主 编 杨 霞
副主编 王文波 马晓燕 崔 兵

全日制"专升本"考试直通车

高等数学

全面夯实基础内容
逐题讲授解题技巧
高效堵塞丢分漏洞
经典透彻剖析考点

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

全日制“专升本”考试直通车

高等数学

主　编　杨　霞
副主编　王文波　马晓燕　崔　兵

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/杨　霞　主编
武汉:华中科技大学出版社,2005年10月
ISBN 7-5609-3326-2

Ⅰ. 高…
Ⅱ. ①杨…　②王…　③马…　④崔…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. O13

全日制"专升本"考试直通车
高等数学

杨　霞　主编
王文波　马晓燕　崔　兵　副主编

策划编辑:李东明　　封面设计:魏少雄
责任编辑:叶见欣
责任校对:刘　飞　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:华大图文设计室
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:787×960　1/16　印张:23.5　字数:434 000
版次:2005年10月第1版　印次:2005年10月第1次印刷　定价:28.00元
ISBN 7-5609-3326-2/O·341

内容简介

本书是在充分分析了全日制非计算机专业“专升本”考试大纲的基础上编写的。本书采用让读者边“学”边“练”的形式，对其中的知识重点和要点进行了精讲细练。帮助考生进行行之有效的复习巩固，以便在短时间内适应考试，突破大关。

书中各章节的安排与最新的考试大纲相吻合。涉及的主要内容有：函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程。

本书各章设有知识结构剖析、知识精髓、例题分析、即学即练、单元测试试题和参考答案六个板块。“知识结构剖析”，用框架的形式将本章中的要点归纳总结，考生可以在短时间内形成一个知识体系，提高复习效率并突破难关。“知识精髓”，根据最新考试大纲将要点、重点等一一归纳出来，详尽讲解。“例题分析”，选取各省往年经典试题进行详细、透彻的分析，其中每个例题都具有一定代表性。“即学即练”和“单元测试”，通过适当的训练，让考生更快掌握知识的重点和要点，从而有效地查漏补缺，达到举一反三的效果。另外，书末还给出了多套全真综合模拟测试题，均是“专升本”考试指导老师的经验总结，经过近几年的实践，这些模拟题已经成为针对性极强的经典题目，深受考生欢迎。

丛书编委会

目　录

第1章　函数、极限与连续

知识结构剖析

- 函数、极限与连续
  - 函数的定义
    - 一元函数的概念
    - 函数的特性
    - 反函数和复合函数
    - 函数的四则运算
    - 初等函数
  - 函数的极限
    - 数列极限的定义
    - 函数极限的定义
    - 极限的性质
    - 极限的运算法则与极限的存在准则
    - 两个重要极限
  - 函数的连续性
    - 函数连续性的定义与间断点
    - 连续函数的性质

1.1 函数的定义

1.1.1 一元函数的概念

1.1.1.1 实数与数轴

有理数是可以表示为分式$\frac{p}{q}$的数，无理数是不能表示为分式$\frac{p}{q}$的数，其中，p，q都是整数，且$q\neq 0$。

因为分数都可以用有穷小数或无穷循环小数表示，而有穷小数或无穷循环小数也可以用分数表示，所以，有理数可以表示为有穷小数或无穷循环小数。无理数则为无穷不循环小数。

有理数和无理数统称为实数。全体实数所组成的集合称为实数集。

1.1.1.2 实数的绝对值及其基本性质

定义1.1.1 设x是一个实数，则x的绝对值记为$|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0。\end{cases}$$

绝对值$|x|$的几何意义是：$|x|$表示点x到原点O的距离（不论x在原点的左边还是右边）；而$|x-y|$则表示点x与点y之间的距离。

设x,y为任意实数，则绝对值有如下一些基本性质。

性质1.1.1 $|x|\geqslant 0$。

性质1.1.2 $|-x|=|x|$。

性质1.1.3 $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$。

性质1.1.4 $|x|-|y|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|$。

性质1.1.5 $|xy|=|x||y|$。

性质1.1.6 $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$。

1.1.1.3 区间与邻域

设a,b为实数，且$a<b$，则区间的定义如下。

(1) 开区间 满足不等式$a<x<b$的所有实数x的集合，称为以a,b为端点的开区间，记作(a,b)，即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$。

(2) 闭区间 满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的所有实数x的集合，称为以a,b为端点的闭区间，记作$[a,b]$，即$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$。

(3) 半开半闭区间 满足不等式$a<x\leqslant b$或$a\leqslant x<b$的所有实数x的集合,称为以a,b为端点的半开半闭区间,记作$(a,b]$或$[a,b)$,即$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$,或$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$。

以上三类为有限区间,a,b分别称为区间的左、右端点,$b-a$称为区间的长度。此外,还有如下几类无限区间。

(4) $(a,+\infty)=\{x|a<x\}$,$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$。

(5) $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$,$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$。

(6) $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$,即全体实数的集合。

当考虑由某点附近的点构成的集合时,常用邻域来表示。

设$\delta>0$,称$O_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$为$x_0$的$\delta$邻域,其中,$x_0$称为$O_\delta(x_0)$的中心点;$\delta$称为$O_\delta(x_0)$的半径。

$$O_\delta(x_0)\backslash\{x_0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta),$$

称为x_0的$O_\delta(x_0)$去心邻域。其中,$(x_0-\delta,x_0)$称为x_0的左邻域;$(x_0,x_0+\delta)$称为x_0的右邻域。

对于无穷远点∞的邻域,它的表示及含义为:设$M>0$,称$O_M(\infty)=\{x||x|>M\}=(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$为$\infty$点的$M$邻域,其中,$(-\infty,-M)$是$\infty$的左邻域;$(M,+\infty)$是$\infty$的右邻域。

1.1.1.4 一元函数的概念

首先了解一下变量。所谓变量就是指在某一过程中不断变化的量。比如,时间,某种产品的产量、成本和利润,运动物体的速度等都是变量。而在某一过程中始终保持不变的量,称为常量。

现在用集合的形式给出一元函数(只有一个自变量)的定义。

定义1.1.2 设D是一个非空实数集合,如果有一个对应规则f,使每一个$x\in D$,都有一个确定的实数y与之对应,则称这个对应规则f为定义在D上的一个函数关系,或称变量y是变量x的函数。记作

$$y=f(x),\quad x\in D。$$

x称为自变量,y称为因变量。集合D称为函数的定义域,通常记作$D(f)$。

$x_0\in D(f)$所对应的y值,记作y_0,或$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$,称为当$x=x_0$时函数$y=f(x)$的函数值。

全体函数值的集合$\{y|y=f(x),x\in D(f)\}$,称为函数$y=f(x)$的值域,记作Z或$Z(f)$。

由定义1.1.2知,确定一个函数$y=f(x)$需要两个要素,即函数定义域$D(f)$和对应规则f。

若两个函数相同,则其定义域和对应规则都相同。

例1 $x>y$ 能否构成一个函数关系？

解 这个式子不能构成一个函数关系。因为对于每一个 x，可以有无穷多个 y 与之对应。而函数定义中的对应规则要求，对于每一个 x 值，只有一个确定的 y 值与之对应。$x>y$ 不符合函数定义，所以不是函数关系。

例2 $y=\arcsin(3+2x^2)$ 能否构成一个函数关系？

解 这个式子也不能构成一个函数关系。因为对于任何实数 x，都没有按对应规则与之对应的 y 值。函数的定义域不能为空集，因此，该式子也不能构成函数关系。

例3 比较 $y=2x$ 与 $y=\sqrt{4x^2}$，说明它们是不是相同的函数关系。

解 $y=2x$ 与 $y=\sqrt{4x^2}$ 都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数关系。即它们的定义域相同，但对应规则却不同，函数 $y=\sqrt{4x^2}$ 实际上相当于

$$y=\begin{cases} 2x, & x\geqslant 0, \\ -2x, & x<0, \end{cases}$$

显然和 $y=2x$ 的对应规则不同，所以它们不是相同的函数关系。

1.1.1.5 函数表示法

函数的表示法一般有三种：公式法，表格法和图形法。

下面分别各举一个例子来说明。

例4 $y=\dfrac{2}{3x(x-1)}+\sqrt{9-x^2}$。

这里用公式表达 y 与 x 的关系，它的定义域为

$$D=[-3,0)\cup(0,1)\cup(1,3]。$$

例5 某城市一年每月玩具的零售量，如表1-1所示。

表1-1 玩具销售一览表 （单位：个）

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 s	8 100	8 400	4 500	4 800	3 900	6 000	9 000	8 500	7 300	9 330	8 640	9 464

表1-1表示了某城市玩具零售量 s 随月份 t 而变化的函数关系。这个函数关系是用表格表达的，它的定义域是

$$D=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}。$$

值域为
$$Z=\{8\,100,8\,400,4\,500,4\,800,3\,900,6\,000,9\,000,8\,500,7\,300,9\,330,8\,640,9\,464\}。$$

例6 某气象站用温度自动记录仪记录某地的气温变化情况，设某天24 h的气温变化曲线如图1-1所示。

图1-1所示的曲线描述了一天中的温度T随时间t变化的规律。其定义域为[0,24]，值域为[15,32]。

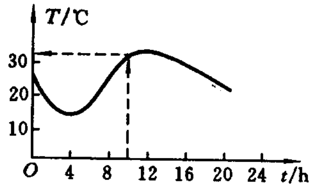

图1-1　温度变化表

这种用图形表示函数的方法称为图形法。

在用公式法表示函数时，有些函数，对于其定义域内自变量x的不同值，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为“分段函数”。

例如，

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}\quad y=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0,\end{cases}$$

都是定义在$(-\infty,+\infty)$上的分段函数。

注释　分段函数的定义域是其各段定义域的并集；分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数。

例7　用分段函数表示函数

$$y=4-|x-2|。$$

解　根据绝对值定义可知，

当$x-2<0$，即$x<2$时，$|x-2|=-(x-2)$。

当$x-2\geqslant 0$，即$x\geqslant 2$时，$|x-2|=(x-2)$。

因此，有
$$y=\begin{cases}4+(x-2), & x<2,\\ 4-(x-2), & x\geqslant 2。\end{cases}$$

即
$$y=\begin{cases}x+2, & x<2,\\ 6-x, & x\geqslant 2。\end{cases}$$

1.1.2　函数的特性

1.1.2.1　函数的奇偶性

定义1.1.3　设函数$y=f(x)$在一个关于原点对称的实数集合D内有定义。

(i) 如果对于所有的$x\in D$(此时必有$-x\in D$)，有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数。

(ii) 如果对于所有的$x\in D$(此时必有$-x\in D$)，有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数。

从定义1.1.3易知，奇函数的图像关于原点对称，而偶函数的图像关于y轴对称。

例如，$y=x^4+1$为偶函数，$y=x^3$为奇函数，$y=\sin x$为奇函数，$y=\cos x$为偶

函数，$y=0$ 既是奇函数又是偶函数，$y=x^3+1$ 既不是奇函数也不是偶函数。

例 8 判断下列函数的奇偶性。

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$。

(2) $g(x)=\begin{cases}3-e^{-2x}, & x\leqslant 0,\\ e^{2x}-3, & x>0。\end{cases}$

解 (1) $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\left[\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right]$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)。$$

所以，$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数。

(2) 因为 $g(-x)=\begin{cases}3-e^{2x}, & -x\leqslant 0\\ e^{-2x}-3, & -x>0\end{cases}=\begin{cases}3-e^{2x}, & x\geqslant 0\\ e^{-2x}-3, & x<0\end{cases}=-g(x)$。

所以，函数 $g(x)$ 为奇函数。

1.1.2.2 函数的单调性

定义 1.1.4 设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数，若对于 D 中任意两个数 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有：

(i) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 D 上单调递增函数；特别当总成立严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 时，称 $f(x)$ 为 D 上严格单调递增函数。

(ii) $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 D 上单调递减函数；特别当总成立严格不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 时，称 $f(x)$ 为 D 上严格单调递减函数。

单调递增和单调递减函数统称为单调函数，严格单调递增和严格单调递减函数则统称为严格单调函数。

例 9 证明函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格单调递增的。

证 设 $x_1<x_2$，因为

$$\begin{aligned}x_1^3-x_2^3&=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\\&=(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right],\end{aligned}$$

故当 $x_1<x_2$ 时，$x_1^3-x_2^3<0$，即 $x_1^3<x_2^3$，所以函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格单调递增的。

例 10 判断函数 $f(x)=3x^2+2$ 的单调性。

解 对于任意的 $x_1<x_2$，有

$$f(x_1)-f(x_2)=3(x_1^2-x_2^2)=3(x_1+x_2)(x_1-x_2)。$$

当 $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ 时，$3(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0$，因此有 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，所以在此区间函数 $y=3x^2+2$ 是单调递增的。