恩波考研

全国18大城市辅导班内部讲义

硕士研究生入学考试

数学强化500题

精解（经济类）

2005

ENBOEDUCATION 恩波教育

主　编　恩　波
分册主编　余　术
陈维新　田根宝

考研数学取得高分的关键在于“好题的训练”！

本书以题型为主线，是国家1992年实行统考以来考研命题规律的归纳、总结与扩展，具有很强的实战意义。

本书选题讲究，20%的试题选自考研数学最具有代表性的真题，80%的试题是作者原创或长期积累的难度与真题相当，并具有较高灵活性、综合性的全真模拟题。

学苑出版社

硕士研究生入学考试

数学强化500题精解

（经济类）

主　　编　恩　波

分册主编　余　术　陈维新　田根宝

编　　者（以姓氏笔画为序）

田根宝　刘国庆　何　勇

余　术　陈维新　黄柏琴

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试数学强化500题精解．经济类/恩波主编．—北京:学苑出版社,2004.7

ISBN 7—5077—2356—9

Ⅰ．硕…　Ⅱ．恩…　Ⅲ．高等学校—研究生—入学考试—习题　Ⅳ．013—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第068193号

责任编辑:刘　涟
责任校对:姜东平
封面设计:顾小平
出版发行:学苑出版社
社　　址:北京市丰台区南方庄2号院1号楼
邮政编码:100078
网　　址:www.book001.com
电子信箱:xueyuan@public.bta.net.cn
销售电话:010—67675512、84560465
经　　销:新华书店
印 刷 厂:北京东方七星印刷厂
开本尺寸:787×1092　1/16
印　　张:22.5
版　　次:2004年7月北京第1版
印　　次:2004年7月北京第1次印刷
印　　数:0001—5000册
定　　价:28.00元

前　　言

撰写本书的宗旨:考研数学复习从这里再上新台阶!

关于考研数学复习,我们认为最佳的复习安排可以分为三轮。第一轮:基础复习。主要是复习和巩固以前学过的数学基础知识,形成对高等数学、线性代数、概率论与数理统计三门学科的宏观认识,以便为下一阶段的“强化复习”乃至最后阶段的“最后冲刺”作好充分准备;第二轮:强化复习。通过这一轮的复习,考生应当把握考研数学各题型的特点和规律,确定应试方法,初步形成应试技巧,并将复习过的基础知识和解题方法运用到考研的强化训练中去,来锻炼和提高自己运用知识、分析问题的能力;第三轮:最后冲刺。寻找若干(6～8)套与考研数学试题完全接轨的、符合最新考研数学命题特点和规律的、高质量的模拟试卷作实战训练。这步工作很重要,因为若选用的冲刺试卷质量不高,不符合命题特点和规律,就起不到热身训练的作用,不能得到预期的效果。

通过多年的考研辅导,我们认定:考研数学取得高分的关键在于好题的训练。本书正是专门为经过第二轮复习后的广大考生所设计的强化训练平台。其内容以教育部制订的最新考研数学大纲为依据,各单元的编排次序与大纲完全一致。本书具有以下鲜明特点:

1. 选题经典、原创。考研数学题目浩如烟海,随处可见,但是真正的好题却并不多见。为了不让广大考生因做无用题而浪费宝贵的考研复习时间,本书作者一方面在选题上下足工夫,为考生选出了符合大纲要求、接近真题难度、体现命题规律的经典好题近 300 题;另一方面又以其深厚的学术功底和多年的辅导心得为基础,结合近年命题特点与热点,原创了 200 余道灵活性和综合性都较强的题目,其中不乏作者密押多年的看家题,其目的使得考生在做题时达到事半功倍的效果。

2. 体例简明、科学。本书根据“导”与“练”的特点而设置体例。**方法和技巧精要**——根据考试大纲,按单元或节简单明了地列举出核心考点与技巧,重点突出,使考生在做题时有的放矢;**典型题解析**——本书以题型为主线,是国家 1992 年实行统考以来真题的归纳、总结与扩展,具有很强的实战意义;选题讲究,据不完全统计,约有 20%～30%的例题选自考研数学最具有代表性的真题,70%～80%的例题是作者原创或长期积累的难度与考研数学真题相当,具有较高灵活性、综合性的题目。**模拟训练**——每单元配有难度与真题相当的综合练习题,让考生在训练中逐步提高解题能力,掌握解题技巧,而模拟训练的解答或提示可进一步引导考生理顺思路、开拓思维。

3. 解析权威、详尽。本书的作者均是国内最顶尖大学的资深教授,同时又是国内考研辅导的一线名师,深谙考研数学的命题规律与命题趋势,有着丰富的辅导和写作经验。作者对典型题的解答,剖析了考试重点、热点、难点题型的解题方法与技巧,融汇了作者的相关体会或总结,从而达到启迪考生思维,指导考生串联考点,举一反三,学会解题的目的。

本书由恩波策划,负责组织作者和全书设计。全书的分工情况是:高等数学:理工类由余术执笔,经济类由何勇执笔;线性代数:一、二、四单元由田根宝执笔,三、五、六单元由陈维新执笔;概率论与数理统计:理工类由黄柏琴执笔,经济类由刘国庆执笔。此外,余术、陈维新还参与制订大纲及设计体例。

本书在成书前，曾在全国各地的数学考研辅导班试用，获得了良好的效果。在后期修改时，作者还参考了广大学员与恩波教育在线(www. enboedu. com)上众多考生的建议，进行了大量的修订、补充、归纳与提高，其特色明显，希望能够在众多考研数学辅导书中脱颖而出。

我们相信，考生通过本书系统的强化训练，一定能将相关考点的解题方法和解题技巧娴熟于胸，达到举一反三，触类旁通之效。

本书稿承南京大学数学系姜东平教授仔细审阅、润色，作者深表谢意。

限于水平和时间，书中难免有疏漏、不当之处，读者如发现，敬请不吝赐教，以便修正完善。

编著者

2004 年 7 月

目　　录

高等数学

线性代数

概率论与数理统计

高 等 数 学

第一单元　函数、极限、连续

第一节　函　　数

一、方法和技巧精要

考研题中与函数及其基本性质(单调性、周期性、奇偶性、有界性等)有关的题目比比皆是.例如:利用单调性来证明不等式,利用严格单调性证明根的惟一性,利用函数奇偶性、周期性来简化定积分计算;在求导运算时需要将复合函数分解成一些基本初等函数等等.但是单独以本节内容命题的考题,相对较少.下面就几个问题略加说明.

1. 求复合函数的定义域,一般按如下步骤进行:先求最外层函数的定义域,以此定义域作为次外层的值域求出次外层的定义域,……如此直至最后获得自变量的变化范围.

2. 讨论函数的奇偶性、周期性,一般从定义出发加以验证.但也有一些简单方法验证一个函数不是奇(偶)函数、周期函数.

(1) 若 $f(x)$的定义域关于 $x=0$ 点不对称,则不可能是奇函数和偶函数;

(2) 若 $f(0)\neq 0$, 则 $f(x)$不是奇函数;

(3) 若 $f(x)$的定义域有上界或下界,则它不是周期函数;

(4) 设 x_0 是函数 $f(x)$的定义域内任一点,若 $f(x)-f(x_0)=0$ 的根没有周期性,则 $f(x)$不是周期函数.

3. 求函数的表达式是一类较常见的试题,涉及的知识点多,主要包括以下几类题型:

(1) 利用函数奇偶性、周期性,以及函数在某一区间段上的表达式,求它在另一指定区间上的表达式;

(2) 利用复合关系求复合函数或中间函数的表达式;

(3) 求分段函数表达式;

(4) 求反函数表达式;

(5) 由函数方程求函数表达式,这里方程可能会是微分方程、差分方程、积分方程,也可能是含有极限的方程.这部分内容将在以后各单元展开.

二、典型题解析

例 1.1(填空题)　设 $f(x)=e^{x^2}\ (x\geqslant 2)$, $f[\varphi(x)]=1-x^3$,则 $\varphi(x)=$ ________.

详细解答　由题设知 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x^3$, $\varphi(x)\geqslant 2$. 从而

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x^3)}.$$

$\varphi(x)$的定义域除了使该函数表达式有意义外，还必须保证 $\varphi(x)\geqslant 2$. 从而

$$\begin{cases}\ln(1-x^3)\geqslant 0,\\ \sqrt{\ln(1-x^3)}\geqslant 2.\end{cases}$$

求解得 $x\leqslant -\sqrt[3]{e^4-1}$. 所以应填 $\sqrt{\ln(1-x^3)}$，$x\leqslant -\sqrt[3]{e^4-1}$.

例 1.2(填空题)　已知对任意 $t\neq 0$，$af(t)+bf\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{c}{t}$，其中 a，b，c 为常数，且 $|a|\neq |b|$，则当 $t\neq 0$ 时 $f(t)=$ ________.

详细解答　由 $af(t)+bf\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{c}{t}$，有 $af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct,t\neq 0$. 由两式结合得

$$\begin{cases}af(t)+bf\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{c}{t},\\ bf(t)+af\left(\frac{1}{t}\right)=ct.\end{cases}$$

消去 $f\left(\frac{1}{t}\right)$得 $f(t)=\frac{ca-cbt^2}{(a^2-b^2)t}$，$t\neq 0$，所以此题应填$\frac{ca-cbt^2}{(a^2-b^2)t}$.

例 1.3(单项选择题)　设有函数 $f_1(x)=\sin\sqrt{x}$，$f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q},p,q\text{ 互质整数},q>0,\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$

$f_3(x)=\sin x^2$，$f_4(x)=[x]-3\left[\frac{x}{3}\right]$. 则关于函数的周期性论述正确的是(　　).

(A) $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$不是周期函数，$f_4(x)$是周期函数

(B) $f_1(x)$，$f_3(x)$不是周期函数，$f_2(x)$，$f_4(x)$是周期函数

(C) $f_1(x)$，$f_2(x)$不是周期函数，$f_3(x)$，$f_4(x)$是周期函数

(D) $f_2(x)$，$f_4(x)$不是周期函数，$f_1(x)$，$f_3(x)$是周期函数

详细解答　$f_1(x)$的定义域为 $x\geqslant 0$，有下界，故 $f_1(x)$ 不是周期函数. 对于 $f_2(x)$，易证下述性质：若 p，q 为互质整数，则 $p+q,q$ 也为互质整数. 由此可知 $f_2(x)$ 以 1 为周期. 对于 $f_3(x)$，$f_3(x)=0$ 的根为 $x=\pm\sqrt{n\pi}$，相邻两根的距离为 $d=\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}d=0$，所以根的分布没有周期性，因此 $f_3(x)$ 不是周期函数. 对 $f_4(x)$，由于$[x]-x$ 以 1 为周期，$\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]$ 以 3 为周期，所以 $f_4(x)$以 3 为周期.

综上，$f_1(x)$和 $f_3(x)$是周期函数，$f_2(x)$和 $f_4(x)$不是周期函数，故应选 D.

例 1.4　求解下列各题：

(1) 设函数 $g(x)$的定义域是 $0\leqslant x\leqslant 1$，求 $f(x)=g(x+a)+g(x-a)$ 的定义域，其中 $a>0$ 为常数；

(2) 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，$x\neq 0$，求函数 $f(x)$及其定义域；

(3) 设函数 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，$f(1)=a$，且对任何的 x 都有 $f(x+2)=f(x)+f(2)$，试求 a 的值，使 $f(x)$是以 2 为周期的周期函数；

(4) 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} \sin x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & 其它, \end{cases}$

求 $F(x)=f(x)g(3-x)$ 的表达式；

(5) 设函数

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\geqslant 0, \\ x^2, & x<0, \end{cases} \quad g(x)=\begin{cases} 0, & x>1, \\ -\sqrt{1-x}, & x\leqslant 1, \end{cases}$$

试求复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$；

(6) 求常数 c 使 $(a+c)\sin(a+c)=(b+c)\sin(b+c)$，其中 a, b 是给定的常数，且 $a<b$.

详细解答 (1) 由 $g(x)$的定义域知 $g(x+a)$ 与 $g(x-a)$ 的定义域分别为 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 与 $0\leqslant x-a\leqslant 1$，故函数 $f(x)=g(x+a)+g(x-a)$ 的定义域是这两个定义域的交集.

$$\begin{cases} 0\leqslant x-a\leqslant 1, \\ 0\leqslant x+a\leqslant 1, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} a\leqslant x\leqslant 1+a, \\ -a\leqslant x\leqslant 1-a. \end{cases}$$

由此推得：当 $a\leqslant \frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的定义域为 $a\leqslant x\leqslant 1-a$；而当 $a>\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$的定义域为空集.

(2) 令 $t=x+\frac{1}{x}$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$，故 $f(t)=t^2-2$. 注意到$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\geqslant 0$，即有 $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$，故 $f(t)=t^2-2\geqslant 2$. 于是函数 $f(x)=x^2-2$ 的定义域为 $|x|\geqslant 2$.

(3) 在 $f(x+2)=f(x)+f(2)$ 中令 $x=-1$ 有 $f(2)=f(1)-f(-1)$. 因 $f(x)$ 为奇函数，故 $f(-1)=-f(1)=-a$，则 $f(2)=2f(1)=2a$. 于是

$$f(x+2)=f(x)+2a.$$

显然，当 $a=0$ 时有 $f(x+2)=f(x)$，所以当 $a=0$ 时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

(4) 因 $$g(3-x)=\begin{cases} \sin(3-x), & 3-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 3, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

故 $$F(x)=f(x)g(3-x)=\begin{cases} e^{-x}\sin(3-x), & 3-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 3, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

(5) 显然，$f[g(x)]=\begin{cases} \sin g(x), & g(x)\geqslant 0, \\ g^2(x), & g(x)<0. \end{cases}$

因 $g(x)\leqslant 0$，且当 $x\geqslant 1$ 时 $g(x)=0$，当 $x<1$ 时 $g(x)=-\sqrt{1-x}<0$，故

$$f[g(x)]=\begin{cases} \sin 0, & x\geqslant 1, \\ (-\sqrt{1-x})^2, & x<1, \end{cases}=\begin{cases} 0, & x\geqslant 1, \\ 1-x, & x<1. \end{cases}$$

易见，$g[f(x)]=\begin{cases} 0, & f(x)>1, \\ -\sqrt{1-f(x)}, & f(x)\leqslant 1. \end{cases}$

因只有当 $x<-1$ 时，$f(x)=x^2>1$，故当 $x<-1$ 时 $g[f(x)]=0$，而若 $x\in[-1, 0)$，则

$f(x)=x^2\leqslant 1$，故当 $-1\leqslant x<0$ 时 $g[f(x)]=-\sqrt{1-x^2}$.

因 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\sin x\leqslant 1$，故当 $x\geqslant 0$ 时 $g[f(x)]=-\sqrt{1-\sin x}$. 于是

$$g[f(x)]=\begin{cases}0, & x<-1,\\ -\sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x<0,\\ -\sqrt{1-\sin x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

(6) 由题设等式的特征构造函数 $f(x)=x\sin x$，故所给的条件就是 $f(b+c)=f(a+c)$. 显然，$f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，即有 $f(b+c)=f[-(b+c)]$，$f(a+c)=f[-(a+c)]$. 要使 $f(b+c)=f(a+c)$，便有使 $f(b+c)=f[-(a+c)]$ 成立，只须 $b+c=-(a+c)$，则 $c=-\dfrac{1}{2}(a+b)$.

友情提醒 1. 该例第(1)小题的目的在于提醒大家：求复合函数的定义域未必需要先求出复合函数的表达式.

2. 对于初等函数的复合，宜采用代入方法，即将一个函数作为另一个函数的自变量直接代入得所求的复合函数，如本例中(4)小题. 对于分段函数的复合，宜采用分析方法，就是抓住最外层函数定义域的各个区间段，再注意到里层函数的表达式及其值域与外层函数定义域的关系便容易得出所求的复合函数，如本例中(5)小题.

例 1.5 求函数 $y=f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ 的反函数.

思路分析 除了求出反函数 $f^{-1}(x)$ 的表达式外，还需求出反函数的定义域，它应通过求出原来的函数 $f(x)$ 的值域来得到，值得指出的是，它未必就是使得反函数 $f^{-1}(x)$ 表达式有意义的自变量范围.

详细解答 先求反函数表达式. 由 $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$，经移项得

$$y+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x^2+x+1}.$$

两边平方得
$$2y\sqrt{x^2-x+1}=2x-y^2,$$

再平方得
$$4x^2(1-y^2)=(4-y^2)y^2,$$

所以有
$$x=\frac{y}{2}\sqrt{\frac{4-y^2}{1-y^2}}.$$

下面讨论反函数的定义域，由于 $f(-x)=-f(x)$，所以 $y=f(x)$ 是奇函数. 下面只须讨论 $x>0$ 时 $f(x)$ 值的范围. 显然，当 $x>0$ 时

$$y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

反证. 当 $x>0$ 时，$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}>2x$. 事实上，该式等价于

$$x^2+x+1+x^2-x+1+2\sqrt{(x^2+1)^2-x^2}>4x^2,$$
$$x^2+1+\sqrt{x^4+x^2+1}>2x^2.$$

该式是显然成立的. 因此当 $x>0$ 时有 $0<y<1$. 且 $\lim\limits_{x\to\infty}y=1$，所以当 $x>0$ 时 $f(x)$ 的值域为 $0<y<1$. 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的值域为 $-1<y<1$. 因此得 $f(x)$ 的反函数为

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}\sqrt{\frac{4-x^2}{1-x^2}},\quad |x|<1.$$

例 1.6 证明:函数 $f(x)=xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

思路分析 因为连续函数在有界闭区间上有界.而本题的函数是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上,故需要讨论当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在.

详细解答 由于 $f(-x)=-xe^{-x^2}\int_0^{-x}e^{t^2}\,dt\xlongequal{u=-t}xe^{-x^2}\int_0^x e^{u^2}\,du$,从而 $f(x)$ 是偶函数,因此只需证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

由于

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{\frac{1}{x}e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2e^{x^2}-\frac{1}{x^2}e^{x^2}}=\frac{1}{2},$$

因而极限存在,且位于 0 与 1 之间,所以由函数极限的保号性知存在 $A>0$,使对一切 $x>A$,有 $0<f(x)<1$,因此 $f(x)$ 在 $(A,+\infty)$ 上有界.

又显然 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上连续,从而有界.综上可知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界,也即在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

第二节 极　　限

一、方法和技巧精要

本节是考研试卷中的热点,主要包括数列极限、函数极限,无穷小的比较及无穷小的阶等.

1. 数列极限的计算方法主要有:

(1) 夹逼定理.

(2) 化为定积分.表达式为 n 项和或 n 项乘积的数列极限常用此法.这里 n 项乘积可通过取对数化为 n 项和.

(3) 用单调有界准则判断极限的存在并求极限.表达式以递推形式给出的数列的极限常用此法.

若 $\{u_n\}$ 单调增加有上界,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ 存在且极限是 u_n 的一个上界;若单调增加无上界,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.同样若数列单调减少有下界,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在,且极限是 u_n 的一个下界;若单调减少无下界,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

用单调有界准则来研究数列收敛性时,一个有效方法是:先假设极限存在,并利用递推关系式求出极限应满足的等式,求解此式得出极限值.(当等式的根不唯一时,可利用极限保号性来排除),然后借助此极限值来分析数列的有界性、单调性.

证明 $\{u_n\}$ 单调性的常用方法有:① 若 $u_n>0$,证明对任意 n,$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant1$,或对任意 n,$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant1$.② 证明对任意 n,$u_{n+1}-u_n\geqslant0$ 或对任意 n,$u_{n+1}-u_n\leqslant0$.在用①、②时往往要用到数学归纳法.

③ 由 $u_n=f(n)$ 构造函数 $f(x)$，利用 $f(x)$ 的导数大于零或小于零确定 $f(x)$ 的单调性，从而得到 u_n 单调性.

(4) 化为函数极限. 以 x 代替 n 或 $\frac{1}{n}$，化为函数极限，并利用数列极限与函数极限的关系定理.

例如　对于"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"型数列极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$，如果希望使用洛必达法则，那末必须先分别由 $f(n)$，$g(n)$ 构造函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，并验证它们满足洛必达法则的诸条件，然后用洛必达法则求函数极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$. 再根据函数与数列的极限关系即知，原数列的极限等于该函数的极限. 特别注意，对原数列极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$ 不能直接使用洛必达法则，因为 $f(n)$ 与 $g(n)$ 是不可导的.

(5) 用级数收敛性来研究数列极限，例如：

① 将数列 $\{u_n\}$ 的通项 u_n 看成某一级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$ 的前 n 项和，若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$ 收敛，则 $\{u_n\}$ 极限存在.

② 由数列 $\{u_n\}$ 构造一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若该级数收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 此方法数学四的考生不做要求.

2. 函数极限的计算方法

(1) 利用函数连续性，若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2) 利用恒等变形，例如，以同一函数乘分式的分子分母，和根式有理化等等. 注意这也是求数列极限的有效手段.

(3) 夹逼定理.

(4) 利用无穷小性质. 例如，有界量与无穷小量的乘积，仍是无穷小，有限个无穷小量的代数和，或有限个无穷小量乘积仍是无穷小量等.

(5) 等价无穷小代换. 当 $x\to 0$ 时，以幂函数 $x^{\alpha}(\alpha>0)$ 为基本无穷小，给出其它无穷小量形如 x^{α} 的等价无穷小，使众多无穷小都统一在幂函数下. 但应注意下面两点：

① 等价无穷小替代法则，一般只适用于求极限的函数中的乘积因子. 如果求极限的函数中出现加减时，则应该设法把它们转化为乘除形式后方可应用等价无穷小替代法则.

② 为了等价无穷小代换的方便，对 $x\to x_0$ 的极限过程，可先作变量变换，令 $t=x-x_0$，对变量 t 的相关乘积因子用其等价无穷小代换就方便得多.

按上述操作，再经过化简，恒等变形等之后，原极限的表达式就变得比较简单，再应用洛必达法则等方法就显得更方便. 另一方面，应用洛必达法则求极限的过程中也离不开上述的各种方法和技巧的综合应用.

(6) 利用两个重要极限，即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ $\left(\text{这里提醒大家注意}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0\right)$. 它们可推广到：若 $f(x)\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}$.

(7) 洛必达法则. 使用该法则求极限，必须仔细检查条件是否满足. 例如：分子、分母是否可导，求导后是否为下述两种情况之一：① 仍为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，此时需继续计算；② 极限已存在或为 ∞. 如果使用洛必达法则后极限不存在，则只能说明此极限不适合用洛必达法则，但它不意味着原极限不存在.

(8) 利用导数定义或微分中值定理.

利用函数的泰勒展开计算函数极限不属于经济类考生考研大纲范围,在此不再介绍.

函数极限计算中的重点和难点是未定型的极限.一般通过变形得$\infty-\infty$,$0\cdot\infty$,1^{∞},0^0,∞^0等类型的极限通过通分、倒代换、取对数,分式有理化等方法化为$\frac{0}{0}$,$\frac{\infty}{\infty}$型来求解.

3. 求无穷小量的阶常可用待定常数法计算:设$x\to x_0$时$f(x)\sim Ax^a$,然后计算$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x^a}$在$a$取何值时,该极限存在,且不等于零.这里$x_0$可以是0,$\infty$或其它常数.当然,对于一些简单计算题,可直接通过常用的等价无穷小代换得到.

4. 关于求极限的考题中还有一类题型:已知$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=a$,确定极限表达式$\frac{f(x)}{g(x)}$中的某几个参数.此时一个重要原理是:当$a\neq0$时,$f(x)$和$y(x)$必同为无穷小量(无穷大量),当$a=0$时,$f(x)$是比$g(x)$高阶的无穷小量(低阶无穷大量).若极限形式不是$\frac{f(x)}{g(x)}$形式,则先设法通过恒等变形化为此形式.

二、典型题解析

1. 数列极限

例 1.7 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right)$.

详细解答 令$f(x)=\frac{1}{(n^x+1)^{\frac{1}{x}}}$,则$\ln f(x)=-\frac{1}{x}\ln(n^x+1)$,

$$f'(x)=f(x)\left[\frac{\ln(n^x+1)}{x^2}-\frac{n^x\ln n}{x(n^x+1)}\right]>f(x)\left(\frac{\ln n^x}{x^2}-\frac{n^x\ln n}{x\cdot n^x}\right)=0,$$

故$f(x)$严格递增,从而$f(1)<f(x)<f(n)$.

$$\frac{n}{n+1}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}<\frac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}.$$

由于

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}}=1,$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right)=1.$$

友情提醒 为了判断复杂的和式中哪一项是最大项、最小项,可构造函数,利用导数研究其单调性.

例 1.8 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{e^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{e^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}$.

思路分析 题(1)通过放大技巧,转化成定积分的和式极限,然后用夹逼定理计算. 题(2)将 n 项连乘通过取对数,化为 n 项相加,然后将极限化为定积分.

详细解答 (1) $\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{e^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{e^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$,

而
$$\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{n}e^{\frac{k}{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{k}{n}}}{n+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{k}{n}}.$$

由于
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 e^x\,dx=e-1,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 e^x\,dx=e-1,$$

所以由夹逼定理知
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{e^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{e^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)=e-1.$$

(2) 由于
$$\frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}$$
$$=\left[\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdots\frac{n+n}{n}\right]^{\frac{1}{n}}$$
$$=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$
$$=\int_0^1\ln(1+x)\,dx$$
$$=[(1+x)\ln(1+x)-x]\Big|_0^1$$
$$=\ln 4-1.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}=e^{\ln 4-1}=\dfrac{4}{e}$.

例 1.9 设有数列 a_n, b_n, c_n 满足
$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\sqrt{b_n^2+c_n^2}}{b_n+c_n},\ a_1>0;\ 8\leqslant b_n\leqslant 9,\ 8\leqslant c_n\leqslant 9.$$

问 a_n 是否收敛,若收敛,求极限值.

详细解答 显然有 $a_n>0$, 且

$$a_n=\frac{\sqrt{b_n^2+c_n^2}}{b_n+c_n}a_{n-1}<\frac{\sqrt{9^2+9^2}}{8+8}=\frac{9\sqrt{2}}{16}a_{n-1}$$

从而 $0<a_n<\left(\frac{9\sqrt{2}}{16}\right)^{n-1}a_1$.

因为 $0<\frac{9\sqrt{2}}{16}<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{9\sqrt{2}}{16}\right)^{n-1}a_1=0$，从而由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

友情提醒 在用夹逼原理来求极限时，要经常用到下述极限：

$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0\ (|x|<1)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p}=1$，$p$ 为任意常数；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^b}=1$，$a$ 为任意大于零常数，b 为任意常数；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$，$p>0$ 常数.

例 1.10 设 $\alpha<1$. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$.

详细解答 **方法 1** 因为 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调递增趋于 e，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调递减趋于 e，所以 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. 从而

$$\begin{aligned}0<n^\alpha\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]&<n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\\&=n^\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}<\frac{\mathrm{e}}{n^{1-\alpha}}.\end{aligned}$$

又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}}{n^{1-\alpha}}=0$，故由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=0$.

方法 2 化为函数极限并应用洛比达法则，取 $x=\frac{1}{n}$，则当 $n\to+\infty$ 时，$x\to0^+$.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}n^\alpha\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^\alpha}\\
&=\lim_{x\to0^+}\frac{-(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]}{\alpha x^{\alpha-1}}\\
&=-\frac{\mathrm{e}}{\alpha}\lim_{x\to0^+}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^{1+\alpha}(1+x)}\quad(\text{因为 }x\to0\text{ 时 }x^{1+\alpha}(1+x)\sim x^{1+\alpha})\\
&=-\frac{\mathrm{e}}{\alpha}\lim_{x\to0^+}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^{1+\alpha}}\\
&=-\frac{\mathrm{e}}{\alpha}\lim_{x\to0^+}\frac{-\ln(1+x)}{(1+\alpha)x^\alpha}\\
&=\frac{\mathrm{e}}{\alpha(1+\alpha)}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{\mathrm{e}}{a^2(1+\alpha)}\lim_{x\to0^+}\frac{x^{1-\alpha}}{1+x}=0.\end{aligned}$$

友情提醒 该题方法一巧妙利用了 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 这个重要极限，及有界单调递增（递减）数列的极限是它的上（下）界这个事实. 通过夹逼原理得到答案，计算过程简单. 方法二是化成函数极限，并利用洛比达法则，这是一类常用方法. 计算较繁，但这是基本方法，应当熟练掌握. 注

意每次在应用洛比达法则对分子、分母求导数时，应当先检查是否可以通过等价无穷小代换、恒等变形、提出极限值已知的乘法因子等手段来简化.

例 1.11 设有数列 a_n, b_n 满足

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k},\quad b_n=\int_0^n\sqrt{x}\mathrm{d}x,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}}$.

(2) 证明 $a_n>2(\sqrt{n+1}-1)$.

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}$.

详细解答 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{\dfrac{1}{n}}+\sqrt{\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{n}{n}}\right]$

$$=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\mathrm{d}x>\sum\limits_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_1^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x}\Big|_1^{n+1}=2(\sqrt{n+1}-1)$.

(3)
$$\begin{aligned}\frac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\int_0^n\sqrt{x}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\sqrt{k-t}\mathrm{d}t\right)\quad(令\ x=k-t)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1(\sqrt{k}-\sqrt{k-t})\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\frac{t}{\sqrt{k}+\sqrt{k-t}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

从而一方面

$$\begin{aligned}\frac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}&\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\frac{t}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2}{2(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})}\Bigg|_0^1\\&=\frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=\frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

另一方面，由(2)知

$$\begin{aligned}\frac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}&\geqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\frac{t}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2}{4\sqrt{k}}\Bigg|_0^1\\&=\frac{1}{4\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{2}{4\sqrt{n}}(\sqrt{n+1}-1)=\frac{1}{2\sqrt{n}}(\sqrt{n+1}-1),\end{aligned}$$

且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}(\sqrt{n+1}-1)=\frac{1}{2}.$$

故由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}$.

友情提醒 本题是一道综合题，第(1)小题求的是 n 项和式当 $n\to\infty$ 时的极限，这类题目的