全国高职高专教育精品规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

赵红革 主编

北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

全国高职高专教育精品规划教材

高等数学

主　　编　赵红革
执行主编　宋振新　朱应贵
副 主 编　江楚义　彭　刚　陈广琴　刘祥生
编　　委　王为洪　王友增　毕兴芹　刘孝新
　　　　　岳西泉　段希波　孔　萍　张培国
　　　　　亓玫东　孔凡瑞　尚庆玲　王维霞
　　　　　颜　勇　王　玲　孔令军　高长峰
　　　　　胡文英
主　　审　高　华
统　　稿　赵红革　韩登利

北京交通大学出版社
·北京·

内容简介

本教材依照教育部颁布的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，由高职高专教学一线的教学经验丰富的教师编写而成。全书共分13章，包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分与定积分，定积分的应用，常微分方程，无穷级数，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，矩阵及其应用，概率论，数理统计。鉴于计算机的广泛应用及数学软件的日益完善，为促进教学手段不断改革和创新，提高学生使用计算机解决数学问题的意识和能力，激发学生的学习兴趣，本教材在第1～4、6～11、13章的最后一节介绍了易于理解、便于操作的数学实验，作为数学知识的延伸与补充，进而提高学生的素质。本教材供管理类、工科类学生使用。

版权所有，翻印必究。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/赵红革主编. —北京：北京交通大学出版社，2006.6
（全国高职高专教育精品规划教材）
ISBN 7-81082-761-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 赵… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第045451号

责任编辑：史鸿飞
出 版 者：北京交通大学出版社　　电话：010-51686414
　　　　　北京市海淀区高梁桥斜街44号　　邮编：100044
印 刷 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×260　印张：25.5　字数：620千字
版　　次：2006年7月第1版　2006年7月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-81082-761-8/O·37
印　　数：1～8 000册　定价：33.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。
投诉电话：010-51686043，51686008；传真：010-62225406；E-mail：press@center.bjtu.edu.cn。

全国高职高专教育精品规划教材丛书编委会

主　任： 曹　殊

副主任： 朱光东（天津冶金职业技术学院）
何建乐（绍兴越秀外国语学院）
文晓璋（绵阳职业技术学院）
梅松华（丽水职业技术学院）
王　立（内蒙古建筑职业技术学院）
文振华（湖南现代物流职业技术学院）
叶深南（肇庆科技职业技术学院）
陈锡畴（郑州旅游职业学院）
王志平（河南经贸职业学院）
张子泉（潍坊科技职业学院）
王法能（西安外事学院）
邱曙熙（厦门华天涉外职业技术学院）

委　员： 黄盛兰（石家庄职业技术学院）
张小菊（石家庄职业技术学院）
邢金龙（太原大学）
孟益民（湖南现代物流职业技术学院）
周务农（湖南现代物流职业技术学院）
周新焕（郑州旅游职业学院）
成光琳（河南经贸职业学院）
高庆新（河南经贸职业学院）
李玉香（天津冶金职业技术学院）
邵淑华（山东德州科技职业学院）
宋立远（广东轻工职业技术学院）
孙法义（潍坊科技职业学院）
刘爱青（山东德州科技职业学院）

出版说明

高职高专教育是我国高等教育的重要组成部分，其根本任务是培养生产、建设、管理和服务第一线需要的德、智、体、美全面发展的应用型专门人才，所培养的学生在掌握必要的基础理论和专业知识的基础上，应重点掌握从事本专业领域实际工作的基础知识和职业技能，因此与其对应的教材也必须有自己的体系和特点。

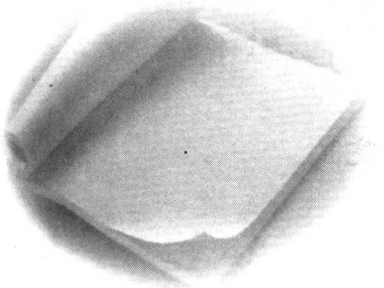
为了适应我国高职高专教育发展及其对教育改革和教材建设的需要，在教育部的指导下，我们在全国范围内组织并成立了“全国高职高专教育精品规划教材研究与编审委员会”（以下简称“教材研究与编审委员会”）。“教材研究与编审委员会”的成员所在单位皆为教学改革成效较大、办学实力强、办学特色鲜明的高等专科学校、成人高等学校、高等职业学校及高等院校主办的二级职业技术学院，其中一些学校是国家重点建设的示范性职业技术学院。

为了保证精品规划教材的出版质量，“教材研究与编审委员会”在全国范围内选聘“全国高职高专教育精品规划教材编审委员会”（以下简称“教材编审委员会”）成员和征集教材，并要求“教材编审委员会”成员和规划教材的编著者必须是从事高职高专教学第一线的优秀教师和专家。此外，“教材编审委员会”还组织各专业的专家、教授对所征集的教材进行评选，对所列选教材进行审定。

此次精品规划教材按照教育部制定的“高职高专教育基础课程教学基本要求”而编写。此次规划教材按照突出应用性、针对性和实践性的原则编写，并重组系列课程教材结构，力求反映高职高专课程和教学内容体系改革方向；反映当前教学的新内容，突出基础理论知识的应用和实践技能的培养；在兼顾理论和实践内容的同时，避免“全”而“深”的面面俱到，基础理论以应用为目的，以必需、够用为尺度；尽量体现新知识和新方法，以利于学生综合素质的形成和科学思维方式与创新能力的培养。

此外，为了使规划教材更具广泛性、科学性、先进性和代表性，我们真心希望全国从事高职高专教育的院校能够积极参加到“教材研究与编审委员会”中来，推荐有特色的、有创新的教材。同时，希望将教学实践的意见和建议，及时反馈给我们，以便对出版的教材不断修订、完善，不断提高教材质量，完善教材体系，为社会奉献更多更新的与高职高专教育配套的高质量教材。

此次所有精品规划教材由全国重点大学出版社——北京交通大学出版社出版。适应于各类高等专科学校、成人高等学校、高等职业学校及高等院校主办的二级技术学院使用。



全国高职高专教育精品规划教材研究与编审委员会

2006 年 6 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

总　序

历史的年轮已经跨入了公元2006年，我国高等教育的规模已经是世界之最，2005年毛入学率达到21%，属于高等教育大众化教育的阶段。与此相对应的是促进了高等教育举办者和对人才培养的多样化。我国从1999年高校扩大招生规模以来，经过了8年的摸索和积累，当我们回头看时，发现在我国高等教育取得了可喜进步的同时，在毕业生就业方面，部分高职高专院校的毕业生依然稍显不足。近几年来，与本科毕业生相比较，就业率落后将近20个百分点，不得不引起我们的思考与重视。

是什么导致高职高专院校的学生就业陷入困境？是什么破坏了高职高专院校的人才培养机制？是哪些因素使得社会给高职高专学生贴上了“压缩饼干”的标签？经过认真分析、比较，我们看到各个高职高专院校培养出来的毕业生水平参差不齐，能力飘忽不定，究其根源，不合理的课程设置、落后的教材建设、低效的教学方法可以说是造成上述状况的主导因素。在这种情况下，办学缺乏特色，毕业生缺少专长，就业率自然要落后于本科院校。

新设高职类型的院校是一种新型的专科教育模式，高职高专院校培养的人才应当是应用型、操作型人才，是高级蓝领。新型的教育模式需要我们改变原有的教育模式和教育方法，改变没有相应的专用教材和相应的新型师资力量的现状。

为了使高职院校的办学有特色，毕业生有专长，需要建立“以就业为导向”的新型人才培养模式。为了达到这样的目标，我们提出“以就业为导向，要从教材差异化开始”的改革思路，打破高职高专院校使用教材的统一性，根据各高职高专院校专业和生源的差异性，因材施教。从高职高专教学最基本的基础课程，到各个专业的专业课程，着重编写出实用、适用高职高专不同类型人才培养的教材，同时根据院校所在地经济条件的不同和学生兴趣的差异，编写出形式活泼、授课方式灵活、引领社会需求的教材。

培养的差异性是高等教育进入大众化教育阶段的客观规律，也是高等教育发展与社会发展相适应的必然结果。也只有使在校学生接受差异性的教育，才能充分调动学生浓厚的学习兴趣，才能保证不同层次的学生掌握不同的技能专长，避免毕业生被用人单位打上“批量产品”的标签。只有高等学校培养有差异性，毕业生才能够有特色，才会在就业市场具有竞争力，才会使高职高专的就业率大幅提高。

北京交通大学出版社出版的这套高职高专教材，是在教育部“十一五规划教材”所倡导的“创新独特”四字方针下产生的。教材本身融入了很多较新的理念，出现了一批独具匠心的教材，其中，扬州环境资源职业技术学院的李德才教授所编写的《分层数学》，教材立意很新，独具一格，提出以生源的质量决定教授数学课程的层次和级别。还有无锡南洋职业技术学院的杨鑫教授编写的一套《经营学概论》系列教材，将管理学、经济学等不同学科知识融为一体，具有很强的实用性。

此套系列教材是由长期工作在第一线、具有丰富教学经验的老师编写的，具有很好的指导作用，达到了我们所提倡的“以就业为导向培养高职高专学生”和因材施教的目标要求。

教育部全国高等学校学生信息咨询与就业指导中心择业指导处处长
中国高等教育学会毕业生就业指导分会秘书长
曹　殊　研究员

前　言

本书是高等职业技术及高等专科教育理工农医科类教学用书，依照教育部颁布的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，并在编辑委员会成员多年从事高职教学实践经验的基础上编写而成.

在编写教材时，我们本着以提高高职高专教育教学质量，以培养高素质应用型人才为目标，力求教材内容“紧扣大纲、易学、实用”的指导思想，力求信息量大，适用面宽，文字简明通顺，教材渗透现代教学思想.

本套教材具有以下特点.

1. 本教材的编写既考虑到高等数学本学科的科学性，又能针对高职高专学生的接受能力和理解程度，适当选取教材内容的深度和广度；既注重从实际问题引入基本概念，又注重基本概念的几何解释、经济背景和物理意义，以使教学内容形象、直观，便于学生理解和掌握，达到“学以致用”的目的.

2. 基本要求与拓宽知识面相结合，适应不同要求和不同层次的教学. 鉴于计算机的广泛应用及数学软件的日臻完善，为促进教学手段不断改革和创新，提高学生使用计算机解决数学问题的意识和能力，激发学生的兴趣，我们在本书中编入了易于理解、便于操作的数学实验，作为数学知识的延伸与补充，进而提高学生的素质.

全书共分 13 章，总课时为 160～180 学时，各院校可根据实际情况决定内容的取舍.

参加编写的单位及人员的分工如下.

山东水利职业学院赵红革副教授担任主编. 第 1 章由山东水利职业学院王友增、广东岭南职业技术学院彭刚编写；第 2 章由山东水利职业学院毕兴芹、黄冈职业技术学院江楚义编写；第 3 章由山东水利职业学院刘孝新、江西交通职业技术学院胡文英、刘祥生编写；第 4 章由山东水利职业学院岳西泉、浙江工业职业技术学院高华编写；第 5 章由山东水利职业学院段希波、莱芜职业技术学院朱应贵编写；第 6 章由山东水利职业学院孔萍、山东荷泽学院张培国编写；第 7 章由莱芜职业技术学院亓玖东、山东水利职业学院孔凡瑞编写；第 8 章由莱芜职业技术学院尚庆玲、山东水利职业学院赵红革编写；第 9 章由莱芜职业技术学院王维霞、山东水利职业学院颜勇编写；第 10 章由莱芜职业技术学院陈广琴编写；第 11 章由莱芜职业技术学院韩登利编写；第 12 章由莱芜职业技术学院王玲、曲阜师范大学电气信息与自动化学院孔令军编写；第 13 章由莱芜职业技术学院高长峰、河北能源职业技术学院宋振新编写；各章的数学实验由山东水利职业学院王为洪编写.

我们在本教材的编写过程中也得到了编委会成员所在院校的大力支持，在此表示衷心的感谢.

同时，在编辑和出版的过程中，由于任务本身的难度大，时间紧，书中难免有值

得商榷和不妥之处，我们欢迎专家、同行和读者批评指正，使本书在教学实践中不断提高和完善.

编　者

2006 年 6 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章　函数、极限与连续

函数描述了客观世界中量与量之间的依赖关系，是高等数学研究的主要对象，其研究的基本方法是极限方法. 本章将在复习和加深函数有关知识的基础上着重讨论函数的极限，并介绍函数的连续性.

1.1　函　　数

函数是微积分学研究的对象，在中学里已经学习过函数概念，在这里我们不是简单的重复，而是要从全新的视角来对它进行描述并重新分类.

1.1.1　函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中，经常遇到各种不同的量. 例如身高、气温、产量、收入、成本等. 这些量可以分为两类：一类量在考察的过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称作常量. 例如：圆周率 π 是个永远不变的量，某种商品的价格，某个班的学生人数在某一段时间内保持不变，这些量都是常量. 另一些量在所考察的过程中是变化的，可以取不同的数值，我们把它称作变量. 例如：一天中的气温，生产过程中的产量都是在不断变化的，它们都是变量.

常量习惯用字母 a，b，c，d 等表示；变量习惯用 x，y，z，u，v，w 等表示.

2. 函数的概念及表示法

在某个变化过程中，往往出现多个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是相互影响和相互制约的，一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化. 如果这些影响是确定的，是依照某一规则的，那么我们说这些变量之间存在着函数关系.

例如，圆的面积 A 与半径 r 之间的关系由 $A=\pi r^2$ 表示. 这里 A 与 r 都是变量，当半径 r 变化时，圆的面积 A 作相应的变化.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 y 依照某一规则 f 总有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 这里 x 称为自变量，y 称为因变量或函数. f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应规则. 有时函数符号也可以用其他字母来表示，如 $y=g(x)$或$y=\varphi(x)$等.

集合 D 称为函数的定义域，相应的 y 值的集合则称为函数的值域.

当自变量 x 在其定义域内取某个确定值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应值 y_0，则 y_0 叫作当 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $y\big|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

例 1.1　已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求：$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$，$f(x^2)$.

解：$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$，$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}$，$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}$，$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{2+x}$，$f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

例 1.2 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\frac{3}{5x^2+2x}$　　(2) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

(3) $f(x)=\lg(4x-3)$　　(4) $f(x)=\arcsin(2x-1)$

(5) $f(x)=\lg(4x-3)-\arcsin(2x-1)$

解：(1) 在分式$\frac{3}{5x^2+2x}$中，分母不能为零，所以$5x^2+2x\neq0$，解得$x\neq-\frac{2}{5}$，且$x\neq0$，即定义域为

$$\left(-\infty,\ -\frac{2}{5}\right)\cup\left(-\frac{2}{5},\ 0\right)\cup(0,\ +\infty).$$

(2) 在偶次根式中，被开方式必须大于等于零，所以有$9-x^2\geqslant0$，解得$-3\leqslant x\leqslant3$，即定义域为$[-3,\ 3]$.

(3) 在对数式中，真数必须大于零，所以有$4x-3>0$，解得$x>\frac{3}{4}$，即定义域为$\left(\frac{3}{4},\ +\infty\right)$.

(4) 反正弦或反余弦中的式子的绝对值必须小于等于 1，所以有$-1\leqslant2x-1\leqslant1$，解得$0\leqslant x\leqslant1$，即定义域为$[0,\ 1]$.

(5) 该函数为(3)，(4)两例中函数的代数和，此时函数的定义域应为(3)，(4)两例中定义域的交集，即$\left(\frac{3}{4},\ +\infty\right)\cap[0,\ 1]=\left(\frac{3}{4},\ 1\right]$.

应当指出，在实际应用问题中，除了要根据解析式子本身来确定自变量的取值范围外，还要考虑到变量的实际意义.

函数$f(x)$的具体表达方式是不尽相同的，这就产生了函数的不同表示法，函数的表示法通常有 3 种：公式法、表格法和图示法.

(1) 以数学式子表示函数的方法叫作函数的公式法，上述例子中的函数都是以公式表示的，公式法的优点是便于理论推导和计算.

(2) 以表格形式表示函数的方法叫作函数的表格法，它是将自变量的值与对应的函数值列为表格，如三角函数表、对数表、企业历年产值表等，都是以这种方法表示的函数，表格法的优点是所求的函数值容易查得.

(3) 以图形表示函数的方法叫作函数的图示法. 这种方法在工程技术上应用较普遍，图示法的优点是直观形象，且可看到函数的变化趋势.

3. 分段函数

把定义域分成若干部分，函数关系由不同的式子分段表达的函数称为分段函数. 分段函数是微积分中常见的一种函数. 例如在中学数学课出现过的绝对值函数可以表示成

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

例 1.3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

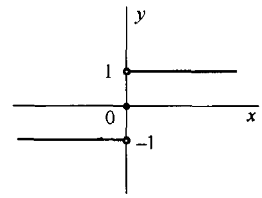


图 1-1

就是一个分段函数，它的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域为 $A=\{-1, 0, 1\}$，如图1-1所示.

注意：分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值，分段函数 y 只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

例 1.4 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & -4\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x<3\\ 5x-1 & x\geqslant 3\end{cases}$$

求 $f(-\pi)$，$f(1)$，$f(3.5)$及函数的定义域.

解：因为$-\pi\in[-4, 1)$，所以 $f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$；因为 $1\in[1, 3)$，所以 $f(1)=1$；因为 $3.5\in[3, +\infty)$，所以 $f(3.5)=5\times 3.5-1=16.5$；函数 $f(x)$的定义域为$[-4, +\infty)$.

1.1.2 函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在 D 上是有界的. 如果不存在这样的正数 M，则称$f(x)$在 D 上是无界的.

如图 1-2 所示，函数 $y=f(x)$在区间(a, b)内有界的几何意义是：曲线 $y=f(x)$在区间(a, b)内被限制在 $y=-M$ 和$y=M$ 两条直线之间.

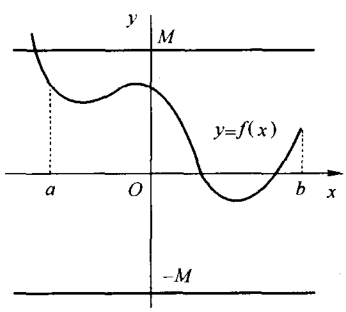


图 1-2

对于函数的有界性，要注意以下两点.

(1) 当一个函数 $y=f(x)$在区间(a, b)内有界时，正数 M 的取法不是唯一的. 例如 $y=\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是有界的，有 $|\sin x|\leqslant 1$，但也可以取 $M=2$，即 $|\sin x|<2$ 总是成立的，实际上 M 可以取任何大于 1 的数.

(2) 有界性是依赖于区间的. 例如 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$(1, 2)$内是有界的，但在区间$(0, 1)$内则无界.

2. 函数的奇偶性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义，如果对任意的$x\in D$，恒有 $f(-x)=$

$f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；如果对任意的$x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数.

由定义 1.3 可知，对任意的 $x\in D$，必有$-x\in D$，否则，$f(-x)$没有意义. 因此函数具有奇偶性时，其定义域必定是关于原点对称的.

偶函数的图像是对称于 y 轴的，如图 1-3 所示. 因为 $f(-x)=f(x)$，所以如果点 $P(x, f(x))$是曲线上的一个点，则它关于 y 轴的对称点 $Q(-x, f(x))$也是曲线上的点.

奇函数的图像是对称于原点的，如图 1-4 所示. 因为$f(-x)=-f(x)$，所以如果点 $P(x, f(x))$是曲线上的一个点，则它关于原点的对称点 $Q(-x, -f(x))$也是曲线上的点.

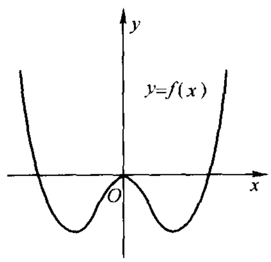


图 1-3

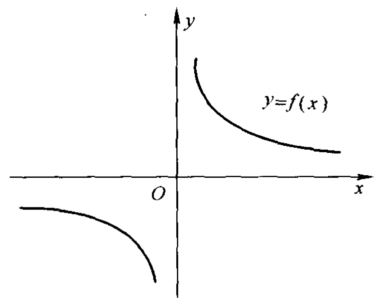


图 1-4

例 1.5 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=3x^4-5x^2+7$ (2) $f(x)=2x^2+\sin x$

(3) $f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^x)(a>0, a\neq 1)$

解：由函数奇偶性的定义可知：

(1) 因为 $f(-x)=3(-x)^4-5(-x)^2+7=3x^4-5x^2+7=f(x)$，所以 $f(x)=3x^4-5x^2+7$ 是偶函数；

(2) 因为 $f(-x)=2(-x)^2+\sin(-x)=2x^2-\sin x\neq f(x)$，同样可以得到 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)=2x^2+\sin x$ 既非奇函数，也非偶函数；

(3) 因为 $f(-x)=\frac{1}{2}(a^{-(-x)}-a^{-x})=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})=-\frac{1}{2}(a^{-x}-a^x)=-f(x)$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^x)$是奇函数.

3. 函数的单调性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$在区间(a, b)内有定义，如果对于(a, b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则函数 $f(x)$在(a, b)内是单调增加的；如果对于(a, b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在(a, b)内是单调减少的.

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数.

单调增加的函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的，如图 1-5 所示；单调减少的函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的，如图1-6所示.

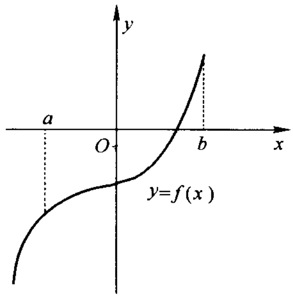


图 1-5

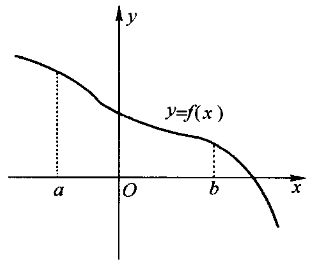


图 1-6

例 1.6 验证函数 $y=3x-2$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的.

证 在区间$(-\infty, +\infty)$内任取两点 x_1，x_2 且 $x_1<x_2$，于是 $f(x_1)-f(x_2)=(3x_1-2)-(3x_2-2)=3(x_1-x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=3x-2$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的.

4. 函数的周期性

定义 1.5 对于函数 $y=f(x)$，如果存在正数 a，对于任意的$x\in D$，使 $f(x)=f(x+a)$ 恒成立，则称此函数为周期函数. 满足这个等式的正数 a 称为函数的周期. 例如 $y=\sin x$ 是周期函数，周期为 2π.

1.1.3 反函数

定义 1.6 设 $y=f(x)$为定义在 D 上的函数，其值域为 A. 若对于数集 A 中的每个数 y，数集 D 中都有唯一的一个数 x 使 $f(x)=y$，这就是说变量 x 是变量 y 的函数. 这个函数称为函数$y=f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$. 其定义域为 A. 值域为 D. 函数 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$二者的图形是相同的.

由于人们习惯于用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，为了照顾习惯，我们将函数 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$用 $y=f^{-1}(x)$表示. 注意，这时二者的图形关于直线 $y=x$ 对称.

由函数 $y=f(x)$求它的反函数的步骤是：由方程 $y=f(x)$解出 x，得到 $x=f^{-1}(y)$；将函数 $x=f^{-1}(y)$中的 x 和 y 分别换为 y 和 x，这样得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 1.7 求函数 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$的反函数.

解：由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$可解得 $x=\mathrm{lb}\frac{y}{1-y}$，交换 x、y 的位置，即得所求的反函数

$$y=\mathrm{lb}\frac{x}{1-x}\text{或 } y=\mathrm{lb}\, x-\mathrm{lb}\,(1-x)$$

其定义域为$(0, 1)$.

应当指出，函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$之间存在着这样的关系：

$$f^{-1}[f(x)]=x \text{ 和 } f[f^{-1}(x)]=x.$$

例如：$y=\log_a x$ 的反函数是 $y=a^x$，则：$\log_a(a^x)=x$，$a^{\log_a x}=x$.

1.1.4 基本初等函数

幂函数 $y=x^a$(a 为任意实数)；指数函数 $y=a^x$($a>0$，且 $a\neq1$)；对数函数 $y=\log_a x$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com