

数学名著译丛

数学的发现

——对解题的理解、研究和讲授

〔美〕乔治·波利亚 著
刘景麟 曹之江 邹清莲 译



科学出版社

www.sciencep.com

数学名著译丛

数学的发现

——对解题的理解、研究和讲授

[美]乔治·波利亚 著

刘景麟 曹之江 邹清莲 译

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要讲解思考方法,思维路线,小到眼前怎样解题,大到如何做学问,怎样发现创造数学里的新命题.作者试图通过一些简单典型的例子,找到它们共同的特征,提炼出思考所遵循的路径,引导读者学习如何去思考问题,分析问题,同时也提供了相当丰富的习题让读者亲自实践.

本书适合大、中学校学生和数学教师,数学科学、思维科学研究人员阅读参考.

Mathematical Discovery by G. Polya

Copyright © 1981 by John Wiley & Sons, Inc

All Right Reserved. Authorized translation from the English language edition published by John Wiley & Sons, Inc.

图字: 01-2005-2027

图书在版编目(CIP)数据

数学的发现:对解题的理解、研究和讲授/(美)乔治·波利亚著;
刘景麟,曹之江,邹清莲译. —北京:科学出版社,2006
(数学名著译丛)

ISBN 7-03-016880-1

I. 数… II. ①波…②刘…③曹…④邹… III. 数学-普及读物 IV. O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 009889 号

责任编辑:吕虹 张扬/责任校对:张琪

责任印制:安春生/封面设计:王浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006年7月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2006年7月第一次印刷 印张:15 3/4

印数:1—4 000 字数:400 000

定价:40.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

译者的话

乔治·波利亚(George Polya, 1887—1985)是一位杰出的数学家,出生于匈牙利,青年时期于布达佩斯、维也纳、格廷根、巴黎等地攻读数学、物理、哲学,1912年于布达佩斯大学获哲学博士学位,1914年进入苏黎世著名的瑞士联邦理工学院任教.1940年他移居美国,自1942年起一直为美国斯坦福大学教授.

波利亚在数学的广阔领域里有极为精深的研究,发表过200多篇研究论文和许多专著.他不仅是一位数学家,而且也是一位优秀的教育家.他热心教育,十分重视从小培养学生的解题能力.在他的经历中,始终把高深的数学研究与数学的普及教育结合在一起,不倦地为改进数学教学而努力.在这一方面,他写过的文章和著作也很多,其中最著名的是,《怎样解题》、《数学与合情推理》(I、II卷)、《数学的发现》(一、二卷).上述著作出版后受到广泛的欢迎和推崇,在美国曾风靡一时,尔后又又被翻译成世界上多种文字,被评价为二次大战后出现的经典性著作.

我们在这里向读者介绍的是《数学的发现》(一、二卷).

也许人们会想,这大概是一本介绍许多新奇而有趣的数学知识的书.诚然,它包含有不少有趣的数学内容,但是,从整体来讲,正如本书副标题所示,它主要不是一本传授知识的书,而是一本讲解方法的书.

任何学问都包括知识的积累和能力的训练两个方面,按作者的看法,在数学上,能力的训练比起单纯的知识的堆积要重要得多.传授现成的知识,也许要容易些,但是要在大量种类繁多的数学问题中,找出它们共同的特征,提炼出一种思考所遵循的途径和方法,则要艰巨得多.本书的目的,就是试图教会读者如何去思考和剖析问题,激发起读者内在的能动性和创造精神,学会数学的思维方法,从根本上来提高你的数学素养.

作者把解题看作是人类的最富有特征性的活动。而这种活动——如同游泳或弹钢琴，也是一种本领。学习这种本领，同学习任何其他本领一样，其必由之路乃是模仿和实践。学习，首先就是模仿，而模仿则必须要有榜样。模仿是为了实践，而实践又必须具备机会。本书的全部内容，概括地说，就是为读者学习数学的方法提供模仿的榜样和实践的机会。

在本书的各章中，作者通过对各种类型生动而有趣的典型问题（有些是非数学的）进行细致剖析，提出它们的本质特征，从而总结出各种数学模型。作者以平易浅显的语言，应用启发式的叙述方法，讲述了有高度数学概括性的原理，使得各种水平的读者，都获益匪浅。这种以简驭繁，寓华于朴，平易而生动的讲授，充分反映了一位教育大师的风格特征。

本书各章末尾的习题与评注，是正文的延续，它们都是经过作者的精心选择安排，与正文紧密关联的不可分割的部分。这些练习，为读者提供了一个进行创造性工作的极好机会，它将激起你的好胜心和主动精神，并使你品尝到数学工作的乐趣。这种机会，对于一个立志要学好数学的读者，或者想切实提高自己数学教学水平的教师来讲，是十分可贵和难得的。这部分习题和评注，不应看成是正文的附庸，相反地，从某种意义上讲，它也许是本书中更为重要的部分。任何读者，只有实践了这一部分内容之后，才能真正领略到本书的价值。

对于浅尝辄止、不图深入的人来说，本书的有些部分也许会使他感到“容易”，而有的题目，他又会认为太“艰深”了。对于勤于思考的读者来讲，可能就不是这种看法。这也许是一本易读的书，也许不是一本易读的书，这个问题让我们留给读者自己去品味吧。

波利亚的三本经典著作——《怎样解题》（1944）、《数学与合情推理》（1954）和《数学的发现》（1962, 1965）已全部译成中文。当年波利亚写这套书的一个直接动机就是想改善当时美国中学教师的培训，从而提高中学的数学教学水平。半个世纪以来，美国数学会和很多大学合作一直在暑期以这套书为基本材料开办各种研讨

班,培训社区大学和中学的数学教师,对有关人员的业务和教学、科研水平的提高起了很大作用.今天对我们来讲,波利亚当年面对的问题也同样存在,而且由于应试教育的顽固和大学教育迅猛发展师资准备不足,问题更显严重,唯愿这些书的出版,会有助于改善目前数学教学和学习的现状.

本书翻译于1979年,1980年,1981年曾由内蒙古人民出版社发行,已售罄多年.科学出版社决定将此书再版,我们遂根据原书最新版对旧译作做了修订.由于水平有限,错误与不妥之处一定不少,诚恳希望读者给予批评指正.

译者

2004年4月

第一卷序言

一个解法称为是完善的,如果我们从一开始就能预见甚至证明,沿着这个方法做下去,就一定能达到我们的目的.

《莱布尼兹文集》,pp. 161

1. 解一个问题就是意味着从困难中去找出一条越过障碍的路,使我们能够达到一个不易即时达到的目标. 解题是智力的特殊成就,而智力乃是人类的天赋,因此解题可以认为是人的最富有特征性的活动. 本书的目的就是去了解这一活动,提供方法去讲述它,从而最终使得读者提高解题的能力.

2. 本书包括两个部分,让我简要地介绍一下这两部分的主题.

解题是一种本领,就像游泳、滑雪、弹钢琴一样,你只能够靠模仿和实践才能学到它. 本书不能给你提供一把可以打开一切门户、解决所有问题的魔钥匙,但是它却给你提出了许多可供模仿的例子和供你实际练习的机会. 如果你想学会游泳,你必须得跳进水里去. 同样的,如果你想成为一个善于解题的人,你就必须得去实地解题.

假如你想要从解题中得到最大的收获,你就应当在所做的题目中去找出它的特征,这些特征在你以后去求解其他的问题时,能起到指引的作用. 一种解题的方法,它若是经过你自己的努力得到的,或者是从别人那里学来或听来的,只要经过了你自己的体验,那么它对你来讲就可以成为一种楷模,当你在碰见别的类似的问题时,它就是可供你仿照的模型. 本书第一部分的目的,就是使你熟悉为数不多的几个有用的模型.

仿照某个问题的解法,去解一个十分类似的问题,当然是件容

易的事。但是假若问题并不十分类似，那么这个模仿就会变得很困难甚至于不可能了。人们常常有一个根深蒂固的念头：希望能找到一种威力无边的方法，它能够去解出所有的问题。这个念头在我们许多人的心目中，也许是不明确的，但是在一些神话故事或一些哲学家的著作里，它却是表露得十分明白的。你也许还记得能打开一切门户的魔咒的故事吧，笛卡儿曾冥思苦想过一种解一切问题的万能方法，还有莱布尼兹，也曾明白地叙述过他的完善的方法的思想。然而这个万能的完善的方法的探求，比起那个能点石成金的点金石的探求来，并没有取得更多一点的成绩。伟大的梦毕竟还是梦。但是从另一个方面来说，这些不能到达的理想仍然可以影响、指引着人们：没有人能到达北斗星，但是人们望着它却找到了正确的方向。本书当然不可能向你提供（也永远不可能有什么书能向你提供）一个万能的完善的解题方法，但即使朝这个不可及理想迈上几小步也会让你心智大开，解题能力有所改进，第二部分便是概述这样的几步。

3. 我想把本书试图进行的研究（即解题的手段与方法的研究）说成是“启发式”的。启发式一词，过去曾被术士们用过，现在一则是被遗忘了，一则是名声不好。但是我并不忌讳它。

在大多数的场合，本书实际上都是在进行通达的启发式的讲解：我总是用各种办法去启导读者做题并且让他思索出用来解题的手段和方法。

下面各章的大部分内容，将对为数不多的若干例题进行充分的示范讲解。对于一个不惯说教的数学家来说，这样的写法也许是过于冗繁了。然而实际上，我们所讲述的，不仅仅限于解法，而且还讲述了解法的“病历”。所谓“病历”，就是这个解法所借以发现的一些实质性步骤，以及导致这些步骤的动机和想法的一种叙述。对一个特例之所以要进行这样周密的描述，目的就是为了从中提出一般的方法或模型，这种模型，在以后类似的情况下，对于读者求解问题，可以起指引的作用。这样一种从具体实例中抽出来的方法或模型的明确表述，我常常把它放在单独的一节里，虽然

它的第一次猜测性的叙述也许在讲述“病历”的枝节片断中已经出现过了。

在每一章的后面都附有习题与评注。读者在做这些习题的时候，就可以得到一个去应用、澄清并扩大本章课文中所讲述的内容的好机会。评注分散在习题的中间，它常常给出模型的推广、某些技巧、某些细微之处，或一些枝节上的说明。

我不能肯定这样写会收到多大的效果，但我当尽力而为，以取得读者的合作。我尝试着将我在课堂教学里行之有效的讲授风格移注到本书的扉页中去。由于讲述了解法的“病历”，我想读者可以借以熟悉一下研究的气氛。通过习题的选择、叙述与安排（叙述和安排是更为重要的，它们花去了比我预先想像的要多得多的时间），我试图向读者提出挑战（你有没有勇气去解出它们），激起他们的好胜心和主动精神，并给他们提供充分的机会去面对多种多样的研究场合。

4. 本书大部分篇幅是处理纯数学问题，非数学的问题提得很少，它们常常出现在问题的背景里，实际上，我还是对它们进行了仔细的考虑，只要可能，我总是把数学问题讲到那种程度，使得读者在弄清楚数学问题的同时，也弄明白了非数学的问题。

本书大部分篇幅是讨论初等数学问题，高等数学问题虽然很少提到，但实际上它却是我去收集素材的指引。本书的材料主要源自我自己的研究工作，我对许多初等数学问题的处理方法，反映了我在处理高等数学问题（它们不可能列入本书）时得到的经验。

5. 本书除了理论上的目的——启发式的研究之外，尚有一个具体的、紧迫的实际目的，即改进中学数学教师的培训。

由于最近几年我都在给中学数学教师们讲课，这就使得我有很好的机会去观察他们的培训工作，并形成了自己的看法。我想我是一个比较客观的观察者，作为这样一个观察者，我只有一个意见：中学数学教师的培训情况是很不佳的。而对这一点所有主管单位都不能推卸责任。尤其是教育他们的学校和学院里的数学系，假若他们想改变现状的话，就应该认真地修改一下他们的教育

内容.

学院应当给未来的中学教师提供些什么课程呢？我们无法恰当地来回答这个问题，除非我们先回答另一个与此相关的问题：中学应当给他们的学生教些什么？

但是这个问题是不会有有什么结果的，因为对它的争议太大了，似乎不可能取得一致的回答。这是不幸的。但尽管如此，我想在问题的一个方面，专家们还是可以取得一致意见的。

任何学问都包括知识和能力这两个方面。假如你真正具有数学工作（无论是初等或是高等水平的）的经验的话，那么你会毫不迟疑地说，在数学里，能力比起单单具有一些知识来，要重要得多。因此在中学里，如同其他各级学校一样，我们应当在授予学生一定数量知识的同时，还应教会他们一定的解决问题的能力。

在数学里，能力指的是什么？就是解决问题的才智——我们这里所指的问题，不仅仅是常规的，还包括那些要求有某种程度的独立见解、判断力、能动性和创造精神的问题。因此中学数学教学首要的任务就是加强解题的训练。这是我的见解，当然你也许不全与我一致，但我想你至少会同意解题训练应当受到重视这一点——这也就行了。

教师应当了解他该拿什么去教学生，他应该教给学生如何去解题——但倘若他自己也并不了解，那么他如何去教他们呢？教师应当发扬学生的才智和推理的能力；他应当发觉并鼓励学生的创造性——但是现在问题就在于他自己所修的课程并没有充分考虑他能否熟练掌握所学的东西，更不用说去提高他的才智、他的推理能力、解题能力和创造精神了。这一点，据我看来是当前数学教师培训中最大的缺陷。

为弥补这一缺陷，教师的课程里应当列入有适当水平的创造性工作。我试图通过指导一个解题的研讨班来为这类工作提供机会，本书就包含有我为我的研讨班所收集的材料以及应用它的指南，见“给教师及教师的教师的提示”。我希望这将有助于数学教师的培养，无论如何，这是本书的实际目的。

我相信对所提到的这两个目的——理论方面的和实际方面的——经常的关心将使我写好这本书。我也相信在将要阅读本书的各种各样读者的各种不同的兴趣之间,不会存在冲突(有的对一般的解题,有的对提高自己的能力,还有的则对提高他们学生的能力感兴趣),某一类读者关心的东西,对另一类读者来讲可能也是很重要的。

6. 本书是早些时候我写过的另两本书的继续,即《怎样解题》和《数学与合情推理》,后者又分为两卷,各有单独的书名,第一卷是《数学中的归纳和类比》,第二卷是《合情推理模式》,这几本书的内容互相补充但没有实质性的重复。在一本书里讨论过的题目,也许在另一本书里会重新出现,但用的是另外的例子,另一种叙述,并且从不同的角度去处理。因此这几本书先读哪一本后读哪一本都可以。

为了方便读者,我们将把这三本书加以比较并把对应的章节列在本书第二卷末尾的索引里。

7. 在书的第二部分尚未完成的时候就将第一部分发表也许是冒险的(有一句德国谚语:“不要把盖了一半的房子让傻子看见”),这个风险并不是不足道的,但是出于对本书前面提到的实际目的的考虑,我决定不再耽搁本卷的出版。

第一卷包括本书的第一部分(模型)和第二部分(通向一般方法)的第5、6章。

第一部分4章所收集的问题要比后面各章广泛得多。实际上,第一部分在很多方面同作者与舍贵(G. Szegő)合作的《分析中的习题与定理》(见文献目录)是类似的。但也有明显的差别:本卷提出的问题大多是比较初等的,并且对问题也不仅仅限于提示,而作了许多明确的陈述与讨论。

第二部分的第6章是受了哈尔特柯夫(W. Hartkopf)最近著作(见文献目录)的影响,我把他的最动人的一些部分加上适当的例子和附注在这里介绍,这部分内容十分符合我的启发式的想法。

8. 本书原稿的准备工作得到大学数学教学计划委员会福特

基金会基金资助,在此表示我的感谢,同时也感谢委员会对此工作道义上的支持.感谢《温哥华与维多利亚教育学院教育杂志》主编允许本书使用其中一篇文章的部分,也感谢加利福尼亚州圣塔克拉拉 G. Alexanderson 教授和瑞士苏黎世 A. Aepli 教授对书中证明的有效校正.

乔治·波利亚

瑞士苏黎世

1961年12月

第二卷序言

现在这本第二卷试图按计划将第一卷序言中指出的那些目标付诸实现.

第二卷原稿的准备工作得到大学数学教学计划委员会以国家自然科学基金资助,在此表示我对委员会支持和鼓励的感谢,也感谢出版社殷切的帮助和细致的排印.

谨以此书最后一章献给 C. Loewner,在他 70 寿辰之际,我在此再次向他表示深深的敬意和友好的感情.

乔治·波利亚

瑞士苏黎世

1964 年 10 月

修订版序言

这是本书第一次印刷的重印,只有少数改动.增加了一个附录,其中有附解答的 35 个习题,补充到本书两卷的各章,习题标号指明了它们该插进的地方.

乔治·波利亚
斯坦福大学
1967 年 6 月

合订版序言

我对 G. Alexanderson, P. Hilton, D. Logothetti 和 J. Pedersen 的友善表示诚挚的谢意,为了本书以单卷的形式出版,他们付出了很多宝贵的时间.

乔治·波利亚
加利福尼亚,帕罗阿尔托
1980年11月

寄言中学教师

我不打算把这本书写成一本教科书，一本可以像大多数通常那样用的、在初等的水平上按部就班循序讲授的书，而是写进了一系列有趣的、值得为之付出精力的问题，表述方式则追求重视话题的自然发展和启发学生们提出更多自己的问题。

我希望的是中学教师们能把本书当作一本参考书按以下步骤工作：

1. 在目录或索引里查询准备对学生讲授的话题。
2. 研究书里关于该话题的展开与问题。
3. 尽量参照书中第 14 章所讲的“教师十诫”设计一个适合学生的计划。
4. 实行这个计划。
5. 评价一下学生取得的进步，要把学生学习更多数学的热情也评价进来。

对读者的提示

第 2 章第 5 节在引述时简记为 § 2.5, 第 2 章第 5 节第 3 小节则简写为 § 2.5(3), 第 3 章的习题 61 简写为习题 3.61.

HSI 和 MPR 是作者写的两本书《How to Solve It》(怎样解题, 中译本, 科学出版社, 1981) 和《Mathematics and Plausible Reasoning》(数学与合情推理, 中译本书名为《数学与猜想》, 第一卷《数学中的归纳与类比》, 第二卷《合情推理模式》, 科学出版社, 1984) 的缩写, 它们在本书中经常被引用.

$*$, 符号 $*$ 是一些习题、评注、节和更短的段落的前缀, 在这些习题、评注、节和段里要求的知识超过了初等数学范围(见下段). 然而对于非常短的这类段落就不用这个前缀.

本书的大部分内容仅要求初等数学知识, 也就是说, 像平常程度较好的中学里所教的几何、代数、坐标作图及(有时候)三角等内容.

本书中所列习题很少需要用到中学数学以外的知识, 但是从难度上来讲, 则往往略高于中学的水平. 对于一部分习题, 解答是完全给出的(虽然叙述得很简要), 对另外一些习题, 则仅仅给出解答的几步, 有时候只是一个结果.

对有些习题的提示(它可以使解法简化)用括弧列在习题的后面. 一个习题附近的题常常也可以作为它的提示. 在有的章里特别要注意写在习题(或一组习题)前面的几行引言.

读者若在解一个题时花了很多精力, 那他肯定会从中得到不少收获, 即使他并没有把题解出来. 当花了精力仍然没有解出题时, 这时他可以看一下解答的一部分, 从中找到有用的东西, 然后把书放在一边, 自己再去做出解答的其余部分.

当读者在已经解完了一个题, 或者是看完它的解答, 或者是读完解的“病历”的时候, 能够去细细揣摩一下解的方法, 那是最好不