高等院校经济管理学科
数学基础系列教材　/主　编　刘书田

线性代数

主　编　卢　刚
编著者　卢　刚　冯翠莲

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等院校经济管理学科
数学基础系列教材／主编　刘书田

线性代数

主　编　卢　刚
编著者　卢　刚　冯翠莲

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/卢刚,冯翠莲编著.—北京:北京大学出版社,2006.6
(高等院校经济管理学科数学基础系列教材)
ISBN 7-301-10581-9

Ⅰ.线… Ⅱ.①卢… ②冯… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 016716 号

书　　　名:线性代数
著作责任者:卢　刚　冯翠莲　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-10581-9/O·0685
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京大学印刷厂
经　销　者:新华书店
787mm×960mm　16 开本　15 印张　336 千字
2006 年 6 月第 1 版　　2006 年 6 月第 1 次印刷
印　　　数:0001—4000 册
定　　　价:24.00 元

内 容 简 介

本书是根据教育部本科“经济数学基础”教学大纲编写的高等学校经济和管理本科各专业数学基础课“线性代数”课程的教材。全书共分为五章，内容包括矩阵的概念与运算，n 阶矩阵的行列式，线性方程组，矩阵的特征值与特征向量，二次型等。本书除了按节选配了较为丰富的基本习题外，作为一章内容的总结，在每章后还精选了涉及各节相关内容的综合题和证明题，以加强学生对全章内容的理解和掌握。书后附有习题答案与提示，可供教师和学生在学习时参考。

考虑到线性代数中的许多内容比较抽象，不易理解和掌握，结合作者多年从事教学工作的经验和体会，本书在基本概念的引入和叙述上，注重深入浅出和语言的通俗易懂，以及具体和抽象的过渡与联系，使学生对基本概念的理解清晰准确。对于例题和习题的选配，既考虑到学生对于基本概念的理解和基本方法使用的训练，又注意到对于学生解题思路的培养。本书注重各章内容之间的内在联系，强调学生在掌握线性代数基本内容的同时，体会数学的思维方法，训练和培养自己分析问题和解决问题的能力，为今后做好本职工作做好准备。

本书除了适合高等学校经济和管理本科各专业学生使用外，在内容安排上，还考虑到经管类学生将来考研的需要，因而也适合考研学生复习之用。

高等院校经济管理学科数学基础系列教材书目

微积分	刘书田等编著	定价 32.00 元
线性代数	卢　刚等编著	定价 24.00 元
概率论与数理统计	李博纳等编著	定价 28.00 元
微积分解题方法与技巧	刘书田等编著	定价 25.00 元
线性代数解题方法与技巧	卢　刚等编著	定价 22.00 元
概率论与数理统计解题方法与技巧	张立卓等编著	定价 22.00 元
高等数学解题方法与技巧	胡京兴等编著	定价 25.00 元

前　言

当前，我国高等教育蓬勃发展，教育改革不断深入，高等院校经济管理学科数学基础课的教学理念、教学内容及教材建设也孕育在这种变革之中。为适应高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革的总目标，培养具有创新能力的高素质人才，我们应北京大学出版社的邀请，经统一策划、集体讨论，并分工编写了这套《高等院校经济管理学科数学基础系列教材》，其中包括：《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》。

本套教材参照教育部本科《经济数学基础教学大纲》，按照"加强基础、培养能力、重视应用"的指导方针，为培养"厚基础、宽口径、高素质"的人才，力求实现基础性、应用性、前瞻性的和谐与统一，集中体现了编写者长期讲授经济管理学科数学基础课所积累的成功教学经验，反映了当前本科数学基础课的教学理念和教学内容的改革趋势。具体体现在以下几个方面：

1. 精心构建教材内容。本教材在内容选择方面，既考虑了数学的科学性、系统性、逻辑性，又汲取了国内外优秀教材的优点，对传统的教学内容在结构和内容上作了适当的调整，更紧密了各章内容之间的内在联系，注意了数学基础课与相关专业课的联系，为后续课程打好坚实的基础。

2. 按照认知规律，以几何直观、经济解释或典型例题作为引入数学基本概念的切入点；对重要概念、重要定理、难点内容从多侧面以辩证思维进行剖析，讲透它们的本质涵义，便于学生理解。教材叙述深入浅出、通俗易懂，行文严谨、逻辑性强，富有启发性，便于教学与自学。

3. 强调基础训练和基本能力的培养。紧密结合概念、定理和运算法则配置丰富的例题，并剖析一些综合性例题。按节配有适量习题，每章配有总习题，书末附有答案与提示，便于读者参考。

4. 注重学以致用，特别是经济与管理领域中的应用。通过分析具有典型意义的经济应用例题和配置多样化习题，以培养学生应用数学知识分析和解决实际问题的能力。

5. 为使学生更好地掌握教材的内容，提高分析和解决问题能力，我们编写了配套的辅导教材：《微积分解题方法与技巧》、《线性代数解题方法与技巧》、《概率论与数理统计解题方法与技巧》。教材与辅导教材相辅相成，同步使用。该辅导教材按题型特点着重讲

授解题思路、解题方法和解题技巧，可作为参加考研学生的一本无师自通的复习指导书。

本套教材在编写过程中，同行专家和教授提出了许多宝贵的建议，在此一并致谢！

参加本书编写工作的还有孙惠玲副教授。

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正。

编　者

2006 年 3 月

目　　录

第一章　行　列　式

§1.1　矩阵的概念

一、引例

在我们的生活和工作中，经常会用到并处理各种各样的表格，如：

例 1　已知甲、乙、丙、丁 4 名学生的 3 门课程 A,B,C 的期末考试成绩表如表 1.1 所示.

表 1.1　期末考试成绩表(满分为 100 分)

	A	B	C
甲	92	88	91
乙	78	84	76
丙	90	93	96
丁	65	74	77

这个表格，可以更简单地表示为下面的形式：

$$\begin{bmatrix} 92 & 88 & 91 \\ 78 & 84 & 76 \\ 90 & 93 & 96 \\ 65 & 74 & 77 \end{bmatrix},$$

并称这个矩形的数表为一个 4 行 3 列或 4×3 的矩阵.

例 2　有三个炼油厂以原油作为主要原料，生产燃料油、柴油和汽油. 已知它们用一吨原油生产上述三种油品的数量如表 1.2 所示. 表中的这些数据可以排列成为一个 3 行 3 列

表　1.2

	第一炼油厂	第二炼油厂	第三炼油厂
燃料油	0.762	0.476	0.286
柴　油	0.190	0.476	0.381
汽　油	0.286	0.381	0.571

或 3×3 的矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0.762 & 0.476 & 0.286 \\ 0.190 & 0.476 & 0.381 \\ 0.286 & 0.381 & 0.571 \end{bmatrix}.$$

对于这种表格的处理(称之为矩阵的运算),将在第二章详细讨论.

二、矩阵的概念

通过上面的两个例子,现在我们可以引入一般意义上的矩阵的概念了.考虑到线性代数中的很多问题(例如方程或方程组的解等),在不同的数集范围内讨论,可能得到不同的结论.为此,需要先给出数域的概念.

定义 1 设 $\mathbf{F}$ 是由一些数组成的集合,其中包含 0 和 1.如果 $\mathbf{F}$ 中的任意两个数(这两个数可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 $\mathbf{F}$ 中的数,则称 $\mathbf{F}$ 是一个**数域**.

由定义 1 可知:全体整数组成的集合不是数域.因为任意两个整数的商(除数不为零)不一定还是整数.而全体有理数组成的集合 $\mathbf{Q}$,全体实数组成的集合 $\mathbf{R}$ 和全体复数组成的集合 $\mathbf{C}$,都是数域.分别称它们为**有理数域**,**实数域**和**复数域**.

必须指出的是:除了 $\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 以外,还有很多其他的数域.我们看下面的例子.

例 3 考虑利用有理数域 $\mathbf{Q}$ 定义的数集:$Q(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$.

由于 $0,1\in\mathbf{Q}$,故 $0=0+0\sqrt{3}\in Q(\sqrt{3})$,$1=1+0\sqrt{3}\in Q(\sqrt{3})$;

又设 $\alpha,\beta\in Q(\sqrt{3})$,其中 $\alpha=a+b\sqrt{3}$,$\beta=c+d\sqrt{3}$,则有

$$\alpha\pm\beta=(a+b\sqrt{3})\pm(c+d\sqrt{3})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{3}\in Q(\sqrt{3});$$

$$\alpha\beta=(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})=(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}\in Q(\sqrt{3}).$$

当 $\beta=c+d\sqrt{3}\neq 0$ 时,c,d 必不全为零.此时可推出 $c-d\sqrt{3}\neq 0$.否则,有 $c=d\sqrt{3}$,于是 $d\neq 0$,从而 $\frac{c}{d}=\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$,矛盾.因此有

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+b\sqrt{3}}{c+d\sqrt{3}}=\frac{(a+b\sqrt{3})(c-d\sqrt{3})}{(c+d\sqrt{3})(c-d\sqrt{3})}$$

$$=\frac{ac-3bd}{c^2-3d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-3d^2}\sqrt{3}\in Q(\sqrt{3}).$$

由上述证明可知:$Q(\sqrt{3})$是一个数域.

在本书中主要涉及的数域是实数域 $\mathbf{R}$.因此,如果没有特别说明的话,各章所涉及的数均为实数.如果是指任意数域,则用 $\mathbf{F}$ 表示.

定义 2 由数域 $\mathbf{F}$ 中的 $m\times n$ 个数排成的一个 m 行 n 列的数表,称为数域 $\mathbf{F}$ 上的一个 $m\times n$ **矩阵**,其中的每一个数称为这个矩阵的**元素**,并称位于第 i 行和第 j 列交叉点上的元素为该矩阵的(i,j)**元**.

通常,用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵.一个 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$,也可以记做 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.并将 $\boldsymbol{A}$ 的(i,j)元记做 $\boldsymbol{A}(i;j)$.如果 $\boldsymbol{A}(i;j)=a_{ij}$,则可将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

或简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

元素全为零的 $m\times n$ 矩阵，称为**零矩阵**，记做 $O_{m\times n}$. 在明确行、列数的情况下，也可以简记为 O.

特别地，当矩阵 A 的行数 m 与列数 n 相同时，则称 A 为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**. 而一阶矩阵就是一个数.

n 阶矩阵在矩阵中的地位既特殊又重要. 下面我们先介绍几种特殊的 n 阶矩阵.

1. 对角矩阵

形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的 n 阶矩阵，称为**对角矩阵**，其中 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 位于矩阵的“主对角线”(从左上角到右下角)，称它们为主对角线上的元素. 而矩阵中主对角线以外的元素全为零.

上述对角矩阵也简记做

$$\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}).$$

2. 数量矩阵

当对角矩阵中，主对角线上的元素都相同时，称 $\mathrm{diag}(a,a,\cdots,a)$ 为**数量矩阵**. 特别是当 $a=1$ 时，称 n 阶数量矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

为**单位矩阵**，并且将其记做 I_n 或 I.

3. 上三角形矩阵与下三角形矩阵

形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad 与 \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的 n 阶矩阵分别称为**上三角形矩阵**与**下三角形矩阵**. 前者主对角线左下方的元素全为零，后者主对角线右上方的元素全为零. 显然，对角矩阵既是上三角形矩阵也是下三角形矩阵.

4. 对称矩阵与反对称矩阵

如果 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素 a_{ij} 满足：$a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为 n 阶**对称**

矩阵. 例如

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

就是一个 3 阶对称矩阵.

如果 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$的元素 a_{ij}满足：$a_{ij}=-a_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为 n 阶**反对称矩阵**. 此时 A 的主对角线上的元素 a_{ii}，也应满足 $a_{ii}=-a_{ii}$，从而 $a_{ii}=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 例如

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

就是一个 3 阶反对称矩阵.

对于 n 阶矩阵，有一种重要的计算，就是 n 阶矩阵的行列式的计算. 在下一节，我们将讨论 n 阶行列式的概念和计算.

§1.2 n 阶矩阵的行列式

一、2 阶行列式

考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}$$

其中 a_{11},a_{21}不全为零；a_{12},a_{22}不全为零. 将第一个方程和第二个方程的两边分别乘以 a_{22}和 a_{12}，再相减，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$

再将第一个方程和第二个方程的两边分别乘以 a_{21}和 a_{11}，再相减，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则由上两式得到方程组的唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

为了记忆方便，我们引入记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{def}} {}^{①} ad - bc,$$

称之为 2 阶矩阵$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$的**行列式**. 从而上述解中,分母即为**系数矩阵** $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$**的行列式**：$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. 而两个分子,则可以分别记做 $|\boldsymbol{B}_1|=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ 和 $|\boldsymbol{B}_2|=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$. 显然,$|\boldsymbol{B}_1|$ 和 $|\boldsymbol{B}_2|$ 是分别将系数行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的第一列和第二列换成常数项后,所得到的行列式.

由上述结果可以得到下列命题：

命题 1 若二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$,则方程组有唯一解,并且其解可以表为：

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{B}_1|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$x_2 = \frac{|\boldsymbol{B}_2|}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

例 1 利用命题 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 = -1. \end{cases}$$

解 线性方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2\times(-3) - 1\times 4 = -10 \neq 0,$$

故由命题 1 知：线性方程组有唯一解. 又

$$|\boldsymbol{B}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2\times(-3) - 1\times(-1) = -5,$$

$$|\boldsymbol{B}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2\times(-1) - 2\times 4 = -10,$$

① 符号“$\xlongequal{\text{def}}$”表示“定义为”. 以后不再重复说明.

从而方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{|\boldsymbol{B}_1|}{|\boldsymbol{A}|} = \dfrac{-5}{-10} = \dfrac{1}{2}, \\ x_2 = \dfrac{|\boldsymbol{B}_2|}{|\boldsymbol{A}|} = \dfrac{-10}{-10} = 1. \end{cases}$$

对于由 n 个方程,n 个未知数构成的 n 元线性方程组,是否也有类似的结论呢?答案是肯定的,但这需要引入 n 阶行列式的概念.

二、n 阶行列式的定义

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,称下列符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行列式**,记做 $|\boldsymbol{A}|$,或 $\det\boldsymbol{A}$,或简记为 $|a_{ij}|_n$.

为了给出 n 阶行列式的定义,需先介绍元素的余子式和代数余子式的概念.

定义 1 在 n 阶行列式(1)中,将元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素全部划去,由剩下的 $(n-1)^2$ 个元素,按原来的顺序组成的 $n-1$ 阶行列式,称之为 a_{ij} 的**余子式**,记做 M_{ij};再令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,称 A_{ij} 为 a_{ij} 的**代数余子式**.

例 2 设 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix},$$

求第 1 行元素的余子式和第 3 列元素的代数余子式.

解 由题目要求,即分别计算 M_{11}, M_{12}, M_{13} 和 A_{13}, A_{23}, A_{33}.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 14, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 10, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

下面给出 n 阶行列式的递推定义.