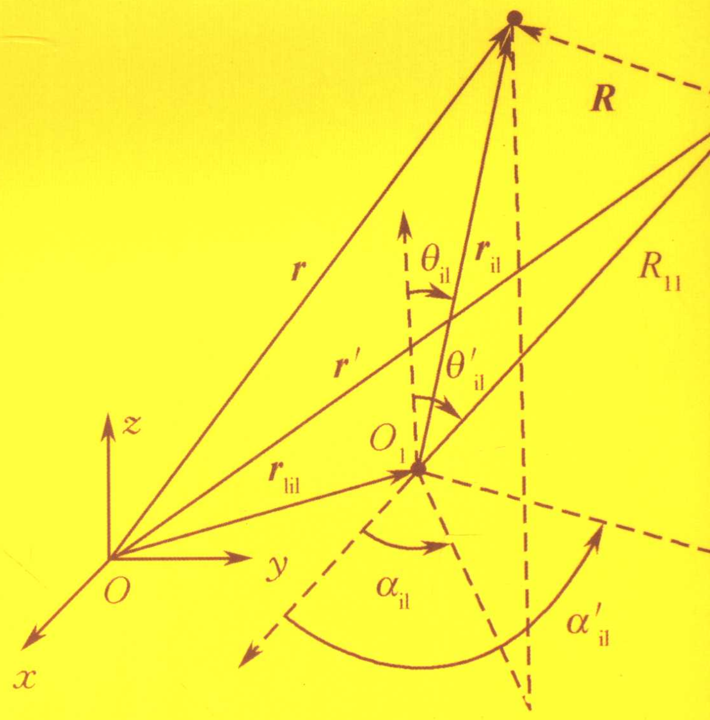
电磁场与波分析中半解析法的

理论方法与应用

盛剑霓 等 著



科学出版社
www.sciencep.com

电磁场与波分析中半解析法的理论方法与应用

盛剑霓等 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以电磁场和波为背景，全面介绍半解析法的理论基础、使用方法和实际应用，是2003年度教育部提名国家科学技术奖自然科学一等奖的项目“电磁场与波分析中半解析法的理论研究”的成果. 全书共9章，内容包括：绪论、半解析法的理论基础和方法、半解析法解三维恒定电场时的理论分析与应用、半解析法解恒定磁场时的理论分析与应用、半解析法解稳态涡流场的理论分析与应用、半解析法解导引波和谐振腔问题时的理论分析与应用、半解析法求解非线性恒定磁场、半解析法与有限元法或与边界元法的耦合求解、半解析法中矩阵方程的求解等.

本书可供电磁场与波分析计算领域中的广大科研工作者阅读，也可供力学、热力学和地球物理学等专业的科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与波分析中半解析法的理论方法与应用/盛剑霓等 著. —北京：科学出版社，2006

ISBN 7-03-017113-6

Ⅰ.电… Ⅱ.盛… Ⅲ.①电磁场-研究②电磁波-研究 Ⅳ.O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 030375 号

责任编辑：王志欣 张启男 杨 然/责任校对：张怡君

责任印制：安春生/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2006年8月第一次印刷 印张：18 3/4

印数：1—2 500 字数：349 000

定价：40.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

本书作者名单

盛剑霓　西安交通大学

马齐爽　北京航空航天大学

袁　斌　上海交通大学

郑勤红　云南师范大学

闫照文　北京航空航天大学

前　言

电磁现象的广泛性已为人们所熟知，而宏观电磁现象的基本规律已由 Maxwell 方程组或电磁场方程组描述．对电磁现象的认识，应分定性和定量两方面．很多具有普遍性的定性概念已包含在电磁场方程组中，而要建立具体电磁现象的定性概念，则往往需依赖于大量的定量计算；在定量计算时，完整数学模型的建立却又离不开定性的概念，所以定性概念和定量计算相辅相成，缺一不可．但从总体来说，定量计算应处于主导地位，所以计算已成为科学研究的重要内容之一，而且已发展为独立的科学计算分支．

回顾电磁场的解题史，基本上可分为解析法、模拟实验法、图解法、几何变换法、数值计算法和半解析法等．随着先进计算工具的问世，模拟实验法和图解法已属淘汰范围，几何变换法不能作为一种独立的计算方法．目前主要有解析法和数值计算法两大类．解析法中的分离变量法曾在历史上起过很重要的作用，但由于它需要特定的边界形状，因而在求解复杂电磁场问题中显得无能为力；数值计算法中主要有场域元法、边界元法和等效源法等三大方法．它们不能相互替代而起相互补充的作用．对于前两种方法，已进行了大量的理论及其应用研究；等效源法的应用面很广，但有很多问题得不到理论解释而计算精度又受使用者经验的约束，它尚缺乏系统的理论基础．另一方面，数值计算法相对于解析法虽有解题能力强的优点，但也有离散解缺乏通用性和预见性的缺点．因此，从 20 世纪 80 年代初期开始，人们对半解析法进行了研究．当时世界上约有七个科研小组进行了大同小异的研究，研究结果统称为广义多极技术．在该技术中，解函数由级数展开式表达，展开式中变量的起点即极点的位置和数量根据从大量计算中归纳出的一些原则确定，而这些原则只能凭经验实施；展开式中待定系数的确定应用点匹配法．由于多极技术缺乏系统的理论分析，存在下列问题：

(1) 三维场中解函数的极数展开式中，引入了多余的特种函数——第二类 Legendre 函数，增加了很多不必要的未知数；

(2) 解函数的级数展开式只适用于标量，不能计算以矢量磁位为计算变量的电磁场；

(3) 极点的位置和数量只能凭经验确定，所以计算效率不高，计算精度受到使用者经验的约束；

(4) 点匹配法虽有计算简单的优点，但由于级数收敛较快，边界上匹配点数不能取得很多，因此复杂边界上的边界条件得不到充分体现；

(5) 多极技术只能计算线性电磁场，而不能计算非线性场.

在此背景下，由西安交通大学盛剑霓教授主持和指导的科研小组从 20 世纪 90 年代初期开始，在国家自然科学基金的资助下，对半解析法的基本理论、实施方法及其应用进行了系统深入的研究. 本科研小组从积分方程和微分方程出发，分别采用不同的数学理论和物理原理，经过严格的推导和推理，提出了多极理论和新型等效源法，它们是半解析法理论体系中的核心和关键部分.

用多极理论和新型等效源法解题有下列优点：

(1) 应用它们可以推导出各类电磁场中解函数的级数展开式，而在三维场的展开式中不存在多余的第二类 Legendre 函数，达到了简化展开式和减少未知数的目的. 用两种方法推导出的展开式相同，说明该方法的正确性；

(2) 可以推导出以矢量磁位为计算量的轴对称场中解函数的级数展开式；结合二阶矢量位，还可以推导出三维矢量场的级数展开式. 填补了广义多极技术中的空白点；

(3) 应用多极理论和新型等效源法在理论的指导下总结出的确定极点的方法既方便又有效. 如在多极理论中对圆弧边界和球冠边界、内极和外极的位置可以唯一确定，因此，用它计算这类边界形状的场，具有使用方便、未知量少、级数收敛快和计算精度高的优点；又如用新型等效源法中等效源的作用中心的设置方法，有利于求解具有任意边界形状的场域，它也具有级数收敛快、计算精度高的优点. 它们克服了内极和外极设置的盲目性，为摆脱计算精度受使用者经验的约束攻克了难题；

(4) 引入了环形等效源，提高了轴对称场和具有轴对称三维场的计算效率，又将分域解、非线性场的处理思想引入到半解析法中，极大地扩大了半解析法的解题范围；

(5) 应用最小二乘法替代点匹配法确定级数展开式中的各个待定系数有误差便于控制、精度高的特点. 由于级数展开式中的基函数为本征函数，所以展开式有一致收敛性. 而级数的一致收敛性对级数能进行逐项求导数和求极值创造了极为有利的条件，所以用最小二乘法确定待定系数原则上并不困难，但在具体计算时，还得应用数值积分法和解代数方程的方法. 为了降低半解析法中系数矩阵的条件数，作者将小波分析引入到解代数方程组中，收到了良好效果；

(6) 开发出的半解析法和有限元法或和边界元法耦合，可发挥它们各自的优势；

(7) 实践证明，半解析法能有效地计算传输线、波导和谐振腔等三大微波器件中的特征参数.

不难看出，半解析法是级数展开式与新观点、新技术和数值计算技术的综合应用，所以它兼备了解析法和数值计算法的优点. 并可覆盖和替代广义多极技术和数

值计算法中的模拟源法(如模拟电荷法、模拟磁荷法和模拟电流法等)而与有限元法和边界元法组成当代的三大计算方法. 而且由于半解析法中的解函数具有可导性和光滑性,这方面比有限元法和边界元法更胜一筹.

上述内容系多项国家自然科学基金资助项目的研究成果. 这些成果既为半解析法创建了理论体系,也为其推广应用打下了基础. 科研小组内四位博士生是这些研究成果的生力军,他们做出了创造性成果,而且在博士后阶段甚至到工作单位后还做了大量的应用研究工作. 以获博士学位先后为序,他们分别为马齐爽博士、袁斌博士、郑勤红博士和闫照文博士. 他们对本研究成果的贡献大致归纳如下:马齐爽博士提出了以矢量磁位为变量的轴对称场中解函数的级数表达式,采用最小二乘法确定了级数展开式中的系数,计算了电场、涡流场时约束条件的引入及耦合法的改进和实施;袁斌博士提出了圆形和球形等效源法并找到了模拟电荷法和半解析法之间的内在联系;郑勤红博士提出了多极理论并通过二阶矢量位导出了轴对称和三维场中矢量磁位的级数展开式,还着重研究了该理论在高频领域中的应用;闫照文博士引入了环形源和计算浮动电极时的约束条件,提出了非线性场的计算,补充了耦合法并给出了小波分析在解稠密矩阵中的应用. 对本研究成果作出贡献的还有黄伟教授. 迄今为止,与这些研究成果有关的论文已在国内外发表了 60 多篇,经西安交通大学图书馆信息咨询部用 SCI 索引和 EI 索引检索,共有 51 篇论文被收录,其中有 17 篇被 SCI 收录. 此外,本成果获得了 2003 年度教育部提名国家科学技术奖自然科学一等奖.

由于各人的研究成果相互渗透,为了保证专著的编写具有系统性和逻辑性,我们采取了集体讨论、分头执笔和统一定稿的方式进行. 本专著重视理论分析和逻辑思维的作用,并体现定性、定量并重的写作原则,通过示例阐明理论联系实际的思维过程.

本专著在编写和出版过程中得到了西安交通大学电气工程学院和西安交通大学专著出版基金的资助及科学出版社的大力支持. 在此,向西安交通大学及科学出版社表示衷心感谢.

作者

2006 年 3 月

目　　录

第 1 章 绪 论

1.1 电磁场问题的解题方法概述

早在 1862～1865 年间由 Maxwell 综合了 Coulomb、Ampere 和 Faraday 等人的实验定律，提出了场的概念和假设了位移电流的存在，以数学语言为工具，总结出了 Maxwell 方程组或电磁场方程组. 他从中预见到电磁波的存在，后于 1887 年，由 Hertz 实验证明了预见的正确性以后，才确立了电磁场的理论体系. 电磁场理论一方面作为理论物理学的一个分支，在宏观电动力学的基础上，发展为相对论电动力学和量子电动力学，并试图建立物理学的统一场论；另一方面又作为工程电磁场的理论基础，致力于研究各类定解问题及逆问题的求解.

从历史上看，电磁场定解问题的求解方法很多，基本上有解析法、模拟实验法、图解法、几何变换法、数值计算法和半解析法等几大类. 随着时代的发展，先进计算工具的问世，模拟实验法和图解法已属淘汰范围；几何变换法不能作为一种独立的求解方法；解析法中的简化算法在定性分析中能发挥很多作用，其中分离变量法是一种系统的分析方法，但在解析解的范围内，它只能计算具有特定边界形状的边值问题，这远远满足不了工程实际的需要.

随着计算机的问世，大型电磁场问题的层出不穷，电磁场数值计算应运而生，其解题能力较解析法有了极大的提高. 自从 1971 年 Winslow、Chair 和 Silvester 等人把有限元法（FEM）用于电磁场计算以来，电磁场计算出现了一个重要的转折点，进入了电磁场数值计算时代. 描述客观电磁现象的数学形式有微分和积分两大类，相应的数值计算也有两大类：前者有有限差分法和有限元法，统称为场域元法；后者有边界元法、体积积分方程法和模拟电荷法等，实质上它们都属于等效源法，但习惯上，只把模拟电荷法（包括模拟磁荷法和模拟电流法等）称为等效源法或模拟源法. 前者的求解对象为场域中离散点上的函数值，而后者的求解对象则为离散单元中或节点上的等效源. 场域元法的解只能近似满足场方程及边界条件；而积分方程的解则近似满足边界条件，但能满足场的基本方程. 电磁场数值计算虽有众所周知的优点但也存在着共同的缺点：如计算量过大，即对计算机的资源要求过多；有时得不到稳定解；特别数值解只能获得离散解，对场的分布缺乏预见性；各种不同的数值计算方法还有一些自身的缺点.

半解析法兼有解析解和数值解的特点. 这种方法中的通解由相应的一系列本征函数或一组线性独立的完备基展开，通解中待定系数由数值法确定. 广义多极

技术属于半解析法的范畴，由于广义多极技术缺乏理论指导，极位置的设置基本上和模拟电荷法的思想相似，归纳出的设置规则来源于经验的总结. 某些规则明显不符合理论，计算精度又难以控制，而且广义多极技术中所用的级数展开式中包括了一些不必要的函数，且级数展开式只适用于标量场等缺点，因此该技术的解题范围受到了很大限制，计算精度又受到使用者经验的约束.

解析法与数值计算法中的场域元法和边界元法已有很多教授、专家和科技工作者进行过大量的分析和研究，提供了较为成熟的理论、众多的计算方法和计算技术，读者可参考有关文献和书籍.

本专著主要为半解析法建立理论体系，揭示它与等效源法和广义多极技术之间的内在联系；从理论上总结出富有操作性的实施方法；并研究它在电磁场分析和微波器件中的应用.

1.2 等效源法或模拟源法

以等效原理为基础发展起来的等效源法或模拟源法已成为门类众多的大型计算方法群，它与场域元法和边界元法一起构成了工程电磁场数值分析的三大方法，在高频领域及地球物理勘探中也已得到了广泛应用. 这里值得指出，边界元法和本节介绍的等效源法都利用了等效源的概念，但在两种方法中设置等效源的位置却有很大不同. 前者中的等效源位于场域的边界或不同介质的分界面上；而后者中的等效源却位于无效区域中.

等效源法的早期应用便是镜像法，该法能充分满足被替代分界面上的边界条件，所以实质上镜像法是一种解析解法，因而由镜像法计算的结果应是精确解(若不考虑由计算工具引起的误差). 大家熟悉的模拟电荷法是以位于无效区域中的模拟电荷等效边界面或分界面上出现的充电或极化电荷对场域的作用. 采用类似的思想求解磁场问题，则有模拟磁荷法和模拟电流法两种.

各种模拟源即等效源的形状应结合具体问题而有所不同，如有点源、面源、线状源、环状源和环带状源等多种，相应的表达式也就不同，它们分别用均匀介质中的基本解即 Green 函数表达，或用由 Green 函数的线积分或面积分表达. 等效源的形状、个数和位置等都需根据经验确定，这就意味着这种等效源法的计算精度要受到使用者经验的约束.

1.3 单极点法、多极点法和广义多极技术

单极点法、多极点法和广义多极技术中的解函数都由级数表达，如将级数解和等效源的思想结合起来，则可加深对级数解的理解. 早在 1959 年 Kennangh

利用这种思想计算了非球形几何形状电磁散射问题；在 1965 年，Mullin 用相似的观点求解了一个二维电磁散射问题. 他们都在每个无效区域内只用一个单一的等效源来等效场域的边界条件对该场域的作用，这种方法称为单极点法. 只用一个等效源等效整个场域边界，除了特殊情况外，计算精度很难保证. 使得该方法有突破性进展的便是在无效区域内引入更多的等效源. 1983 年，Hafner 首先提出在每个无效区域内采用多个等效源来等效边界条件对场域的作用，这种方法称为多极点（multiple multipole，MMP）法，即在每个极点上安置一个等效源. Hafner[1]的观点有效地将级数解法和模拟电荷法结合，提高了该法求解复杂问题的能力. 稍后，Nishimura 和 Takamatsu[2]等人用相同的思想求解时变场，也取得了较好的效果. 近些年来，MMP 法在二维静态和似稳电场、二维静态和似稳磁场、波导场和涡流场等计算方面已得到了应用. 20 世纪 80 年代以来，还有一些与 MMP 法相似的方法陆续由不同国家的一些小组（不少于 7 个）提出. 这些方法与 MMP 法一起，统称为广义多极技术（generalized multiple techniques，GMT).

近年才发展起来的电流等效源和并矢 Green 函数结合起来的积分解法在无损探伤领域内得到了广泛应用.

在 GMT 中，对同类问题获得了解函数的统一表达式，它由一组线性无关的完备基函数展开，也可用本征函数展开. 其待定系数基本上都用点匹配法确定. 点匹配法虽可简化系数阵中各元素的计算，但为了提高解的精度，应加密匹配点，这可能形成超定方程，而超定方程的解要比常规方程的解来得复杂. 此外，在 GMT 中，经过大量计算归纳出了一些使用规则，用来确定等效源的位置和数量，即极点的位置和数量. 在实际应用中，这些规则只能靠经验来实现，因而使得 GMT 的计算精度受到了使用者经验的约束. 再者，GMT 中的级数展开式只对标量场适用，实际问题中的矢量场又如何计算？GMT 可否求解非线性场等问题都有待解决.

1.4 半解析法-多极理论和新型等效源法

在国家自然科学基金的资助下，科研小组对半解析法进行了系统而深入的理论、方法及其应用研究.

用半解析法解题主要有三大任务：一为确定各种电磁场问题中解函数的级数展开式；二为确定该级数展开式中变量的计算起点，即极点的位置；另一个便是确定级数展开式中的待定系数.

本专著从两方面获得解函数的级数展开式：一方面从函数的展开定理出发，将积分方程经过严格的数学推导及处理，获得了不同场分布下解函数的级数展开

式；另一方面，从微分方程出发，应用等效原理和变量分离获得由某些变量分别和齐次边界条件或周期性条件或自然边界条件组成的本征值问题，从而得出了系列本征值和本征函数，将解函数用系列本征函数展开成无穷级数. 从上述两种方法中获得的表达式相同，这是理所当然的事，因为积分方程可从偏微分方程中推导出来，它们只是描述同一电磁场问题的两种不同形式，本质上等价. 根据推导过程从理论上提出了几条实施规则，可方便地确定各个极点的位置. 在实际计算中，将无穷级数截断成有限级数，其中待定系数根据给定的定解条件用最小二乘法确定，在实施时需应用数值计算法中的某些技术和方法.

1.4.1　多极理论

在应用展开定理的推导过程中，为了满足展开条件，必须引入一些辅助点，对圆弧边界或球冠边界来说，这些辅助点的位置可唯一确定，而这些辅助点相当于广义多极技术中的极点. 有的极点位于场域内部称为内极点，简称内极；有的极点位于场域外部称为外极点，简称外极. 任何电磁场问题中，内、外极点确定以后，解函数的级数展开式便可唯一确定. 在广义多极技术中，极点的位置凭经验确定，而在本专著中极点的位置必须满足展开条件，有理论依据. 此外，根据展开定理推导出的级数展开式较广义多极技术中使用的三维标量场的级数表达式简单，因而可减少大量未知数. 基于数学理论及严格的数学推导获得了上述突破性的进展，本专著称之为多极理论，以和广义多极技术有别.

1.4.2　新型等效源法

从本征值问题中所需的边界条件及等效原理的基本观点出发，推论出用圆形或球形分别将二维场或三维场中的无效区域分割成有限个虚拟边界，这些虚拟边界互不相交，而在这些虚拟边界上赋有和本征值问题相应的周期性或自然边界条件. 从等效原理的观点，认为由虚拟边界围成的区域内存放着等价于边界上定解条件对场域产生效应的部分等效源. 若场域位于虚拟边界以外，则该部分的等效源对场域的作用中心位于场域以外的虚拟区域的几何中心上；若场域被包围在虚拟边界以内，则相应等效源的作用中心位于场域内部的几何中心上. 它们分别相当于多极理论中的外极和内极. 本专著称这种方法为圆形或球形等效源法. 对于外边界为矩形或六面体的场域，本专著还提出了矩形或六面体等效源法. 将它们统称为新型等效源法. 新型等效源法覆盖了已有的等效源法，其中最常见的为模拟电荷法. 模拟电荷法中等效源的位置凭经验确定，而本专著提出的新型等效源法，其等效源作用中心的位置则可在理论指导下确定. 新型等效源法和模拟电荷法除了确定模拟源位置的方法不同以外，两者中的解函数表达式也有很大区别. 若将圆形等效源法中解函数的表达式和以线电荷为模拟电荷的模拟电荷法中的解

函数表达式对比一下，不难发现模拟电荷法的表达式中只取了前者表达式中的零次项，而且还失去了与内极相应的部分级数项．该部分级数项的丧失，大大地降低了模拟电荷法的计算精度.

1.5 本专著中半解析法的优点和特点

1.5.1 内极和外极的确定

在半解析法中，任何电磁场问题中的解函数都用级数展开式表达，而在该级数中的变量 r 表示源点和场点之间的距离，因此确定源点的位置是应用半解析法解题的又一个关键问题，这里的“源点”便是指内极或外极．在广义多极技术和模拟电荷（磁荷或电流）法中，内极或外极凭经验确定，但在本专著中则根据提出的多极理论或新型等效源法中总结出的规则确定．前者是根据场域的边界形状确定，而后者根据分割无效区域中的虚拟圆（或球）形确定．这两种确定规则都有理论依据，所以本专著中内极或外极的确定较广义多极技术或模拟电荷法中的要合理得多、有效得多.

1.5.2 解函数中级数展开式的获得

在本专著中，将对应于内极和外极的级数展开式分开表示，因此在解题时，只要内极和外极确定以后，解函数的通解便可方便地确定；不仅如此，由于本专著根据展开定理和本征值问题中的边界形状，可以非常自然地排除一些不必要的函数，如可排除第二类 Legendre 函数，但在广义多极技术中仍然保留了第二类 Legendre 函数，因为在那里对于任意形状的边界问题，事先无法把它排除．所以在本专著中所用的级数展开式较广义多极技术中的简练，因而减少了大量的求解未知数.

本专著中还推导出了轴对称场和三维场中以矢量磁位为计算量的级数展开式，又引进了电荷（或电流）作为均匀分布或不均匀分布的环形等效源，提高了计算轴对称场或具有轴对称结构三维场的计算效率．本专著还推导了矩形和正六面体等效源的级数展开式，用它们计算矩形或六面体外边界内的场域时，较用圆形或球形等效源有更高的计算精度或有更高的计算效率.

1.5.3 新方法和新思想的引用

在本专著的半解析法中，确定级数展开式中的待定系数以及解题方法等方面尽可能地引用了数值计算方法中采用过的新方法和新思想：如用最小二乘法确定待定系数，而最小二乘法是控制误差最为有效的方法；在解题方法方面引入了分域解、双标量法、非线性问题的处理以及耦合法等，因此，拓宽了半解析法的解

题思路，提高了解题能力. 再者，在引用这些方法的同时，又发挥了半解析法中解函数的可导性和光滑性的特点，获得了一些在数值计算方法中不可能获得的优点.

1.5.4 半解析法在高频领域中的应用

本专著将半解析法应用于传输线、波导和谐振腔等三大微波器件的特征参数的计算中. 推导出了用级数展开式中的系数确定传输线的特性阻抗和部分电容的计算公式；还推导出了波导、谐振腔中场分量的级数展开式，它们为特性阻抗、部分电容、截止频率和谐振频率的计算奠定了基础. 应用示例表明，半解析法计算这些参数是一个有效的计算方法. 以上内容都填补了资料的空白.

1.5.5 计算精度

在本专著的各章中都计算了一些应用示例，将它们的计算结果和理论解、数值计算方法、反演法、扰动法或模拟测量值等所得的结果进行了对比. 数据表明，用半解析法解题较用模拟电荷法的计算精度高得多；而和边界元法或 B 样条有限元法的结果接近，但相对来说本专著的结果还是更接近于理论解，而且半解析法中所用的未知量也要少得多.

总之，半解析法的解题范围十分广泛，不仅可解单连域中的场，还可解多连域中的场；不仅可解单一介质中的场，还可解分区均匀介质中的场；不仅可解标量解，还可解三维和轴对称矢量场；不仅可解线性场，还可解非线性场；不仅可解 Laplace 场，还可解 Poisson 场和 Helmholtz 场. 半解析法的计算精度相当高，且误差便于控制.

由于级数展开式中各项之间的数值相差很大，所以形成的系数矩阵的条件数较大，因此，对解矩阵方程时所用的代数方法的稳定性要求较高. 本专著提出用小波分析计算半解析法中形成的矩阵方程，收到了很好的效果.