角函数 | $y=\sin x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in[-1,1]$ |  | 奇函数,有界,周期 $2\pi$,在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加,在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$内单调减少($k\in\mathbf{Z}$) |
| | $y=\cos x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in[-1,1]$ |  | 偶函数,有界,周期 $2\pi$,在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$内单调减少,在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$内单调增加($k\in\mathbf{Z}$) |

| | | 定义域和值域 | 图像 | 特性 |
|---|---|---|---|---|
| 三角函数 | $y=\tan x$ | $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数，周期 $\pi$，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$ |
| | $y=\cot x$ | $x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数，周期 $\pi$，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$ |
| 反三角函数 | $y=\arcsin x$ | $x\in[-1,1]$<br>$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ |  | 奇函数，有界，单调增加 |
| | $y=\arccos x$ | $x\in[-1,1]$<br>$y\in[0,\pi]$ |  | 有界，单调减少 |
| | $y=\arctan x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ |  | 奇函数，有界，单调增加 |
| | $y=\operatorname{arccot} x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(0,\pi)$ |  | 有界，单调减少 |

**2. 复合函数**

**定义 1.7** 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $U$，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 $X$，对任意 $x\in\{x\mid x\in X$ 且 $\varphi(x)\in U\}$，$y$ 通过 $u$ 构成 $x$ 的函数，称为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 $u$ 称为**中间变量**.

**例 10** 指出下列函数由哪几个函数复合而成：

(1) $y=\sin^2\dfrac{1}{x}$； (2) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$； (3) $y=e^{\sqrt{x^2+2x-3}}$.

**解** (1) $y=\sin^2\dfrac{1}{x}$是由$y=u^2,u=\sin v,v=x^{-1}$复合而成；

(2) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$是由 $y=\ln u,u=\tan v,v=\dfrac{x}{2}$复合而成；

(3) $y=e^{\sqrt{x^2+2x-3}}$是由 $y=e^u,u=v^{\frac{1}{2}},v=x^2+2x-3$ 复合而成.

**注意** 分析函数的复合结构时，应该由外至内逐步将复合函数分解成若干个基本初等函数(多项式例外)，我们形象地说：由外至内，层层剥笋.

**3. 初等函数**

**定义 1.8** 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合而成的，且能用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

如 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，$y=\sin^2(3x+2)\sqrt{1+x^2}+2$ 都是初等函数，应当注意的是分段函数一般不是初等函数. 如 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 0;\\ 1-2x, & x>0.\end{cases}$是由两个解析式表示的一个函数.

## 习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-x}$； (2) $y=\ln(4-x)$；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{\ln(x-3)}$； (4) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$；

(5) $y=\dfrac{\sqrt{6+x-2x^2}}{x-1}$； (6) $y=\begin{cases}e^x-1, & x\geqslant 0;\\ x^2, & x<0.\end{cases}$

2. 设 $f(x)=x^2+5$，求 $f(-2)$，$f(-x)$，$f(x+a)-f(x)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0;\\ 2, & x=0;\\ 3x, & x>0.\end{cases}$求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(3)$.

4. 证明函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在$(0,+\infty)$内单调减少.

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\dfrac{\sin x}{1-x^2}$； (2) $y=2x^4-3x^2+6$；

(3) $y=x^3\cos x$； (4) $y=\dfrac{e^{-x}-1}{e^x+1}$.

6. 求下列函数的反函数：

(1) $y=2x-6$； (2) $y=1+\ln x$.

7. 下列函数由哪些基本初等函数复合而成：

(1) $y=\sqrt{x^2-3}$； (2) $y=\sin^2(\ln x)$；

(3) $y=e^{\sqrt{\cos(x+2)}}$； (4) $y=\dfrac{1}{1+\tan 3x}$；

(5) $y=\lg(2^{\cos x})$； (6) $y=[\arccos(1-x^2)]^3$.

## §1-2 常用经济函数

用数学方法解决经济问题,首先要将经济问题转化为数学问题,即建立经济数学模型,这实际上就是找出经济问题中各种变量之间的函数关系.

### 一、需求函数与供给函数

**1. 需求函数**

在经济活动中,生产者与消费者通过市场交换商品,作为市场中的一种商品,消费者对它的需求量受到许多因素的影响,其中市场价格是影响需求量的一个很重要的因素.忽略其他因素的影响,则某种商品的市场需求量 $Q$ 是该商品的价格 $p$ 的函数,即

$$Q=Q(p),p\geqslant 0$$

**2. 供给函数**

如果市场的每一种商品直接由生产者提供,生产者的供给量也会受到许多因素的影响,其中市场价格是影响供给量的一个很重要的因素.忽略其他因素的影响,则某种商品的供给量 $S$ 是该商品的市场价格 $p$ 的函数,即

$$S=S(p),p\geqslant 0$$

一般地,商品的需求量随商品的价格上涨而减少,因此商品的需求函数 $Q$ 是商品价格 $p$ 的减函数;商品的供给量随商品的价格上涨而增加,因此商品的供给函数 $S$ 是商品价格 $p$ 的增函数.

**3. 均衡价格**

价格的变化,引起供求的变化,供求的变化也会导致价格的涨落.当商品的需求价格和供给价格相一致时的价格称为均衡价格,这时商品的供求量称为均衡数量.我们将供给函数 $S$ 与需求函数 $Q$ 的曲线画在同一坐标系中,如图1-3所示.它们相交于点$(p_0,Q_0)$处,$p_0$ 是均衡价格,$Q_0$ 是均衡数量.

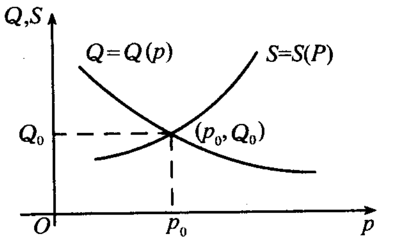



图1-3

**例1** 某种商品的需求函数和供给函数分别为

$$Q=-p^2+4p+12$$
$$S=p^2-4$$

求该商品的市场均衡价格和均衡数量.

**解** 由市场均衡条件 $Q=S$,得

$$-p^2+4p+12=p^2-4$$

整理得 $2p^2-4p-16=0$

解此二次方程得 $p_1=4,p_2=-2$

显然,$p_2$ 不符合题意,故舍去.因此有

$$p_0=4,Q_0=12$$

即市场均衡价格为4,市场均衡数量为12.

### 二、收益函数

收益是指生产者出售商品的收入,总收益是指将一定量产品出售后所得到的全部收入;平均收益是指出售一定量的商品时,每单位商品所得的平均收入,即每单位商品的售价.

若以销量 $q$ 为自变量,总收益 $R$ 为因变量,$R$ 与 $q$ 之间的函数关系称为总收益函数,若已知需求函数 $Q=Q(P)$,则总收益函数可记作

$$R=R(q)=q\cdot P=q\cdot Q^{-1}(q),q\geqslant 0,$$

其中 $P=Q^{-1}(q)$是价格函数.

**例 2** 已知某种商品的需求函数是 $q=3\ 000-5p$,试求该商品的收入函数,并求出销售 200 件该商品时的总收入.

**解** 由需求函数可得 $5p=3\ 000-q,p=600-0.2q$

该商品的收入函数 $R(q)=q\cdot p=600q-0.2q^2$,由此可得销售 200 件该商品时的总收入

$$R=600\times 20-0.2\times 200^2=4\ 000$$

## 三、成本函数

成本是指生产特定产量的产品所需要的费用总额,它包括两部分:固定成本和可变成本.固定成本是在一定限度内不随产量变动而变动的费用,如厂房、设备等.可变成本是随产量变动而变动的费用,如原材料、能源等.

若以 $q$ 表示产量,$C$ 表示总成本,则 $C$ 与 $q$ 之间的函数关系称为总成本函数,记作

$$C=C(q)=C_0+V(q),q\geqslant 0,$$

其中 $C_0\geqslant 0$ 是固定成本,$V(q)$是可变成本.

## 四、利润函数

利润是生产者收入扣除成本后的剩余部分.总利润函数定义为总收益函数 $R=R(q)$与总成本函数 $C=C(q)$之差,记作 $L(q)$,即 $L=R-C$,或

$$L(q)=R(q)-C(q)$$

其中 $q$ 是产品数量.

**例 3** 已知生产某种商品 $q$ 件时的固定成本为 10 万元,可变成本为 $5q+0.2q^2$ 万元,销售每件商品的价格为 9 万元.

求:(1) 利润函数与平均利润函数

(2) 生产 10 件产品的总利润与平均利润

(3) 生产 20 件产品时的总利润

**解** 由题意知,总成本 $C=10+5q+0.2q^2$,该商品的收益函数是 $R(q)=9q$(万元)

(1) 总利润 $L(q)=R(q)-C(q)=9q-(10+5q+0.2q^2)=-0.2q^2+4q-10$

平均利润 $\overline{L}(q)=\dfrac{L(q)}{q}=-0.2q+4-\dfrac{10}{q}$

(2) 生产 10 件该商品的利润为

$L(10)=-0.2\times 10^2+4\times 10-10=10$(万元)

此时的平均利润是

$\overline{L}(10)=\dfrac{L(10)}{10}=1$(万元)

(3) 生产 20 件该商品的总利润为

$L(20)=-0.2\times 20^2+4\times 20-10=-10$(万元)

从上面这个例子,我们发现,利润并不是随销售量的增加而增加.

## 五、抵押贷款模型

**例 4** 设一套商品房价值40万元,王某自筹了 20 万元,要购房还需借款 20 万元,假定借款月利率为 0.5%,条件是每月还一些,25 年还清,假如还不起,房子归债权人.问王某具有什么样的能

力才能贷款购房呢?

**解** 起始借款20万元,借款月利率 $r=0.005$,借期(月)=12(月/年)×25(年)=300(月),每月还 $x$ 元,$y_n$ 表示第 $n$ 月仍欠借主的钱,则

$$y_0=200\,000,\quad y_1=y_0(1+r)-x,\quad y_2=y_1(1+r)-x=y_0(1+r)^2-x[(1+r)+1]$$

$$y_3=y_2(1+r)-x=y_0(1+r)^3-x[(1+r)^2+(1+r)+1],\cdots\cdots,$$

$$y_n=y_{n-1}(1+r)-x=y_0(1+r)^n-x[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\cdots+(1+r)+1]$$

$$=y_0(1+r)^n-\frac{x[(1+r)^n-1]}{r}$$

当贷款还清时,$y_n=0$,可得 $x=\dfrac{y_0r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$

将 $n=300,r=0.005,y_0=200\,000$ 代入,得 $x=1\,288.6$

即王某如果不具备每月还贷1 288.6元的能力,就不能贷款.

### 习题 1-2

1. 已知需求函数为 $Q=\dfrac{75-3p}{3}$,供给函数为 $S=\dfrac{2p-15}{9}$,求市场的均衡价格 $p$.
2. 设某商品的需求函数为 $q=200-5p$,试求:(1)该商品的收入函数;(2)销售20件该商品时的总收入和平均收入.
3. 设某商品的成本函数是线性函数,并已知产量为零时,成本为10 000元,产量为100件时成本为40 000元,试求:(1)固定成本和成本函数;(2)产量为200时的总成本和平均成本.
4. 生产轻便鞋的可变成本是每双15元,每天的固定成本为2 000元.若每双鞋的销售价为20元,求该厂每天生产600双鞋的利润.
5. 设某产品的市场需求函数为 $Q=125-5p$ (其中 $Q$ 表示需求量,$p$ 表示价格).若生产该产品的固定成本为100(百元),多生产一个产品成本增加工2(百元),且工厂自产自销,产销平衡.试求工厂的利润函数 $L$.
6. 设一套商品房价值30万元,小张自筹了15万要购房还需贷款15万元.假设贷款月利率为0.5%,条件是每月还一些,20年还清.问小张每月应还贷款多少元?

## §1-3 极限的概念

### 一、数列的极限

**例1** 观察下列数列的变化趋势:

(1) $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$

(2) $1,\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{3},\dfrac{9}{4},\dfrac{9}{5},\cdots,\dfrac{2n+(-1)^n}{n},\cdots$

(3) $2,\sqrt{2},\sqrt[3]{2},\sqrt[4]{2},\sqrt[5]{2},\cdots,\sqrt[n]{2},\cdots$

(4) $0,2,0,2,0,\cdots,1+(-1)^n,\cdots$

**解** 观察上述数列发现:

(1) 当 $n$ 无限增大时,分母无限增大,分子为常数1,数列的通项 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$无限地趋近于常数0;

(2) 当 $n$ 无限增大时,数列的通项 $a_n=\dfrac{2n+(-1)^n}{n}=2+\dfrac{(-1)^n}{n}$无限地趋近于常数2;