国内高中数学竞赛真题库

《数学竞赛之窗》编辑部　组编

浙江大學出版社

《国内高中数学竞赛真题库》编委名单

《数学竞赛之窗》编辑部　组编

主　编　王卫华

副主编　陆忠源

编　委　黄志军　王朝和　潘静红

宋　程　黎金传　成俊锋

李　潜　赵　斌　邓琳纬

《数学竞赛之窗》专家指导委员会

苏　淳(中国科技大学)

许以超(中科院数学研究所)

夏兴国(河南师范大学)

林　常(福建教育学院)

陶平生(江西科技师范学院)

沈文选(湖南师范大学)

萧振纲(湖南理工学院)

吴　康(华南师范大学)

吴伟朝(广州大学)

李健贤(香港科技大学)

王卫华(《数学竞赛之窗》编辑部)

前　言

在老一辈数学家的倡导和众多数学工作者、数学教师的共同努力下，我国的数学奥林匹克活动得到了较好的发展，取得了丰硕的成绩和丰富的经验。

对于数学奥林匹克活动而言，其中最吸引人的，无疑就是那一道道闪耀着数学智慧、发散着数学美的试题。数学大师华罗庚先生曾经说过："出题比做题要难，题目要出得妙，出得好，要测得出水平。"一次数学竞赛成功与否，主要取决于命题。

基于数学竞赛试题的重要作用，对竞赛试题的研究和分析就成为一项重要的工作。

近年来，国内的数学竞赛体系基本完善，形成了省级预赛→全国联赛→中国数学奥林匹克→中国国家队选拔的选拔机制。在这一套选拔的过程中，数学工作者每年都会生产出一大批精美的数学竞赛试题。《数学竞赛之窗》杂志也会在每年的第一时间对这些试题加以收集、整理和研究。在这一过程中，各地的广大数学竞赛辅导老师给了我们极大的支持。

本书的试题大多来自于各地读者给我们提供的最新各级竞赛试题，他们是冯惠愚、夏建新、黄志军、张乃贵、蔡玉书、李红（江苏），肖宏、方廷刚（四川），王兴、唐作明（湖南），江厚利、袁金龙（安徽），李锦昱、邹明（山东），潘静红（上海），王希年、许康华（浙江），黎金传（江西），王慧兴（河南），宋程（广西）。

本刊编辑部对试题进行了解答、整理、筛选，精选出2004－2005年多套试题，与大家分享。王朝和、黄志军、宋程、黎金传、潘静红、李潜、赵斌、成俊锋等同志参与这些工作。

由于编者水平有限，书中难免有不当之处，欢迎读者批评指正。对于读者提出的有代表性的问题，我们将在杂志上予以发表。

也欢迎大家与我们进行数学竞赛问题的探讨，数学竞赛资料的交流。您可以拨打《数学竞赛之窗》的热线电话：0512－66297080，也欢迎大家给我们发邮件：sxjszcbjb@163.com。同时也欢迎大家登陆我们的网站（http://www.sxjszc.com），给我们提出宝贵意见，我们将综合大家的意见，再版时作出修订。凡提出建议者，赠送本刊内部资料一份。

《数学竞赛之窗》编辑部
2006年7月

目　录

2004 年北京市中学生数学竞赛试题

高一年级初赛

一、选择题(满分 36 分)

1. 满足条件 $f(x^2)=[f(x)]^2$ 的二次函数是(　　)

A. $f(x)=x^2$

B. $f(x)=ax^2+5$

C. $f(x)=x^2+x$

D. $f(x)=-x^2+2004$

2. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=\sin x$，$y=\sin 2004$，$y=\sin|x|$，$y=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ 中，偶函数的个数是(　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

3. 方程 $||x|-1|=a$ 恰有 3 个实数解，则 a 等于(　　)

A. 0　　B. 0.5

C. 1　　D. $\sqrt{2}$

4. 实数 a,b,c 满足 $a+b>0$，$b+c>0$，$c+a>0$，$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，并且是严格的减函数，即若 $x_1<x_2$，就有 $f(x_1)>f(x_2)$. 则(　　)

A. $2f(a)+f(b)+f(c)=0$

B. $f(a)+f(b)+f(c)<0$

C. $f(a)+f(b)+f(c)>0$

D. $f(a)+2f(b)+f(c)=2004$

5. 已知 a,b,c,d 四个正整数中，a 被 9 除余 1，b 被 9 除余 3，c 被 9 除余 5，d 被 9 除余 7，则一定不是完全平方数的两个数是(　　)

A. a,b　　B. b,c

C. c,d　　D. d,a

6. 正实数列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 中，a_1,a_2,a_3 成等差数列，a_2,a_3,a_4 成等比数列，且公比不等于 1，又 a_3,a_4,a_5 的倒数成等差数列，则(　　)

A. a_1,a_3,a_5 成等比数列

B. a_1,a_3,a_5 成等差数列

C. $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_3},\frac{1}{a_5}$ 成等差数列

D. $\frac{1}{6a_1},\frac{1}{3a_3},\frac{1}{2a_5}$ 成等比数列

二、解答题(满分 64 分)

1. 已知

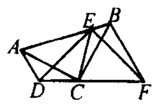
$$f(x)=\begin{cases}2^x & (x<0)\\ \sqrt{3} & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ \log_{\frac{1}{3}}x & (x>1)\end{cases}$$

试确定 $f\{f[f(-2004)]\}$ 的值.

2. 已知 $a=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+\cdots+2001+2002+2003+2004$，求 a 被 17 除的余数.

3. 已知 $f(x)=x^2+x-1$，若 $ab^2\neq 1$，且有 $f(a^{-1})=f(b^2)=0$，试确定 $\frac{a}{1+ab^2}$ 的值.

4. 如图所示，等腰直角三角形 ABC 的直角顶点 C 在等腰直角三角形 DEF 的斜边 DF 上，E 在 $\triangle ABC$ 的斜边 AB 上. 如果凸四边形 $ADCE$ 的面积等于 5 平方厘米，那么凸四边形 $ABFD$ 的面积等于多少平方厘米？



5. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a^2+b^2=10$，试确定 $a-b$ 的取值范围.

6. a 和 b 是关于 x 的方程 $x^4+m=9x^2$ 的两个根，且满足 $a+b=4$，试确定 m 的值.

7. 求 $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ$ 的值.

8. 将 2004 表为 n 个彼此不等的正整数的和，求 n 的最大值.

高一年级复赛

一、填空题(满分 40 分)

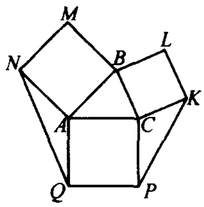
1. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，那么 $f(\frac{1}{2004})+f(1)+f(2004)=$______.

2. 化简求值：$(\log_3 4+\log_2 9)^2-(\log_3 4-\log_2 9)^2=$______.

3. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_na_{n+1}a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，且$a_{n+1}a_{n+2}\neq 1$，则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2003}+a_{2004}=$______.

4. 已知$\odot O_1$与$\odot O_2$的半径分别是2和4，$O_1O_2=10$，则两圆的两条内公切线与一条外公切线所围成的三角形MNP的面积是______.

5. 如图，$ABMN$，$BCKL$，$ACPQ$都是正方形，$S_{\text{四边形}ABMN}-S_{\text{四边形}BCKL}=m$（其中$m$是正数），则$NQ^2-PK^2=$______.



二、（满分15分）已知$abc\neq 0$，求证：

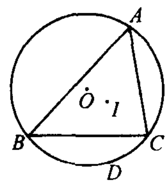
$$\frac{a^4}{4a^4+b^4+c^4}+\frac{b^4}{a^4+4b^4+c^4}+\frac{c^4}{a^4+b^4+4c^4}\leqslant\frac{1}{2}.$$

三、（满分15分）

已知$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，求证：关于$x$的二次方程$x^2-(1-\cos^3\alpha)x+\cos\alpha=0$，$x^2-(1-\sin^3\alpha)x+\sin\alpha=0$，$x^2-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\sin\alpha}}x+\frac{1}{4}=0$中至少有一个具有两个不等的实数根.

四、（满分15分）

如图所示，O、I分别表示$\triangle ABC$的外心与内心，已知$\angle OIB=30°$. 求证：$\angle BAC=60°$.



五、（满分15分）

已知数列$\{a_n\}$，$a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}(n=1,2,3\cdots)$，其中$\alpha,\beta$是方程$x^2-x-1=0$的两个根.（1）证明：对任意正整数$n$，都有$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$；

（2）证明：数列$\{a_n\}$中的项都是正整数，且任意相邻两项都互质.

2004年南昌市高中数学竞赛试题

（注意：题号后凡标有“高一”的，为高一学生解答题；凡标有“高二”的，为高二学生解答题；凡未作以上标志的，则为高一、高二学生共同解答题）

一、选择题（每小题6分，共36分）

1. ①（高一）化简$\sqrt{1+\sin 8}$的结果是（　　）

A. $\sin 4+\cos 4$　　B. $\sin 4-\cos 4$

C. $-\sin 4+\cos 4$　　D. $-\sin 4-\cos 4$

②（高二）用一个平面截一个正方体，对于{三角形，四边形，五边形，六边形}四种形状中，截口可能出现的形状有（　　）

A. 1种　　B. 2种

C. 3种　　D. 4种

2. ①（高一）$\triangle ABC$的三条边长$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，若三顶点A,B,C对于某定点O的位置向量为$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$，且$a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}+c\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$，则点$O$是$\triangle ABC$的（　　）

A. 外心　　B. 内心

C. 重心　　D. 垂心

②（高二）某人投掷两次骰子先后得到点数m,n，用来作为一元二次方程$x^2+mx+n=0$的系数，则使方程有实根的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{5}{9}$

C. $\frac{17}{36}$　　D. $\frac{19}{36}$

3. ①（高一）下面四式：①$\sin\sqrt{2}>\sin\sqrt{3}$，②$\cos\sqrt{2}>\cos\sqrt{3}$，③$\tan\sqrt{2}>\tan\sqrt{3}$，④$\cot\sqrt{2}>\cot\sqrt{3}$，其中正确的有（　　）

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

②（高二）用与圆柱中对称轴成30°角的平

面截圆柱所得的截面是一个椭圆，则这个椭圆的离心率是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

4. 满足 $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2>2004$ 的最小正整数是(　　)

A. 10　　B. 11

C. 12　　D. 13

5. 设对每个实数 x，$f(x)$ 的值取 x^2，$6-x$，$2x+15$ 中的最小值，则 $f(x)$ 的最大值是(　　)

A. 4　　B. 9

C. 16　　D. 25

6. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2004}$ 的正整数解 (x,y) 的组数为(　　)

A. 3 组　　B. 9 组

C. 27 组　　D. 45 组

二、填空题(每小题 9 分，共 54 分)

1. ①(高一)$\triangle ABC$ 中，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，且 $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$，若 $\angle A=72°$，则 $\angle B=$________.

②(高二)边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，E 是 AB 的中点，现将 $\triangle AED$，$\triangle BEC$ 沿 EC，ED 折起，使 EA，EB 重合，组成一个四面体，则此四面体的体积是________.

2. ①(高一)函数 $y=x^2-x$ 与 $y=\cos 10\pi x$，图象的交点有________个.

②(高二)设集合 $\{a,b,c\}\subset\{1,2,\cdots,12\}$，则在平面直角坐标系中，方程 $ax^2+by^2=c$ 所表示的椭圆个数为________.

3. 若正整数 n 使 n 与 $n+2004$ 都是平方数，则 $n=$________.

4. 从集合 $\{1,2,3,\cdots,30\}$ 中取出 5 个不同的数，组成递增的等差数列，这种数列的个数是________.

5. 设 $f(x)=\frac{x^3}{1-3x+3x^2}$，记 $f_1(x)=f(x)$，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，则 $f_{10}(x)=$________.

6. 若 $n\in\{1,2,\cdots,100\}$ 且 n 是其各位数字和的倍数，则这种 n 有________个.

三、(20 分)①(高一)锐角 $\triangle ABC$ 中，若 $\cos^2 A$，$\cos^2 B$，$\cos^2 C$ 的和等于 $\sin^2 A$，$\sin^2 B$，$\sin^2 C$ 中的某个值，证明：$\tan A$，$\tan B$，$\tan C$ 必可按某顺序组成一个等差数列.

②(高二)设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，$x+y+z=1$，证明：$x^2+y^2+z^2+9xyz\geqslant 2(xy+yz+zx)$.

四、(20 分)过 $\triangle ABC$ 内的任意一点 P，分别作 PA，PB，PC 的垂线 l_A，l_B，l_C，若 l_A 交直线 BC 于 D，l_B 交直线 AC 于 E，l_C 交直线 AB 于 F，求证：D，E，F 三点共线.

五、(20 分)对每个自然数 n，方程 $x+2y+5z=n$ 的非负整数解 (x,y,z) 的组数记为 a_n，试求所有的 n，使 $5a_n$ 为平方数，并确定此时的平方数表达式.

2004 年福建省高一数学竞赛试题

一、选择题(本题满分 50 分，每小题 5 分)

1. 已知真命题“$a\geqslant b\Rightarrow c>d$”和“$a<b\Leftrightarrow e\leqslant f$”，那么“$c\leqslant d$”必定是“$e\leqslant f$”的(　　)

A. 充分条件

B. 必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. 函数 $y=\lg(1-x)(x<0)$ 的反函数是(　　)

A. $y=1-10^x(x>0)$

B. $y=1-10^{x}(x<0)$

C. $y=10^{1-x}(x>0)$

D. $y=10^{1-x}(x<0)$

3. 若函数 $f(x)=\sin(2x+\theta)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后所得的图象恰好与函数 $y=\sin 2x$ 的图象重合，则 θ 的最小正值是（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{5\pi}{6}$

C. $\frac{4\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{3}$

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $13a_2=15a_3$，且 $a_1>0$，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和，则在 $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_{12}$ 中，最大的一个是（　　）

A. S_8　　B. S_9

C. S_{10}　　D. S_{12}

5. 若函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x+2)=f(x)$，且 $x\in(-1,1]$ 时，$f(x)=|x|$. 则函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=\log_4|x|$ 的图象的交点个数为（　　）

A. 3　B. 4　C. 6　D. 8

6. 给定实数 x，定义 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数，则下列结论中不正确的是（　　）

A. $x-[x]\geqslant 0$

B. $x-[x]<1$

C. $f(x)=x-[x]$ 是周期函数

D. $f(x)=x-[x]$ 是偶函数

7. 已知函数 $f(x)=-4\sin^2 x+4\cos x+1-a$，若关于 x 的方程 $f(x)=0$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上有解，则 a 的取值范围是（　　）

A. $[-8,0]$　　B. $[-4,5]$

C. $[-3,5]$　　D. $[-3,2\sqrt{2}-1]$

8. 已知 $f(x)=\frac{1+x}{1-3x}$，$f_1(x)=f[f(x)]$，$f_2(x)=f[f_1(x)]$，$\cdots$，$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$，则 $f_{2004}(-2)=$（　　）

A. $-\frac{1}{7}$　　B. $\frac{1}{7}$

C. $-\frac{3}{5}$　　D. 3

9. 设函数 $f(x)=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$，数列 $\{f(x_n)\}(n=1,2,3,\cdots)$ 是首项为 $f(a^1)$，公差为 2 的等差数列，又 $g(n)=x_n f(x_n)(n=1,2,3,\cdots)$ 数列 $\{g(n)\}$ 是递减数列，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$　　B. $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

C. $\left(0,\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$

10. 已知 a,b,c,d 为偶数，且 $0<a<b<c<d$，$d-a=90$，a,b,c 成等差数列，b、c、d 成等比数列，则 $a+b+c+d=$（　　）

A. 384　　B. 324

C. 284　　D. 194

二、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

11. 某种商品准备降价，有四种降价方案：①先降价 $m\%$，再降价 $n\%$；②先降价 $n\%$，再降价 $m\%$；③先降价 $\frac{m+n}{2}\%$，再降价 $\frac{m+n}{2}\%$；④一次性降价 $(m+n)\%$. 其中 $0<m<n<50$. 则四种降价方案中，降价最少的方案是________.（只填序号）

12. 已知 $\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{3}$，那么 $\sin\alpha+\sin\beta$ 的最大值与最小值之差等于________.

13. 若函数 $f(x)=\log_a(2-ax^2)$ 在 $[-1,0]$ 上是增函数，则 a 的取值范围是________.

14. 已知函数 $f(x)=ax^2-2x+2(a>0)$，当 $x\in[1,4]$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，则 a 的取值范围是________.

15. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，且当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(n)\in\mathbf{N}^*$，$f[f(n)]=3n$，则 $f(1)+f(2)=$________.

三、解答题（本题满分 70 分，共有 4 个小题，第 16，17 两题各 15 分，第 18，19 两题各 20 分）

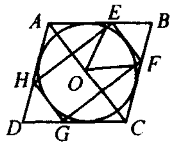
16. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R})$ 满足条件：对任意实数 x 都有 $f(x)\geqslant 2x$，且当 $0<x<2$ 时，总有 $f(x)\leqslant\frac{1}{2}(x+1)^2$ 成立.

(1) 求 $f(1)$ 的值；

(2) 求 $f(-1)$ 的取值范围.

17. 如图，$ABCD$ 是菱形，E、F、G、H 分别

在 AB、BC、CD、DA 上，EF、GH 分别与菱形 $ABCD$ 的内切圆 O 相切.



求证：(1) $\triangle AOE \backsim \triangle CFO$；

(2) $EH /\!/ FG$.

18. 已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_k\}$ 的每一项都是整数，且 $100 \leqslant a_k \leqslant 1000$. 问数列 $\{a_k\}$ 最多有几项？写出项数最多时的数列 $\{a_k\}$（要求写出数列的每一项）.

19. 给定正整数 $n(n \geqslant 2)$，按下述方式构成倒立的三角形数表：第一行依次写上数 $1,2,\cdots,n$，在上一行的每两个相邻数的正中间下方写上这两个数之和，得到下一行（比上一行少一个数）. 依次类推，最后一行（第 n 行）只有一个数.

例如，$n=5$ 时的数表如下所示.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\ & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \\ & & 8 & & 12 & & 16 & & \\ & & & 20 & & 28 & & & \\ & & & & 48 & & & & \end{array}$$

(1) 求第 n 行的数；

(2) 当 $n=2004$ 时，这张数表中共有多少个数是 2004 的倍数？

2004 年湖南省高中数学竞赛试题

一、选择题（本大题共 10 个小题；每小题 5 分，共 50 分）

1. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，若 $f(x)-g(x)=x^2+9x+12$，则 $f(x)+g(x)=$（　　）

A. $-x^2+9x-12$　　B. $x^2+9x-12$

C. $-x^2-9x+12$　　D. $x^2-9x+12$

2. 有四个函数：

①$y=\sin x+\cos x$　②$y=\sin x-\cos x$

③$y=\sin x \cdot \cos x$　④$y=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

其中在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上为单调增函数的是（　　）

A. ①　　B. ②

C. ①和③　　D. ②和④

3. 方程 $x^2+x-1=x\pi^{x^2-1}+(x^2-1)\pi^x$ 的解集为 A（其中 π 为无理数，$\pi=3.141\cdots$，x 为实数），则 A 中所有元素的平方和等于（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 4

4. 已知点 $P(x,y)$ 满足 $(x-4\cos\theta)^2+(y-4\sin\theta)^2=4(\theta\in\mathbf{R})$，则点 $P(x,y)$ 所在区域的面积为（　　）

A. 36π　　B. 32π

C. 20π　　D. 16π

5. 将 10 个相同的小球装入 3 个编号为 1、2、3 的盒子（每次要把 10 个球装完），要求每个盒子里球的个数不少于盒子的编号数，这样的装法种数为（　　）

A. 9　　B. 12

C. 15　　D. 18

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $S_5=28$，$S_{10}=36$，则 S_{15} 等于（　　）

A. 80　　B. 40

C. 24　　D. -48

7. 已知曲线 $C: y=\sqrt{-x^2-2x}$ 与直线 $l: x+y-m=0$ 有两个交点，则 m 的取值范围是（　　）

A. $(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2})$　　B. $(-2,\sqrt{2}-1)$

C. $[0,\sqrt{2}-1)$　　D. $(0,\sqrt{2}-1)$

8. 过正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 的截面面积为 S，$S_{\max}$ 和 $S_{\min}$ 分别为 S 的最大值和最小值，则 $\dfrac{S_{\max}}{S_{\min}}$ 的值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

9. 设 $x=0.82^{0.5}$，$y=\sin 1$，$z=\log_3\sqrt{7}$，则 x、y、z 的大小关系为(　　)

A. $x<y<z$　　B. $y<z<x$

C. $z<x<y$　　D. $z<y<x$

10. 如果一元二次方程 $x^2-2(a-3)x-b^2+9=0$ 中，a、b 分别是投掷骰子所得的数字，则该二次方程有两个正根的概率 $P=$(　　)

A. $\frac{1}{18}$　　B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{13}{18}$

二、填空题(本大题共 4 个小题，每小题 8 分，共 32 分)

11. 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上异于长轴端点的任意一点，F_1、F_2 分别是其左、右焦点，O 为中心，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|+|OP|^2=$________.

12. 已知△ABC 中，$AB=\boldsymbol{a}$，$AC=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的向量运算式子表示△ABC 的面积，即 $S_{\triangle ABC}=$________.

13. 从 3 名男生和 n 名女生中，任选 3 人参加比赛，已知 3 人中至少有 1 名女生的概率为 $\frac{34}{35}$，则 $n=$________.

14. 有 10 名乒乓球选手进行单循环赛，比赛结果显示，没有和局，且任意 5 人中既有 1 人胜其余 4 人，又有 1 人负其余 4 人，则恰好胜了两场的人数为________个.

三、解答题(本大题共 5 个小题，15—17 题每小题 12 分，18 题、19 题每小题 16 分，共 68 分)

15. 对于函数 $f(x)$，若 $f(x)=x$，则称 x 为 $f(x)$ 的“不动点”，若 $f(f(x))=x$，则称 x 为 $f(x)$ 的“稳定点”，函数 $f(x)$ 的“不动点”和“稳定点”的集合分别记为 A 和 B，即 $A=\{x\mid f(x)=x\}$，　$B=\{x\mid f[f(x)]=x\}$.

(1)求证：$A\subseteq B$；

(2)若 $f(x)=ax^2-1(a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R})$，且 $A=B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

16. 某制衣车间有 A、B、C、D 共 4 个组，各组每天生产上衣或裤子的能力见下表，现在上衣及裤子要配套生产(一件上衣及一条裤子为一套)，问在 7 天内，这 4 个组最多能生产多少套？

组	A	B	C	D
上衣(件)	8	9	7	6
裤子(条)	10	12	11	7

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n=1,2,3,\cdots)$.

求证：对于任何正整数 n，都有 $\sqrt[n]{a_{n+1}}\geqslant 1+\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$.

18. 在周长为定值的△ABC 中，已知 $|AB|=6$，且当顶点 C 位于定点 P 时，$\cos C$ 有最小值为 $\frac{7}{25}$.

(1)建立适当的坐标系，求顶点 C 的轨迹方程.

(2)过点 A 作直线与(1)中的曲线交于 M、N 两点，求 $|\overrightarrow{BM}|\cdot|\overrightarrow{BN}|$ 的最小值的集合.

19. 已知三棱锥 O-ABC 的三条侧棱 OA、OB、OC 两两垂直，P 是底面△ABC 内的任一点，OP 与三侧面所成的角分别为 α、β、γ.

求证：$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma\leqslant 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2004年江西省高中女子数学竞赛试题

一、选择题(每小题6分,共36分)

1. 函数 $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}-x}+\sqrt{x-\frac{1}{3}}$ 的最大值为 a,最小值为 b,则 $a+b$ 的值是(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}(3+\sqrt{3})$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{2})$

C. $\frac{\sqrt{3}}{6}(3+\sqrt{2})$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})$

2. 下面是关于 $\triangle ABC$ 的两个命题:(　　)

(甲) $\sin A>\sin B$ 当且仅当 $A>B$

(乙) $\cot A+\cot B+\cot C$ 恒取正值

A. 甲对乙错　　B. 甲错乙对

C. 甲乙都对　　D. 甲乙都错

3. 设 x 为锐角,则函数 $y=\sin x\sin 2x$ 的最大值是(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$　　D. $\frac{5\sqrt{3}-1}{9}$

4. 计算55个5的乘积,则其最后三位数是(　　)

A. 125　　B. 375

C. 625　　D. 875

5. 已知 $\sin 2\alpha=m$, $\cos 2\alpha=n$, $m,n\in(0,1)$,则以下四个值:

1) $\frac{1+m}{n}$, 2) $\frac{n}{1-m}$, 3) $\frac{n+m+1}{n-m+1}$, 4) $\frac{m-n+1}{m+n-1}$

中,能作为 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值的有(　　)

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

6. 正整数 a,b 适合等式 $a+2a^2=b+3b^2$,则两数 $\sqrt{1+2a+2b}$ 与 $\sqrt{1+3a+3b}$ 的情况是(　　)

A. 都是有理数

B. 都是无理数

C. 一个有理数,一个无理数

D. 以上三种情况都可能出现

二、填空题(每小题9分,共54分)

1. x,y,z 是不同的正整数,若 $\{x+y,y+z,z+x\}=\{n^2,(n+1)^2,(n+2)^2\}$,则 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值是________.

2. 如果将含有数码4的四位数一齐去掉,则剩下的四位数有________个.

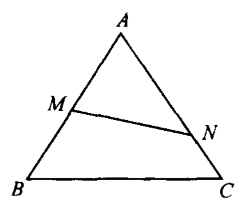
3. 用1,2,3,4,5排成一个五位数,使任两个相邻数码之差至少是2,则这种五位数有________个.

4. 若 $f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{x}f(x)+2$,则 $f(3)=$________.

5. 数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 满足:$a_0=\sqrt{3}$, $a_{n+1}=[a_n]+\frac{1}{\{a_n\}}$ ($[a_n]$ 与 $\{a_n\}$ 分别表示 a_n 的整数部分与分数部分),则 $a_{2004}=$________.

6. 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=100$ 围成一个区域 A,则 A 的内部(不含边界)中的整点(纵横坐标都是整数的点)的个数是________.

三、(20分) $\triangle ABC$ 中,M,N 分别是 AB, AC 边上的点,且 $\frac{BM}{MA}+\frac{CN}{NA}=1$,证明:$MN$ 过 $\triangle ABC$ 的重心.



第三题图

四、(20分)一个正整数 n,若不含大于1的平方因子,则称数 n 是单纯的.试问,在前一千个正整数 $1,2,\cdots,1000$ 中,共有多少个数是单纯的?

五、(20分)有 n 名运动员,编号分别是 $1,2,3,\cdots,n$,在一次集合中,他们以任意方式站成了一排.如果每一轮允许将其中一些人两两对换位置,但在同一轮操作过程中,一人至多只

能参与一次这种对换.证明:至多只需两轮这样的操作,可使队列变成 $1,2,3,\cdots,n$ 的顺序排列.

2004 年上海市高中数学竞赛试题

一、填空题(每小题 7 分,共 70 分)

1. 若 $a,b,c\in\mathbf{Z}^+$,且 $a=(b+ci)^3-47i$,则 a 的值是________.

2. 在$\triangle ABC$中,顶角 A、B、C 的对边顺次为 a、b、c,若 $a^2+b^2=tc^2$,且 $\cot C=2004(\cot A+\cot B)$,则常数 t 的值是________.

3. 三边长是三个连续的正整数,且它的周长小于或等于 100 的锐角三角形有________个.

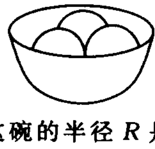
4. 设 $M_k=P_1\cdot P_2\cdots P_k$,其中 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 是从小到大排列的质数:$2,3,5,\cdots$中的前 k 个质数.若 s、t 是两个正整数,$t>s$,使 $M_t-M_s=510300$,则 $t+s$ 的值是________.

5. n 为已知正整数,$0\leqslant r\leqslant n$,$r\in\mathbf{Z}$,则当 $r!\,(n-r)!$ 取到最小值时,$r=$________.

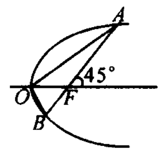
6. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1,x,y\in\mathbf{R}\}$,$B=\{(x,y)\mid x+ay=1,x,y\in\mathbf{R}\}$,$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x,y\in\mathbf{R}\}$,若$(A\cup B)\cap C$是由两个元素构成的集合,则实数 a 的值为________.

7. 已知集合 $M=\{(a,b)\mid(y^2+4)a^2-2(xy+by+8)a+x^2+2bx+2b^2+12$ 是关于 x、y 一次式的平方$\}$,当(a,b)取遍集合 M 中的所有元素时,点(a,b)到原点 O 的最大距离是________.

8. 如图,三个半径都是 10cm 的小球放在一个半球面的碗中,小球的顶端恰好与碗的上沿处于同一个水平面,则这碗的半径 R 是________.



9. 如图,AB 为抛物线过焦点 F 的弦,且与该抛物线的对称轴成 45°角,O 为该抛物线的顶点,则$\angle AOB$ 的大小________.(用反三角函数式表示)



10. 已知集合 $A=\{3k+2\mid 0\leqslant k\leqslant 697,k\in\mathbf{Z}\}$.若在 A 中任取 n 个数,都能从中找出两个不同的数 a,b 使 $a+b=2104$,则 n 的最小值为________.

二、(本题满分 16 分)

已知 $f(x)=x^3+mx^2+nx+5$,$m,n\in\mathbf{Z}$,求:

(1)使 $f(x)=0$ 有三个整数根(包括重根)的所有数组(m,n);

(2)使 $f(x)=0$ 至少有一个整数根,且 $0\leqslant m\leqslant5$,$0\leqslant n\leqslant5$ 的所有的数组(m,n).

三、(本题满分 16 分)

数列$\{a_n\}$满足$(n-1)a_{n+1}=(n+1)a_n-2(n-1)$,$n=1,2,3,\cdots$,且 $a_{100}=10098$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

四、(本题满分 18 分)

在各位数码各不相同的 10 位数中,是 11111 的倍数的有多少个?证明你的结论.

2004年全国高中数学联赛吉林赛区初赛试题

一、选择题(每小题6分,共36分)

1. $\triangle ABC$ 的三个内角满足 $\sin A\cdot\cos B-\sin B=\sin C-\sin A\cdot\cos C$. 则(　　)

A. $\angle A=90^\circ$

B. $\angle B=90^\circ$

C. $\angle C=90^\circ$

D. $\triangle ABC$ 不一定是直角三角形

2. 设 $\{z_n\}$ 是一个复数数列,定义

$$z_n=(1+\mathrm{i})\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\cdots\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}\right).$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{2004}|z_n-z_{n+1}|=$(　　)

A. 2004　　B. 1

C. 0　　D. $\sqrt{2004}$

3. 已知一个矩形的两边所在直线的方程分别为 $(m+1)x+y-2=0$ 和 $4m^2x+(m+1)y-4=0$.

则 m 的值为(　　)

A. -1　　B. $-\frac{1}{3}$ 或 -1

C. $\frac{1}{3}$ 或 1　　D. $-\frac{1}{3}$

4. 两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足

$$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=1,|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=\frac{1}{3}.$$

则 $(5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-9\boldsymbol{b})$ 的值为(　　)

A. 0　　B. 10

C. $\frac{80}{9}$　　D. $\frac{80}{3}$

5. 设 $P(x,y)$ 到定点 $M\left(-\frac{27}{2},0\right)$ 的距离为 d_1,点 P 到 y 轴的距离为 d_2. 若 $5d_1+2d_2=48$,则(　　)

A. 动点 P 的轨迹为双曲线一支

B. 动点 P 的轨迹曲线的离心率为 $\frac{5}{2}$

C. 动点 P 的轨迹方程为 $\frac{\left(x-\frac{23}{2}\right)^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$

D. 动点 P 的轨迹方程为 $\frac{\left(x+\frac{23}{2}\right)^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$

6. 已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高为 CD,沿 CD 将 $\triangle ACD$ 折起,折成一个直二面角 $A-CD-B$,此时,$\angle ACB$ 的余弦值为 $\frac{1}{4}$. 则 $\angle ACD$ 的值为(　　)

A. 15° 或 75°　　B. 45°

C. 30° 或 60°　　D. 20° 或 70°

二、填空题(每小题9分,共54分)

7. 设 $\{a_n\}$ 是递增的正整数数列 1,7,8,49,50,56,57,…,它们或者是7的幂,或者是若干个7的不同的幂之和. 则 $a_{1000}=$________.

8. 已知某系列化合物的分子式通式为 C_mH_n(其中 m、n 为正整数),其碳原子所占的个数比的计算公式为 $\frac{m}{m+n}$,给出一系列该化合物的分子式:CH_4,C_2H_6,…,C_nH_{2n+2},…. 则这一系列分子式中,碳原子所占的个数比 x 的取值范围是________.

9. 设 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$,且 $abc=1$. 求证:

$$\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1+2c}\geqslant1.$$

分析:为了证明结论中的不等式,可以先由已知条件,运用均值不等式证明以下的3个不等式

$$\frac{1}{1+2a}\geqslant\frac{a^\alpha}{a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha},$$

$$\frac{1}{1+2b}\geqslant\frac{b^\alpha}{a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha},$$

$$\frac{1}{1+2c}\geqslant\frac{c^\alpha}{a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha},$$

(其中 α 为常数). 再将上述3个不等式相加即可得证. 则分析过程中常数 α 的值为________.

10. 设 $f(x)=x^2-2ax-a^2-\frac{3}{4}$. 若对任

意的 $x\in[0,1]$，均有 $|f(x)|\leqslant1$，则实数 a 的取值范围是________.

11. 设函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$. 若存在与 x 无关的正常数 M，使 $|f(x)|\leqslant M|x|$ 对一切实数 x 均成立，则称 $f(x)$ 为有界泛函. 下列函数中，属于有界泛函的有________（填序号）.

①$f(x)=e^x$，

②$f(x)=x^2$，

③$f(x)=x(\sin x+\cos x)$，

④$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$，

⑤$f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且对一切实数 x_1、x_2 均有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant2|x_1-x_2|$.

12. 非空集合 A 满足

(1) $A\subseteq\{1,2,3,4,5,6,\cdots,11\}$；

(2) A 中任何 2 个整数不相邻. 则满足条件的 A 的个数为________.

三、(20 分) 设 Γ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A(x,y)$ 为 Γ 上一点，B、C、D 分别为 A 关于 y 轴、原点、x 轴的对称点，E 为 Γ 上一点，使 $AE\perp AC$，CE 与 BD 的交点为 F.

(1) 求出点 F 的坐标（用 A 的坐标表示）；

(2) 当 A 沿 Γ 运动时，F 的轨迹是什么？与 Γ 有何关系？

四、(20 分) 设 $a_i\in\mathbf{R}^+$，$i=1,2,\cdots,5$. 求

$$\frac{a_1}{a_2+3a_3+5a_4+7a_5}+\frac{a_2}{a_3+3a_4+5a_5+7a_1}+\cdots+\frac{a_5}{a_1+3a_2+5a_3+7a_4}$$ 的最小值.

五、(20 分) 求所有的正整数 n，使得 $n=p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2$，其中 p_1、p_2、p_3、p_4 是 n 的不同的 4 个最小的正整数因子.

六、(20 分) 求 $\sum\limits_{k=0}^{n}k^4$ 的求和公式，并给出证明.

2004 年全国高中数学联赛广西初赛试题

一、单项选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 设 a,b,c,d 是实数，假定方程 $z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$ 的所有根都在复平面上以原点为圆心，半径为 1 的圆上，则这些根的倒数和一定是(　　)

A. a　　B. $-b$

C. c　　D. $-a$

2. 二次函数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1999}{2}x+1000$ 的图象经过第一象限的整格点（即纵、横坐标都是整数的点）的个数是(　　)

A. 1000 个　　B. 1001 个

C. 1999 个　　D. 2004 个

3. 设 AB 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的长轴，若把 AB 这条长轴 100 等分，过每个分点作 AB 的垂线，交椭圆的上半部分于 $P_1,P_2,\cdots,P_{99}$，又 F_1 为椭圆的左焦点，则 $|F_1A|+|F_1P_1|+|F_1P_2|+\cdots|F_1P_{99}|+|F_1B|$ 的值是(　　)

A. $101a$　　B. $100a$

C. $99a$　　D. $98a$

4. 设 $N=69^5+5\times69^4+10\times69^3+10\times69^2+5\times69+1$，则 N 的正整数约数有(　　)个.

A. 3　　B. 216

C. 69　　D. 5

5. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个不共线向量. 若 $6\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线，$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直，$\boldsymbol{a}+2\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为(　　)

A. 30°　　B. $\arctan\dfrac{1}{2}$

C. 60°　　D. 90°

6. 令 $f(x)=4x-x^2$，给定 x_0，考察由 $x_n=f(x_{n-1})(n\geqslant1)$ 定义的数列，其中使数列 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 只取有限多个不同数值的实数 x_0 的值有(　　)

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 无限多个

二、填空题(每题9分,共54分)

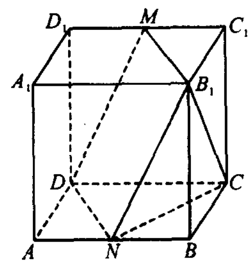
1. 将2.5随机地分解成两个非负数之和,如$2.5=2.143+0.357$,或$2.5=\sqrt{3}+(2.5-\sqrt{3})$,再把每一个数改为与它最接近的整数,如2.143、0.357分别改成2和0;$\sqrt{3}$和$2.5-\sqrt{3}$分别改成2和1.那么最后得的两整数和为3的概率是__________.

2. 设a、b为实数,且存在复数z,使得$|z|\leqslant 1$($|z|$为复数z的模),且$z+\bar{z}|z|=a+bi$($\bar{z}$为z的共轭复数),则ab的最大值是________.

3. 已知$f(x)=x^2-6x+5$,则同时满足$f(x)+f(y)\leqslant 0$和$f(x)-f(y)\geqslant 0$的点(x,y)所在平面区域的面积是__________.

4. 三位数100,101,102,103,…,999共900个,在卡片上打印这些三位数,每张卡片只打印一个三位数,有的卡片所印的三位数倒过来看仍是三位数(例如198倒过来看是861,而531倒过来看则不是三位数),因此这些卡片可以一卡二用,于是至多可以省去________张卡片.

5. 如图,在单位正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,M、N分别为D_1C_1、AB的中点,则C到平面MB_1ND的距离为________.



6. 设$0<b<1$,$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$,$x=(\sin\alpha)^{\log_b \sin\alpha}$,$y=(\cos\alpha)^{\log_b \cos\alpha}$,$z=(\sin\alpha)^{\log_b \cos\alpha}$,则$x$,$y$,$z$的大小关系是________.

三、(20分)当a为何值时,不等式

$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\times\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geqslant 0$有且仅有一解?

四、(20分)过$\triangle ABC$顶点C作$l\parallel AB$,$\angle A$平分线交BC于D,交l于E,$\angle B$平分线交AC于F,交l于G,如果$DE=GF$,求证:$AC=BC$.

五、(20分)将与105互素的所有正整数从小到大排成数列,试求出这个数列的第2004项.

2004年全国高中数学联赛四川省初赛试题

一、选择题(本题满分30分,每小题5分)

1. 函数$f(x)=x+\frac{2x}{4^x-1}$是(　　)

A. 是偶函数但不是奇函数

B. 是奇函数但不是偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数

D. 既不是奇函数也不是偶函数

2. 已知$f(x)$对任意整数x都有$f(x+2)=f(x-2)$,若$f(0)=2003$,则$f(2004)=$(　　)

A. 2002　　B. 2003

C. 2004　　D. 2005

3. 已知不等式$m^2+(\cos^2\theta-5)m+4\sin^2\theta\geqslant 0$恒成立,则实数$m$的取值范围是(　　)

A. $0\leqslant m\leqslant 4$　　B. $1\leqslant m\leqslant 4$

C. $m\geqslant 4$或$m\leqslant 0$　　D. $m\geqslant 1$或$m\leqslant 0$

4. 母线长为$\sqrt{6}$的圆锥中,体积最大的那一个底面圆的半径为(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

5. 正三棱锥相邻侧面所成二面角是侧面与底面所成二面角的两倍,则侧棱与底面边长之比为(　　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{2}{3}$

6. 函数 $y=\cos^3 x+\sin^2 x-\cos x$ 的最大值等于(　　)

A. $\frac{32}{27}$　　B. $\frac{16}{27}$

C. $\frac{8}{27}$　　D. $\frac{4}{27}$

二、填空题(本题满分 30 分,每小题 5 分)

7. 已知函数 $f(x)=\frac{3^{2x}}{3+3^{2x}}$,则 $f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{2}{101}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{101}\right)=$________.

8. 不等式 $|x^2-2|\leqslant 2x+1$ 的解集为______________.

9. 某城市的机动车牌照是从“10000”到“99999”连续编号,则在这 90000 个牌照中数字 9 至少出现一个,并且各数字之和是 9 的倍数的车牌照共有________个.

10. 若 $0<a,b,c<1$ 满足 $ab+bc+ca=1$,则 $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}$ 的最小值是________.

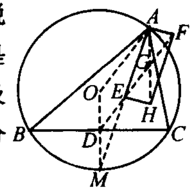
11. 已知正四棱锥 $V\text{-}ABCD$ 的棱长都等于 a,侧棱 VB,VD 的中点分别为 H 和 K,若过 A、H、K 三点的平面交侧棱 VC 于 L,则四边形 $AHLK$ 的面积为________.

12. 已知 a、b、x 是实数,函数 $f(x)=x^2-2ax+1$ 与函数 $g(x)=2b(a-x)$ 的图象不相交.记参数 a、b 所组成的点 (a,b) 的集合 A,则集合 A 所表示的平面图形的面积为________.

三、解答题(本题满分 80 分,每小题 20 分)

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1=1$,$a_n=2a_{n-1}+n-2(n\geqslant 2)$,求通项 a_n.

14. 如图,O,H 分别是锐角$\triangle ABC$ 的外心和垂心,D 是 BC 边的中点,由 H 向$\angle A$ 及其外角平分线作垂线,垂足分别为 E 和 F.



证明:D、E、F 三点共线.

15. 设 $A=\{1,2,\cdots,n\}$,用 S_n 表示 A 的所有非空真子集中各元素之和;B_n 表示 A 的子集的个数,求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2\cdot B_n}$ 的值.

16. 已知椭圆 ε:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,动圆 Γ:$x^2+y^2=R^2$,其中 $b<R<a$.若 A 是椭圆 ε 上的点,B 是动圆 Γ 上的点,且使直线 AB 与椭圆 ε 和动圆 Γ 均相切,求 A、B 两点的距离 $|AB|$ 的最大值.

2004 年全国高中数学联赛河南省预赛试题

一、选择题(本题满分 30 分,每小题 5 分.本题共有六个小题,每小题后面给出了 A、B、C、D 四个结论,其中只有一个是正确的.请把正确结论的代表字母写在题后括号内,选对一个得 5 分,错选、漏选或多选,一律得零分)

1. 已知集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x^2+px+10\leqslant 9\}$ 中有且只有一个元素,则实数 p 的值为(　　)

A. ± 1　　B. 0

C. ± 2　　D. ± 18

2. 椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点为 F_1 和 F_2,点 P 在椭圆上,如果线段 PF_1 的中点在 y 轴上,那么 $|PF_1|$ 是 $|PF_2|$ 的(　　)

A. 7 倍　　B. 5 倍

C. 4 倍　　D. 3 倍

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n,对一切正整数 n 都有 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$,则 $\frac{a_7}{b_9}$ 等于(　　)