

主 编 杨 霞  
副主编 王文波 马晓燕 崔 兵

# 全日制“专升本” 考试直通车

## 高等数学

全面夯实基础内容  
逐题讲授解题技巧  
高效堵塞丢分漏洞  
经典透彻剖析考点



华中科技大学出版社  
<http://www.hustp.com>

全日制“专升本”考试直通车

# 高等数学

主 编 杨 霞

副主编 王文波 马晓燕 崔 兵

华中科技大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

**高等数学/杨 霞 主编**

武汉:华中科技大学出版社,2005年10月

ISBN 7-5609-3326-2

I. 高…

II. ①杨… ②王… ③马… ④崔…

III. 高等数学-高等学校-教材

IV. O13

全日制“专升本”考试直通车  
**高等数学**

杨 霞 主 编  
王文波 马晓燕 崔 兵 副主编

策划编辑:李东明

封面设计:魏少雄

责任编辑:叶见欣

责任校对:刘 飞

责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山

邮编:430074

电话:(027)87557437

录 排:华大图文设计室

印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:787×960 1/16

印张:23.5

字数:434 000

版次:2005年10月第1版

印次:2005年10月第1次印刷

定价:28.00元

ISBN 7-5609-3326-2/O·341

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

## 内 容 简 介

本书是在充分分析了全日制非计算机专业“专升本”考试大纲的基础上编写的。本书采用让读者边“学”边“练”的形式,对其中的知识重点和要点进行了精讲细练。帮助考生进行行之有效的复习巩固,以便在短时间内适应考试,突破大关。

书中各章节的安排与最新的考试大纲相吻合。涉及的主要内容有:函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程。

本书各章设有知识结构剖析、知识精髓、例题分析、即学即练、单元测试试题和参考答案六个板块。“知识结构剖析”,用框架的形式将本章中的要点归纳总结,考生可以在短时间内形成一个知识体系,提高复习效率并突破难关。“知识精髓”,根据最新考试大纲将要点、重点等一一归纳出来,详尽讲解。“例题分析”,选取各省往年经典试题进行详细、透彻的分析,其中每个例题都具有一定代表性。“即学即练”和“单元测试”,通过适当的训练,让考生更快掌握知识的重点和要点,从而有效地查漏补缺,达到举一反三的效果。另外,书末还给出了多套全真综合模拟测试题,均是“专升本”考试指导老师的经验总结,经过近几年的实践,这些模拟题已经成为针对性极强的经典题目,深受考生欢迎。

## 丛书编委会

主 编 杨 霞  
副主编 张凯 崔 兵 袁毅阳  
编 委 朱晓燕 李 琼 彭淑芬 陈 凯  
王鹏飞 韩 玉 王文波 马晓燕  
王 丽 安菁菁 刘玉梅 安瑞吉

# 目 录

|                             |      |
|-----------------------------|------|
| 第1章 函数、极限与连续 .....          | (1)  |
| 【知识结构剖析】 .....              | (1)  |
| 1.1 函数的定义 .....             | (2)  |
| 1.1.1 一元函数的概念 .....         | (2)  |
| 1.1.2 函数的特性 .....           | (5)  |
| 1.1.3 反函数和复合函数 .....        | (7)  |
| 1.1.4 函数的四则运算 .....         | (9)  |
| 1.1.5 初等函数 .....            | (10) |
| 【例题分析】 .....                | (11) |
| 【即学即练】 .....                | (14) |
| 1.2 函数的极限 .....             | (16) |
| 1.2.1 数列极限的定义 .....         | (16) |
| 1.2.2 函数极限的定义 .....         | (18) |
| 1.2.3 极限的性质 .....           | (22) |
| 1.2.4 极限的运算法则与极限的存在准则 ..... | (23) |
| 1.2.5 两个重要极限 .....          | (25) |
| 【例题分析】 .....                | (28) |
| 【即学即练】 .....                | (31) |
| 1.3 函数的连续性 .....            | (33) |
| 1.3.1 函数连续性的定义与间断点 .....    | (33) |
| 1.3.2 连续函数的性质 .....         | (36) |
| 【例题分析】 .....                | (38) |
| 【即学即练】 .....                | (40) |
| 单元测试试题(1) .....             | (41) |
| 单元测试试题(2) .....             | (43) |
| 第2章 一元函数微分学 .....           | (45) |
| 【知识结构剖析】 .....              | (45) |
| 2.1 导数与微分 .....             | (46) |
| 2.1.1 导数的概念 .....           | (46) |
| 2.1.2 求导法则 .....            | (50) |

|       |                            |       |
|-------|----------------------------|-------|
| 2.1.3 | 隐函数的导数和由参数方程确定的函数的导数 ..... | (54)  |
| 2.1.4 | 函数的微分 .....                | (56)  |
|       | 【例题分析】 .....               | (59)  |
|       | 【即学即练】 .....               | (63)  |
| 2.2   | 中值定理与洛必达法则 .....           | (64)  |
| 2.2.1 | 微分中值定理 .....               | (64)  |
| 2.2.2 | 洛必达法则 .....                | (68)  |
| 2.2.3 | 泰勒公式 .....                 | (72)  |
|       | 【例题分析】 .....               | (74)  |
|       | 【即学即练】 .....               | (77)  |
| 2.3   | 函数的极值与最大、最小值 .....         | (77)  |
| 2.3.1 | 函数单调性与凸性的判别方法 .....        | (77)  |
| 2.3.2 | 函数的极值及其求法 .....            | (80)  |
| 2.3.3 | 函数的最大值和最小值 .....           | (82)  |
|       | 【例题分析】 .....               | (83)  |
|       | 【即学即练】 .....               | (85)  |
| 2.4   | 曲线的曲率 .....                | (85)  |
| 2.4.1 | 平面曲线的曲率概念 .....            | (85)  |
| 2.4.2 | 曲率的计算公式 .....              | (86)  |
|       | 【例题分析】 .....               | (87)  |
|       | 【即学即练】 .....               | (87)  |
|       | 单元测试试题(1) .....            | (87)  |
|       | 单元测试试题(2) .....            | (89)  |
| 第3章   | 一元函数积分学 .....              | (91)  |
|       | 【知识结构剖析】 .....             | (91)  |
| 3.1   | 不定积分的概念及积分方法 .....         | (92)  |
| 3.1.1 | 不定积分的概念、性质及基本积分公式 .....    | (92)  |
| 3.1.2 | 不定积分的换元积分法及分部积分法 .....     | (95)  |
| 3.1.3 | 有理函数的不定积分 .....            | (103) |
|       | 【例题分析】 .....               | (106) |
|       | 【即学即练】 .....               | (107) |
| 3.2   | 定积分的概念及积分方法 .....          | (108) |
| 3.2.1 | 定积分的定义及性质 .....            | (108) |
| 3.2.2 | 变上限函数的积分及其导数 .....         | (111) |
| 3.2.3 | 牛顿-莱布尼兹公式 .....            | (113) |

|                        |       |
|------------------------|-------|
| 3.2.4 定积分的换元积分法及分部积分法  | (114) |
| 【例题分析】                 | (116) |
| 【即学即练】                 | (119) |
| 3.3 定积分的应用和广义积分        | (120) |
| 3.3.1 定积分的几何应用         | (120) |
| 3.3.2 定积分的物理应用         | (124) |
| 3.3.3 广义积分             | (125) |
| 【例题分析】                 | (128) |
| 【即学即练】                 | (129) |
| 单元测试试题(1)              | (129) |
| 单元测试试题(2)              | (131) |
| 第4章 向量代数与空间解析几何        | (133) |
| 【知识结构剖析】               | (133) |
| 4.1 向量及其运算             | (134) |
| 4.1.1 空间直角坐标系和向量概念及其表示 | (134) |
| 4.1.2 向量的加法运算          | (136) |
| 4.1.3 向量的数量积           | (137) |
| 4.1.4 向量的向量积           | (138) |
| 4.1.5 向量的外积和混合积        | (145) |
| 【例题分析】                 | (149) |
| 【即学即练】                 | (151) |
| 4.2 平面与直线              | (151) |
| 4.2.1 平面               | (151) |
| 4.2.2 直线的方程            | (158) |
| 【例题分析】                 | (171) |
| 【即学即练】                 | (173) |
| 4.3 曲面与曲线              | (174) |
| 4.3.1 柱面与旋转曲面          | (174) |
| 4.3.2 二次曲面             | (176) |
| 4.3.3 空间曲线及其方程         | (177) |
| 【例题分析】                 | (178) |
| 【即学即练】                 | (179) |
| 单元测试试题(1)              | (179) |
| 单元测试试题(2)              | (181) |
| 第5章 多元函数微分学            | (183) |

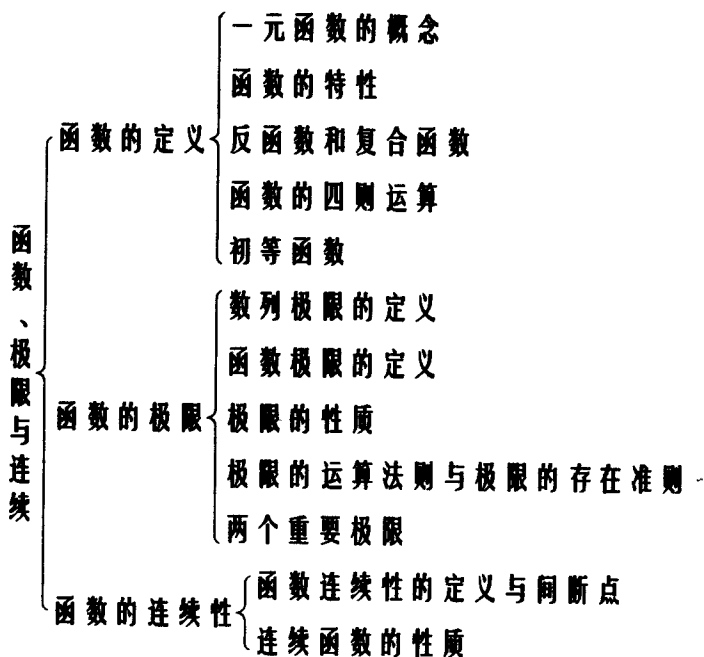
|                             |       |
|-----------------------------|-------|
| 【知识结构剖析】                    | (183) |
| 5.1 多元函数的基本概念               | (184) |
| 5.1.1 多元函数的定义               | (184) |
| 5.1.2 $R^n$ 中的线性运算、距离及重要子集类 | (185) |
| 5.1.3 二元函数的极限               | (186) |
| 5.1.4 二元函数的连续性              | (188) |
| 【例题分析】                      | (188) |
| 【即学即练】                      | (190) |
| 5.2 偏导数和全微分                 | (190) |
| 5.2.1 偏导数                   | (190) |
| 5.2.2 高阶偏导数                 | (192) |
| 5.2.3 全微分                   | (193) |
| 【例题分析】                      | (195) |
| 【即学即练】                      | (196) |
| 5.3 复合函数的偏导数及隐函数的求导公式       | (197) |
| 5.3.1 复合函数的求导法则             | (197) |
| 5.3.2 隐函数的求导公式              | (198) |
| 【例题分析】                      | (200) |
| 【即学即练】                      | (202) |
| 5.4 方向导数与梯度                 | (202) |
| 5.4.1 方向导数                  | (202) |
| 5.4.2 梯度                    | (203) |
| 【例题分析】                      | (204) |
| 【即学即练】                      | (204) |
| 5.5 多元微分学的几何应用              | (204) |
| 5.5.1 空间曲线的切线与法平面           | (204) |
| 5.5.2 空间曲面的切平面与法线           | (207) |
| 【例题分析】                      | (209) |
| 【即学即练】                      | (210) |
| 5.6 多元函数的极值                 | (211) |
| 5.6.1 极大、极小值与最大、最小值         | (211) |
| 5.6.2 条件极值与拉格朗日乘数法          | (214) |
| 【例题分析】                      | (217) |
| 【即学即练】                      | (220) |
| 单元测试题(1)                    | (221) |

|                                    |       |
|------------------------------------|-------|
| 单元测试试题(2) .....                    | (222) |
| <b>第6章 多元函数积分学</b> .....           | (224) |
| <b>【知识结构剖析】</b> .....              | (224) |
| 6.1 二重积分和三重积分 .....                | (225) |
| 6.1.1 二重积分的概念和性质 .....             | (225) |
| 6.1.2 利用直角坐标和极坐标计算二重积分 .....       | (227) |
| 6.1.3 直角坐标、柱面坐标和球面坐标下三重积分的计算 ..... | (236) |
| <b>【例题分析】</b> .....                | (239) |
| <b>【即学即练】</b> .....                | (242) |
| 6.2 重积分、曲线积分和曲面积分的应用 .....         | (243) |
| 6.2.1 重积分的应用 .....                 | (243) |
| 6.2.2 第一类曲线积分和第一类曲面积分 .....        | (245) |
| 6.2.3 第二类曲线积分 .....                | (249) |
| <b>【例题分析】</b> .....                | (253) |
| <b>【即学即练】</b> .....                | (256) |
| 单元测试试题(1) .....                    | (257) |
| 单元测试试题(2) .....                    | (258) |
| <b>第7章 无穷级数</b> .....              | (260) |
| <b>【知识结构剖析】</b> .....              | (260) |
| 7.1 常数项级数 .....                    | (261) |
| 7.1.1 常数项级数的概念 .....               | (261) |
| 7.1.2 无穷级数的基本性质 .....              | (263) |
| <b>【例题分析】</b> .....                | (265) |
| <b>【即学即练】</b> .....                | (266) |
| 7.2 常数项级数的判别法 .....                | (267) |
| 7.2.1 正项级数及其收敛性 .....              | (267) |
| 7.2.2 绝对收敛与条件收敛 .....              | (272) |
| <b>【例题分析】</b> .....                | (276) |
| <b>【即学即练】</b> .....                | (278) |
| 7.3 幂级数与函数的幂级数展开式及其应用 .....        | (280) |
| 7.3.1 幂级数及其收敛性 .....               | (280) |
| 7.3.2 幂级数的运算与性质 .....              | (283) |
| 7.3.3 函数的泰勒级数 .....                | (287) |
| 7.3.4 函数的幂级数展开式的应用 .....           | (288) |
| <b>【例题分析】</b> .....                | (295) |

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| 【即学即练】 .....                  | (298) |
| 7.4 傅里叶多项式与傅里叶级数 .....        | (299) |
| 7.4.1 傅里叶多项式 .....            | (299) |
| 7.4.2 傅里叶级数及其收敛性 .....        | (301) |
| 7.4.3 一般周期函数的傅里叶级数 .....      | (302) |
| 【例题分析】 .....                  | (303) |
| 【即学即练】 .....                  | (303) |
| 单元测试试题(1) .....               | (304) |
| 单元测试试题(2) .....               | (306) |
| 第8章 常微分方程 .....               | (308) |
| 【知识结构剖析】 .....                | (308) |
| 8.1 一阶线性微分方程 .....            | (309) |
| 8.1.1 微分方程的基本概念 .....         | (309) |
| 8.1.2 可分离变量的微分方程与齐次微分方程 ..... | (310) |
| 8.1.3 一阶线性微分方程及其求解 .....      | (315) |
| 【例题分析】 .....                  | (319) |
| 【即学即练】 .....                  | (320) |
| 8.2 二阶微分方程 .....              | (321) |
| 8.2.1 可降阶的二阶微分方程 .....        | (321) |
| 8.2.2 二阶常系数线性微分方程 .....       | (325) |
| 【例题分析】 .....                  | (330) |
| 【即学即练】 .....                  | (331) |
| 单元测试试题(1) .....               | (332) |
| 单元测试试题(2) .....               | (333) |
| 全真综合模拟测试题(1~5) .....          | (335) |
| 全书试题参考答案 .....                | (349) |
| 后记 .....                      | (365) |

# 第1章 函数、极限与连续

## 知识结构剖析



## 1.1 函数的定义

### 1.1.1 一元函数的概念

#### 1.1.1.1 实数与数轴

有理数是可以表示为分式 $\frac{p}{q}$ 的数,无理数是不能表示为分式 $\frac{p}{q}$ 的数,其中, $p$ , $q$ 都是整数,且 $q \neq 0$ 。

因为分数都可以用有穷小数或无穷循环小数表示,而有穷小数或无穷循环小数也可以用分数表示,所以,有理数可以表示为有穷小数或无穷循环小数。无理数则为无穷不循环小数。

有理数和无理数统称为实数。全体实数所组成的集合称为实数集。

#### 1.1.1.2 实数的绝对值及其基本性质

定义 1.1.1 设 $x$ 是一个实数,则 $x$ 的绝对值记为 $|x|$ ,定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

绝对值 $|x|$ 的几何意义是: $|x|$ 表示点 $x$ 到原点 $O$ 的距离(不论 $x$ 在原点的左边还是右边);而 $|x-y|$ 则表示点 $x$ 与点 $y$ 之间的距离。

设 $x, y$ 为任意实数,则绝对值有如下一些基本性质。

性质 1.1.1  $|x| \geq 0$ 。

性质 1.1.2  $|-x| = |x|$ 。

性质 1.1.3  $-|x| \leq x \leq |x|$ 。

性质 1.1.4  $|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ 。

性质 1.1.5  $|xy| = |x| |y|$ 。

性质 1.1.6  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ 。

#### 1.1.1.3 区间与邻域

设 $a, b$ 为实数,且 $a < b$ ,则区间的定义如下。

(1) 开区间 满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 $x$ 的集合,称为以 $a, b$ 为端点的开区间,记作 $(a, b)$ ,即 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ 。

(2) 闭区间 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数 $x$ 的集合,称为以 $a, b$ 为端点的闭区间,记作 $[a, b]$ ,即 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ 。

(3) 半开半闭区间 满足不等式  $a < x \leq b$  或  $a \leq x < b$  的所有实数  $x$  的集合, 称为以  $a, b$  为端点的半开半闭区间, 记作  $(a, b]$  或  $[a, b)$ , 即  $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ , 或  $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ 。

以上三类为有限区间,  $a, b$  分别称为区间的左、右端点,  $b-a$  称为区间的长度。此外, 还有如下几类无限区间。

(4)  $(a, +\infty) = \{x | a < x\}$ ,  $[a, +\infty) = \{x | a \leq x\}$ 。

(5)  $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$ ,  $(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$ 。

(6)  $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$ , 即全体实数的集合。

当考虑由某点附近的点构成的集合时, 常用邻域来表示。

设  $\delta > 0$ , 称  $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  为  $x_0$  的  $\delta$  邻域, 其中,  $x_0$  称为  $O_\delta(x_0)$  的中心点;  $\delta$  称为  $O_\delta(x_0)$  的半径。

$$O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta),$$

称为  $x_0$  的  $O_\delta(x_0)$  去心邻域。其中,  $(x_0 - \delta, x_0)$  称为  $x_0$  的左邻域;  $(x_0, x_0 + \delta)$  称为  $x_0$  的右邻域。

对于无穷远点  $\infty$  的邻域, 它的表示及含义为: 设  $M > 0$ , 称  $O_M(\infty) = \{x | |x| > M\} = (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$  为  $\infty$  点的  $M$  邻域, 其中,  $(-\infty, -M)$  是  $\infty$  的左邻域;  $(M, +\infty)$  是  $\infty$  的右邻域。

#### 1.1.1.4 一元函数的概念

首先了解一下变量。所谓变量就是指在某一过程中不断变化的量。比如, 时间, 某种产品的产量、成本和利润, 运动物体的速度等都是变量。而在某一过程中始终保持不变的量, 称为常量。

现在用集合的形式给出一元函数(只有一个自变量)的定义。

定义 1.1.2 设  $D$  是一个非空实数集合, 如果有一个对应规则  $f$ , 使每一个  $x \in D$ , 都有一个确定的实数  $y$  与之对应, 则称这个对应规则  $f$  为定义在  $D$  上的一个函数关系, 或称变量  $y$  是变量  $x$  的函数。记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

$x$  称为自变量,  $y$  称为因变量。集合  $D$  称为函数的定义域, 通常记作  $D(f)$ 。

$x_0 \in D(f)$  所对应的  $y$  值, 记作  $y_0$ , 或  $f(x_0)$  或  $y|_{x=x_0}$ , 称为当  $x = x_0$  时函数  $y = f(x)$  的函数值。

全体函数值的集合  $\{y | y = f(x), x \in D(f)\}$ , 称为函数  $y = f(x)$  的值域, 记作  $Z$  或  $Z(f)$ 。

由定义 1.1.2 知, 确定一个函数  $y = f(x)$  需要两个要素, 即函数定义域  $D(f)$  和对应规则  $f$ 。

若两个函数相同, 则其定义域和对应规则都相同。

**例1**  $x > y$  能否构成一个函数关系?

**解** 这个式子不能构成一个函数关系。因为对于每一个  $x$ , 可以有无穷多个  $y$  与之对应。而函数定义中的对应规则要求, 对于每一个  $x$  值, 只有一个确定的  $y$  值与之对应。 $x > y$  不符合函数定义, 所以不是函数关系。

**例2**  $y = \arcsin(3 + 2x^2)$  能否构成一个函数关系?

**解** 这个式子也不能构成一个函数关系。因为对于任何实数  $x$ , 都没有按对应规则与之对应的  $y$  值。函数的定义域不能为空集, 因此, 该式子也不能构成函数关系。

**例3** 比较  $y = 2x$  与  $y = \sqrt{4x^2}$ , 说明它们是不是相同的函数关系。

**解**  $y = 2x$  与  $y = \sqrt{4x^2}$  都是定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的函数关系。即它们的定义域相同, 但对应规则却不同, 函数  $y = \sqrt{4x^2}$  实际上相当于

$$y = \begin{cases} 2x, & x \geq 0, \\ -2x, & x < 0, \end{cases}$$

显然和  $y = 2x$  的对应规则不同, 所以它们不是相同的函数关系。

### 1.1.1.5 函数表示法

函数的表示法一般有三种: 公式法, 表格法和图形法。

下面分别各举一个例子来说明。

**例4**  $y = \frac{2}{3x(x-1)} + \sqrt{9-x^2}$ 。

这里用公式表达  $y$  与  $x$  的关系, 它的定义域为

$$D = [-3, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 3]。$$

**例5** 某城市一年每月玩具的零售量, 如表 1-1 所示。

表 1-1 玩具销售一览表

(单位: 个)

| 月份 $t$  | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 零售量 $s$ | 8 100 | 8 400 | 4 500 | 4 800 | 3 900 | 6 000 | 9 000 | 8 500 | 7 300 | 9 330 | 8 640 | 9 464 |

表 1-1 表示了某城市玩具零售量  $s$  随月份  $t$  而变化的函数关系。这个函数关系是用表格表达的, 它的定义域是

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}。$$

值域为  $Z = \{8\ 100, 8\ 400, 4\ 500, 4\ 800, 3\ 900, 6\ 000, 9\ 000, 8\ 500, 7\ 300, 9\ 330, 8\ 640, 9\ 464\}。$

**例6** 某气象站用温度自动记录仪记录某地的气温变化情况, 设某天 24 h 的气温变化曲线如图 1-1 所示。

图1-1所示的曲线描述了一天中的温度 $T$ 随时间 $t$ 变化的规律。其定义域为 $[0, 24]$ , 值域为 $[15, 32]$ 。

这种用图形表示函数的方法称为图形法。

在用公式法表示函数时, 有些函数, 对于其定义域内自变量 $x$ 的不同值, 不能用一个统一的数学表达式表示, 而要用两个或两个以上的式子表示, 这类函数称为“分段函数”。

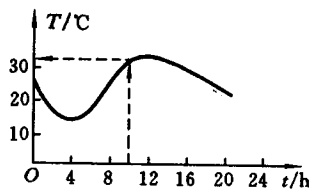


图1-1 温度变化表

例如,

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \quad y = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x-1, & x > 0, \end{cases}$$

都是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的分段函数。

**注释** 分段函数的定义域是其各段定义域的并集; 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数, 而不是表示几个函数。

#### 例7 用分段函数表示函数

$$y = 4 - |x - 2|.$$

**解** 根据绝对值定义可知,

$$\text{当 } x-2 < 0, \text{ 即 } x < 2 \text{ 时, } |x-2| = -(x-2).$$

$$\text{当 } x-2 \geq 0, \text{ 即 } x \geq 2 \text{ 时, } |x-2| = (x-2).$$

因此, 有

$$y = \begin{cases} 4 + (x-2), & x < 2, \\ 4 - (x-2), & x \geq 2. \end{cases}$$

即

$$y = \begin{cases} x+2, & x < 2, \\ 6-x, & x \geq 2. \end{cases}$$

### 1.1.2 函数的特性

#### 1.1.2.1 函数的奇偶性

**定义 1.1.3** 设函数 $y=f(x)$ 在一个关于原点对称的实数集合 $D$ 内有定义。

(i) 如果对于所有的 $x \in D$  (此时必有 $-x \in D$ ), 有 $f(-x) = f(x)$ , 则称 $f(x)$ 为偶函数。

(ii) 如果对于所有的 $x \in D$  (此时必有 $-x \in D$ ), 有 $f(-x) = -f(x)$ , 则称 $f(x)$ 为奇函数。

从定义1.1.3易知, 奇函数的图像关于原点对称, 而偶函数的图像关于 $y$ 轴对称。

例如,  $y=x^4+1$ 为偶函数,  $y=x^3$ 为奇函数,  $y=\sin x$ 为奇函数,  $y=\cos x$ 为偶

函数,  $y=0$  既是奇函数又是偶函数,  $y=x^3+1$  既不是奇函数也不是偶函数。

例8 判断下列函数的奇偶性。

$$(1) f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$(2) g(x) = \begin{cases} 3-e^{-2x}, & x \leq 0, \\ e^{2x}-3, & x > 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \ln \left[ \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x} \right] \\ &= \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x). \end{aligned}$$

所以,  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  是奇函数。

$$(2) \text{ 因为 } g(-x) = \begin{cases} 3-e^{2x}, & -x \leq 0 \\ e^{-2x}-3, & -x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 3-e^{2x}, & x \geq 0 \\ e^{-2x}-3, & x < 0 \end{cases} = -g(x).$$

所以, 函数  $g(x)$  为奇函数。

### 1.1.2.2 函数的单调性

定义 1.1.4 设  $y=f(x)$  为定义在  $D$  上的函数, 若对于  $D$  中任意两个数  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 总有:

(i)  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  为  $D$  上单调递增函数; 特别当总成立严格不等式  $f(x_1) < f(x_2)$  时, 称  $f(x)$  为  $D$  上严格单调递增函数。

(ii)  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  为  $D$  上单调递减函数; 特别当总成立严格不等式  $f(x_1) > f(x_2)$  时, 称  $f(x)$  为  $D$  上严格单调递减函数。

单调递增和单调递减函数统称为单调函数, 严格单调递增和严格单调递减函数则统称为严格单调函数。

例9 证明函数  $y=x^3$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是严格单调递增的。

证 设  $x_1 < x_2$ , 因为

$$\begin{aligned} x_1^3 - x_2^3 &= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 - x_2) \left[ \left( x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \right], \end{aligned}$$

故当  $x_1 < x_2$  时,  $x_1^3 - x_2^3 < 0$ , 即  $x_1^3 < x_2^3$ , 所以函数  $y=x^3$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是严格单调递增的。

例10 判断函数  $f(x)=3x^2+2$  的单调性。

解 对于任意的  $x_1 < x_2$ , 有

$$f(x_1) - f(x_2) = 3(x_1^2 - x_2^2) = 3(x_1 + x_2)(x_1 - x_2).$$

当  $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$  时,  $3(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > 0$ , 因此有  $f(x_1) - f(x_2) > 0$ , 即  $f(x_1) > f(x_2)$ , 所以在此区间函数  $y=3x^2+2$  是单调递增的。