最新版21世纪高等学校导学与导考教材

贺兴时 薛红 刘宣会 编

概率论与数理统计学习辅导

GAILULUNYUSHULITONGJI XUEXIFUDAO

陕西科学技术出版社

最新版21世纪高等学校导学与导考教材

概率论与数理统计学习辅导

贺兴时　薛红　刘宣会　编

陕西科学技术出版社

内容简介

本书内容包括随机事件和概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、线性统计模型。各章由内容提要、典型例题、习题解答、综合练习题及答案四部分组成。本书内容自成体系,可作为高等院校概率论和数理统计的辅导教材,亦可作为报考硕士研究生的入学考试参考书。

图书在牌编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习辅导/贺兴时,薛红,刘宣会编.
西安:陕西科学技术出版社,2005.8

ISBN 7-5369-3998-1

Ⅰ.概... Ⅱ.①贺...②薛...③刘... Ⅲ.①概率论-自学参考资料
②数理统计-自学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 084475 号

出 版 者	陕西科学技术出版社 西安北大街 131 号 邮编 710003 电话(029)87211894 传真(029)87218236 http://www.snstp.com
发 行 者	陕西科学技术出版社 电话(029)87212206 87260001
印 刷	西安信达雅印务有限责任公司
规 格	787mm×1092mm 1/16 开本
印 张	16.5
字 数	392 千字
印 数	1~4000 册
版 次	2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷
定 价	25.00 元

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律的数学学科，是高等学校理工科各专业的一门重要的基础理论课。为了帮助学生学好概率论与数理统计，我们组织编写了这本辅导教材，并与教材同步，力求使学生学懂、学精这门课程。也可作为硕士研究生入学考试的参考资料。

本学习辅导书根据高等工科院校概率论与数理统计教学大纲，并结合硕士研究生入学考试对概率论与数理统计课程的要求编写。全书内容分为八章，前四章为概率论，后四章为数理统计。每章均设计了四个板块。

(1)内容提要：对本章的知识点进行了归纳总结，系统地给出了大纲划定的基本概念、定理、公式及应用，有助于广大读者对概率论和数理统计的内容和考试要求有一个系统而明确的了解。

(2)典型例题：我们按照大纲的要求，精选了各种题型的例题，并进行了详细的解答。试题形式按照选择题、填空题、计算题和证明题的顺序编排，所选择的例题部分来自历届考研试题和概率论与数理统计试题库，具有一定的代表性，有助于读者对基本概念的理解的综合解题能力的培养。

(3)习题解答：给出了由贺兴时、薛红编写的《概率论与数理统计》一书的全部习题的解答。如果没有读过该教材，亦不影响对本书的学习。

(4)综合练习题及答案：可作为读者巩固知识和练习，有助于读者考察自己对基本概念、定理、公式的理解及掌握的程度，并及时发现自己的不足。

本书的第一章、第二章由薛红编写，第三章、第四章由贺兴时编写，第五章至第八章由刘宣会编写，贺兴时负责统稿。

衷心感谢陕西科学技术出版社赵生久先生对本书的出版所付出的辛勤劳动，同时感谢我院统计教研室成涛同志在书稿校对方面所付出的劳动。我们在本书的编写过程中曾参考了国内一些教学辅导教材，在这里也向这些教材的作者表示感谢。

虽然编者在编写本书时，力求概念准确，重点突出，解题过程规范，限于编者水平，书中难免存在错误和不足之处，敬请读者见谅。

编　者

2005.7

目　录

第一章　随机事件及概率

学习要求

1. 理解随机事件和样本空间的概念,熟练掌握事件之间的关系及其运算.

2. 理解古典概型、几何概型的定义;理解概率的定义,掌握概率的基本性质,会应用这些性质进行概率的基本计算.

3. 理解条件概率的概念,掌握乘法公式;理解事件独立性的概念,并应用事件独立性进行概率计算.

4. 掌握全概率公式和贝叶斯公式进行概率计算.

重点　随机事件、样本空间、概率、独立性概念;事件的关系、概率性质;条件概率、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式的应用.

难点　古典概型、几何概型下事件的概率计算;全概率公式、贝斯公式的应用.

1.1　内容提要

1.1.1　随机事件

1. 随机试验

如果试验具有以下特点:

(1) 试验具有明确目的;

(2) 在相同条件下,该试验可重复进行;

(3) 试验结果不少于两个,试验所有可能出现的结果在试验前已经明确;

(4) 每次试验前不可能预料会出现哪个结果.

我们称这种试验为随机试验,常用字母 E 表示.

2. 样本空间

随机试验中每一个可能出现的结果称为样本点,记为 ω. 全体样本点组成的集合(即试验所有可能出现的结果构成的集合)称为样本空间,记为 Ω.

3. 随机事件

称样本空间 Ω 的子集为随机事件. 该子集在一次试验中可能有样本点出现,也可能没有样本点出现. 若该子集有样本点出现,称该事件发生. 随机事件常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$,或用加下标 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 表示.

由单个样子点构成事件称为基本事件. 由两个或两个以上样本点构成的事件称为复合事件.

在每次试验中都出现的事件称为必然事件. 它含有试验所有可能结果,即含有所有样本点,因此也常用 Ω 表示. 在随机试验中决不会出现的事件称为不可能事件. 它不含试验任何结果,常用 $\varnothing$ 表示.

4. 事件的关系和运算

(1) 包含关系:若由事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 包含于事件 B,或事件

B 包含事件 A,记为 $A \subset B$. 任何事件 A 都包含于 Ω.

(2) 相等关系:若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A = B$.

(3) 事件的并:事件 A,B 中至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的并,记为 $A \cup B$.

一般地,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生的事件,我们用 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示,即为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并;用 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ 表示可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的并.

(4) 事件的交:事件 A,B 同时发生的事件称为事件 A 与事件 B 的交,记为 $A \cap B$ 或 AB.

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件,我们用 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示,即为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交,用 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ 表示可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的交.

(5) 事件互不相容:若事件 A,B 不能同时发生,即 $A \cap B = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互不相容或互斥. n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个都互不相容,即 $A_i \cap A_j = \varnothing, 1 \le i \ne j \le n$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容;可列个事件中任意两个都互不相容时,则称该事件列两两互不相容. 任何试验的基本事件都是两两互不相容的.

(6) 事件的差:事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差,记为 $A \setminus B$ 或 $A - B$.

(7) 对立事件:事件 A 不发生的事件称为 A 的对立事件,记为 $\overline{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

由定义可知,对立事件一定是互斥事件,但互斥事件不一定是对立事件;$A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \setminus A \cap B$.

(8) 事件的运算定律:

(ⅰ) 交换律:$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(ⅱ) 结合律:$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(ⅲ) 分配律:$(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(ⅳ) 德·摩根定律:$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.1.2 概率及性质

1. 事件的统计概率

设 A 为一事件,若在一组相同条件下进行 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数为 n_A,称比值

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

为事件 A 在 n 次重复试验中发生的频率,其中 n_A 称为事件 A 在 n 次重复试验中发生的频数.

在一组相同的条件下,当试验次数 n 增大时,若事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 在一个确定值 p 周围摆动,而随着 n 越来越大,摆动的幅度愈来愈小,则称这个确定值 p 为事件 A 的统计概率.

在实际问题中,这个确定值是不容易求得的,通常用 n 很大时的频率或若干个频率的平均值来近似代替,即 $p \approx f_n(A)$.

2. 古典概型

如果随机试验满足:

(1) 试验的样本空间由有限个样本点构成,即

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\};$$

(2) 每个样本点出现的可能性相等,即

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

我们称这类随机试验的数学模型为古典概型. 在古典概型中,若事件 A 包含 n_A 个样本点,则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

由这种方法得到的概率称为古典概率.

3. 几何概型

若试验 E 具有下列性质:

(1) 试验的结果可能是某区域 Ω 中的一个点,且区域 Ω 是可度量的区域;

(2) 试验的结果落入区域 Ω 内每一点是等可能的. 即试验的结果落入 Ω 内任一子区域 g 的概率与区域 g 的测度 $\mu(g)$(一维情形为长度,二维情形为面积,三维情形为体积等)成正比,且与其位置和形状无关.

则称该试验对应的数学模型为几何概型.

若 A_g 表示试验结果落入区域 $g \subset \Omega$ 中的事件,则其概率定义为

$$P(A_g) = \frac{g\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}} = \frac{\mu(g)}{\mu(\Omega)}$$

4. 概率的公理化定义和性质

(1) 概率的公理化定义

设随机试验 E 的样本空间为 Ω,对于 Ω 中的任何事件 A,赋予一个实数 $P(A)$,如果 $P(\cdot)$ 满足

(i) 非负有界性: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(ii) 完备性: $P(\Omega) = 1$;

(iii) 可列可加性:对于两两互斥事件列 $A_1, A_2, \cdots$,有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

(2) 概率的性质

性质 1　$P(\varnothing) = 0$,即不可能事件的概率为零.

注　反过来不成立. 即 $P(A) = 0 \nRightarrow A = \varnothing$.

性质 2　若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n),$$

即互斥事件并的概率等于它们各自概率的和.

性质 3　对任一事件 A,均有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

性质 4　对两个事件 A 和 B,若 $A \subset B$,则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A), \quad P(B) \geqslant P(A).$$

注 当条件 $A\subset B$ 不满足时，一般地 $P(B-A)\neq P(B)-P(A)$，但

$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB).$$

性质 5(加法公式) 对两个事件 A 和 B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

特别地，若事件 A,B 互斥，则有 $P(B\cup A)=P(A)+P(B)$.

性质 5 也可以推广为：

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3),$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=S_1-S_2+S_3-S_4+\cdots+(-1)^{n-1}S_n,$$

其中

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),\ S_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j),$$

$$S_3=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k),\ \cdots,\ S_n=P(A_1A_2\cdots A_n).$$

1.1.3 条件概率与事件的独立性

1. 条件概率与乘法公式

(1) 条件概率

设 A 和 B 是两个事件，且 $P(B)>0$，称

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的**条件概率**.

条件概率也是概率，它满足概率定义中的三条，即：

(i) 对每个事件 A，均有 $0\leqslant P(A\mid B)\leqslant 1$；

(ii) $P(\Omega\mid B)=1$；

(iii) 若事件 $A_1,A_2,\cdots$，两两互斥，即对于 $i,j=1,2,\cdots,i\neq j,A_iA_j=\varnothing$，均有

$$P((A_1\cup A_2\cup\cdots)\mid B)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)+\cdots.$$

对于在前面给出的概率性质和公式，也都适用于条件概率. 例如对任意的事件 A_1,A_2，有

$$P((A_1\cup A_2\mid B)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)-P(A_1A_2\mid B).$$

(2) 乘法公式

由条件概率公式，得

$$P(AB)=P(A\mid B)P(B)=P(B\mid A)P(A).$$

乘法公式的推广：对于任何正整数 $n\geqslant 2$，当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时，有

$$P(A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

2. 事件独立性

(1) 设 A,B 为两个事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A 与事件 B 相互独立.

(2) 设 A,B 为两个事件，且 $P(A)>0$，则事件 A 与事件 B 相互独立且仅当 $P(B\mid A)=P(B)$.

(3) 若事件 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

(4) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，$n\geqslant 2$. 如果对于其中的任意 $k(k\geqslant 2)$ 个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k},1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n$，等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

总成立，则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

(5) 事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果对于任何 $i,j(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$，都有 $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$，则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立；n 个事件相互独立，则必两两独立；反之，n 个事件两两独立，它们不一定相互独立. 相互独立要满足 $C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$ 个等式，而 n 个事件两两独立只需要满足其中的 C_n^2 个等式.

3. 贝努里概型与二项概率

(1) 如果重复试验具有以下特点：

(ⅰ) 每次试验的条件相同，可能的结果有限；

(ⅱ) 各次试验的结果相互独立.

则我们称该重复试验为独立试验概型. 当重复试验次数为 n，每次试验只有两个结果 A 或 $\overline{A}$，且 $P(A)=p,P(\overline{A})=1-p=q$. 则称为 n 重贝努里概型.

(2) 在 n 重贝努里概型中，则事件 A 在 n 次试验中出现 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$$

并且 $\sum\limits_{k=0}^{n}P_n(k)=1$.

1.1.4　全概率公式和贝叶斯公式

1. 全概率公式

(1) 样本空间的划分：如果事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足

(ⅰ) $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互斥，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$；

(ⅱ) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$

则称事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分.

(2) 全概率公式：设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分，A 为任一事件，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

2. 贝叶斯公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分，则对任一事件 $A(P(A)>0)$，有

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

1.2 典型例题

1.2.1 选择题

1. 设 A 表示事件“甲种产品畅销,乙种产品滞销”,则其对立事件 $\overline{A}$ 为 ( )

(A)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”; (B)“甲种产品滞销”;

(C)“甲乙两种产品均畅销”; (D)“甲种产品滞销,乙种产品畅销”.

解 设 A_1 =“甲种产品畅销”,A_2 =“乙种产品畅销”. 则

$$A = A_1\overline{A_2},$$

由 $\overline{A} = \overline{A_1\overline{A_2}} = \overline{A_1} \cup A_2$ =“甲种产品滞销或乙种产品畅销”,故选(A).

2. 对于任意二事件 A 和 B,与 $A \cup B = B$ 不等价的是 ( )

(A) $A \subset B$; (B) $\overline{B} \subset \overline{A}$; (C) $A\overline{B} = \varnothing$; (D) $\overline{A}B = \varnothing$.

解 由 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Leftrightarrow A\overline{B} = \varnothing$,故选(D).

3. 当事件 A 与 B 同时发生时,事件 C 必须发生,则下列结论正确的是 ( )

(A) $P(C) = P(AB)$; (B) $P(C) = (A \cup B)$;

(C) $P(C) \geqslant P(A) + P(B) - 1$; (D) $P(C) \leqslant P(A) + P(B) - 1$.

解 由已知条件 $AB \subset C$,得 $P(C) \geqslant P(AB)$,又由加法公式及($P(A \cup B) \leqslant 1$,得 $P(C) \geqslant P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$. 即选(C).

4. 设 $P(A) = a$, $P(B) = b$, $P(A \cup B) = c$, 则 $P(A\overline{B}) =$ ( )

(A) $a - b$; (B) $c - b$; (C) $a(1 - b)$; (D) $a(1 - c)$.

解 设法用 $A,B,A \cup B$ 表示 $A\overline{B}$,由 $A = A\Omega = A(B \cup \overline{B}) = AB \cup A\overline{B}$. 得

$$\begin{aligned} P(A\overline{B}) &= P(A) - P(AB) = P(A) - [P(A) + P(B) - P(A \cup B)] \\ &= P(A \cup B) - P(B) = c - b. \end{aligned}$$

故选(B).

5. 设事件 A 和 B 满足 $P(B \mid A) = 1$,则 ( )

(A) A 是必然事件; (B) $A \supset B$;

(C) $A \subset B$; (D) $P(A\overline{B}) = 0$.

解 由 $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = 1$,得 $P(A) = P(AB)$,进而得 $P(A\overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0$,故选(D).

6. 设 A,B 为两个互斥事件,且 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 则结论正确的是 ( )

(A) $P(B \mid A) > 0$; (B) $P(A \mid B) = P(A)$;

(C) $P(A \mid B) = 0$; (D) $P(AB) = P(A)P(B)$.

解 因为 A,B 互斥,即 $AB = \varnothing$,所以 $P(AB) = 0$,又因 $P(A) > 0$,$P(B) > 0$,由公式 $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$,得 $P(A \mid B) = 0$,故选(C).

7. 设 $P(A) = 0.8$,$P(B) = 0.7$,$P(A \mid B) = 0.8$,则下列结论正确的是 ( )

(A) 事件 A 与 B 互相独立; (B) 事件 A 与 B 互斥;

(C) $B \supset A$; (D) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

解　答案为(A). 因为 $P(A)=P(A\mid B)=0.8$,故事件 A 与 B 相互独立.

8. 设事件 A,B 为任意两事件,且 $A\subset B,P(B)>0$,则下列选项必然成立的是 (　　)

(A) $P(A)<P(A\mid B)$;　　(B) $P(A)\leqslant P(A\mid B)$;

(C) $P(A)>P(A\mid B)$;　　(D) $P(A)\geqslant P(A\mid B)$.

解　答案为(B). 因为

$$P(A)=P(AB)=P(B)P(A\mid B)\leqslant P(A\mid B)$$

9. n 张奖券中含有 m 张有奖的,k 个人购买,每人一张,其中至少有一个人中奖的概率是 (　　)

(A) $\dfrac{m}{C_n^k}$;　　(B) $1-\dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$;

(C) $\dfrac{C_m^1C_{n-m}^{k-1}}{C_n^k}$;　　(D) $\sum\limits_{r=1}^{k}\dfrac{C_m^r}{C_n^k}$.

解　答案为(B). 至少有一人中奖的对立事件为 k 个人都没中奖,而 k 个人都没中奖的概率为

$$P(\overline{A})=\frac{C_{n-m}^k}{C_m^k}$$

则所求事件的概率应为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{n-m}^k}{C_m^k}$$

10. 每次试验失败的概率为 $p(0<p<1)$,则在 3 次重复试验中至少成功一次的概率为 (　　)

(A) $3(1-p)$;　　(B) $(1-p)^2$;

(C) $1-p^3$;　　(D) $C_3^1(1-p)p^2$.

解　因为每次实验中成功的概率为 $1-p$. 若设 A_i = "3 次重复试验中恰好成功 i 次",$(i=0,1,2,3)$,则在 3 次重复试验中至少成功一次的概率为

$$\begin{aligned}P&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\&=C_3^1(1-p)p^2+C_3^2(1-p)^2p+(1-p)^3\\&=3p^2(1-p)+3p(1-p)^2+(1-p)^3=1-p^3.\end{aligned}$$

或者

$$P=1-P(A_0)=1-p^3.$$

所以本题应选(C).

11. 每次试验成功率为 $p(0<p<1)$,进行重复试验,直到第十次试验才取得 4 次成功的概率为 (　　)

(A) $C_{10}^4p^4(1-p)^6$;　　(B) $C_9^3p^4(1-p)^6$;

(C) $C_9^4p^4(1-p)^5$;　　(D) $C_9^3p^3(1-p)^6$.

解　答案为(B). 由于第十次试验时才取得 4 次成功,即表明第十次试验出现概率为 p,前 9 次试验中有 3 次成功的概率为 $C_9^3p^3(1-p)^6$,所求概率为

$$C_9^3p^4(1-p)^6$$

12. 袋中有5个球(3个新,2个旧),每次取一个,无放回地抽取两次,则第二次取到新球的概率是 (　　)

(A) $\frac{3}{5}$;　　(B) $\frac{3}{4}$;　　(C) $\frac{2}{4}$;　　(D) $\frac{3}{10}$.

解　答案为(A). 因为

$$P(A) = \frac{C_3^1}{C_5^1}\frac{C_2^1}{C_4^1} + \frac{C_2^1}{C_5^1}\frac{C_3^1}{C_4^1} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

13. 设 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{2}{3}$,则 (　　)

(A) A、B 互不相容;　　(B) A、B 相互独立;

(C) A、B 不相互独立;　　(D) $B \subset A$.

解　由于 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$,而 $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,所以有 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. 故选(B).

14. 设 A、B、C 三个事件两两独立,则 A、B、C 相互独立的充分必要条件是 (　　)

(A) A 与 BC 独立;　　(B) AB 与 $A \cup C$ 独立;

(C) AB 与 AC 独立;　　(D) $A \cup B$ 与 $A \cup C$ 独立.

解　应选(A),证明如下:

必要性. 设 A、B、C 为相互独立的事件,则有

$$P[A(BC)] = P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = P(A)P(BC),$$

故事件 A 与事件 BC 相互独立.

充分性. 设 A、B、C 两两独立,且 A 与 BC 独立. 于是有

$$P(AB) = P(A)P(B), P(BC) = P(B)P(C), P(AC) = P(A)P(C),$$

$$P(ABC) = P[A(BC)] = P(A)P(BC) = P(A)P(B)P(C).$$

根据三事件 A、B、C 相互独立的定义知 A、B、C 相互独立.

15. 设 A, B、C 相互独立,则下列结论不正确的是 (　　)

(A) A、B、C 两两相互独立;　　(B) $A \cap B$ 与 C 相互独立;

(C) $A \cap B$ 与 $A \cap C$ 相互独立;　　(D) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

解　由于 A、B、C 相互独立,则(A)、(D) 成立. 因为

$$P((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = P(A \cap B)P(C)$$

所以(B) 也成立. 而

$$P((A \cap B) \cap (A \cap C)) = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B)P(A \cap C) = P[(A)]^2P(B)P(C)$$

所以 $P((A \cap B) \cap (A \cap C)) = P(A \cap B)P(A \cap C)$ 未必一定成立,即 $A \cap B$ 与 $A \cap C$ 未必相互独立. 故选(C).

1.2.2　填空题

16. 已知 $P(A) = 0.7$, $P(A - B) = 0.3$,则 $P(\overline{AB}) =$ ______.

解　由 $P(A - B) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$

所以 $P(AB)=0.4$,$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6$.

17. 给定 $p=P(A)$,$q=P(B)$,$r=P(A\cup B)$,则 $P(A\overline{B})=$ ______,$P(\overline{A}\,\overline{B})=$ ______.

解 因为 $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A\cup B-B)$

$$=P(A\cup B)-P(B)=r-q$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-r$$

18. 设事件 A,B 的概率分别为$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{2}$.则当 A 与 B 互斥时,$P(\overline{A}B)=$ ______;当 $P(AB)=\frac{1}{8}$ 时,$P(\overline{A}B)=$ ______.

解 (1) 因为 A 与 B 互斥,故 $B\subset\overline{A}$,有 $B=B\overline{A}$,则

$$P(\overline{A}B)=P(B)=\frac{1}{2}$$

(2) $P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

19. 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品,任意抽取两次,每次抽一个,抽出后不放回,则第二次抽出的是次品的概率为______.

解 设 $A=\{$第二次抽出的是次品$\}$,基本事件总数为 $C_{12}^1C_{11}^1=12\times 11$,有利于 A 的基本事件个数为 $C_{10}^1C_2^1+C_2^1C_1^1=22$,故 $P(A)=\frac{22}{12\times 11}=\frac{1}{6}$.

20. 假设 $P(A)=0.4$,$P(A\cup B)=0.7$,那么

(1) 若 A 与 B 互不相容,则 $P(B)=$ ______;

(2) 若 A 与 B 相互独立,则 $P(B)=$ ______.

解 (1) $P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.7-0.4=0.3$

(2) 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

得
$$P(B)=\frac{P(A\cup B)-P(A)}{1-P(A)}=\frac{0.7-0.4}{1-0.4}=0.5$$

21. 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$,且 $P(A)=p$,则 $P(B)=$ ______.

解 $P(B)=P[B(A\cup\overline{A})]=P(BA\cup B\overline{A})=P(BA)+P(B\overline{A})$

$$=P(\overline{B}\,\overline{A})+P(B\overline{A})=P(\overline{A})=1-P(A)=1-p$$

22. 一射手对同一目标独立地进行 4 次射击,若至少命中一次的概率为$\frac{80}{81}$,则该射手的命中率为______.

解 设命中率为 $p(0<p<1)$,则至少命中一次的概率为 $1-(1-p)^4$,由 $1-(1-p)^4=\frac{80}{81}$,解得 $p=\frac{2}{3}$.

23. 设 A 与 B 为互不相容的两事件,$P(B)>0$,则 $P(A\mid B)=$ ______.

解 因为 A,B 互不相容,所以 $P(AB)=P(\varnothing)=0$,从而 $P(A\mid B)=0$.

24. 设 A,B 为两个事件,如果 $A\supset B$,且 $P(A)=0.7$,$P(B)=0.2$,则 $P(B\mid A)=$ ______.

解 因为 $A \supset B$ 所以 $AB = B$,于是

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{2}{7}.$$

25. 设随机事件 A,B 及事件 $A \cup B$ 的概率分别是 0.4,0.3 和 0.6,那么 $P(A \mid B) =$ ______.

解 因为 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,则 $P(A \cap B) = 0.1$,从而

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}.$$

26. 已知随机事件 A 的概率 $P(A) = 0.5$,随机事件 B 的概率 $P(B) = 0.6$ 及条件概率 $P(B \mid A) = 0.8$,则 $P(A \cup B) =$ ______.

解 由题设 $P(AB) = P(A)P(B \mid A) = 0.4$,于是

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.6 - 0.4 = 0.7$$

27. 假设一批产品中一、二、三等品各占 60%,30%,10%,从中随机取出一种,结果不是三等品,则取到的是一等品的概率为______.

解 设 $A_i = \{$取到的这个产品为 i 等品$\}$,$i = 1,2,3$,显然 A_1,A_2,A_3 为互斥事件组,由题意有

$$P(A_1 \mid A_1 \cup A_2) = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1) + P(A_2)} = \frac{0.6}{0.6 + 0.3} = \frac{2}{3}.$$

28. 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次,其命中率分别为 0.6 和 0.5,现已知目标被击中,则它是甲击中的概率为______.

解 设 $A = \{$甲射击命中$\}$,$B = \{$乙射击命中$\}$,$C = \{$目标被击中$\}$,有 $C = A \cup B$,则

$$P(A \mid C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{3}{4}.$$

29. 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$,$P(AB) = 0$,$P(AC) = P(BC) = \frac{1}{6}$,则 A,B,C 全不发生的概率为______.

解
$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) &= 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)] \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 0\right) = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

30. 设两两相互独立的三事件 A,B 和 C 满足条件:$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$,则 $P(A \cup B \cup C) =$ ______.

解 因为 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$,且 A,B,C 两两独立,所以

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC) \\ &= 3P(A) - 3[P(A)]^2 + [P(A)]^3 = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

1.2.3 计算题与证明题

31. 写出下列随机试验的样本空间:(1) 将一枚硬币连抛 3 次,观察正反面出现的情况;

(2) 袋中有3只白球和2只黑球，从袋中任取2只球，且每次抽1只，取后不放回，观察取得球的颜色；(3) 将 a、b 两球随机放到3个不同盒子中；(4) 将一尺之棰折成三段，观察各段的长度.

解　(1) 用"H"表示出现"正面"，"T"表示出现"反面". 于是，由题设，基本事件是从两个相异元素 H、T 中，允许重复地取出3个元素的排列，而所有这种排列共有 $2^3=8$ 种可能结果，所以，样本空间

$$\Omega=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}.$$

(2) 将白球编号为1,2,3，黑球编号为4,5，则基本事件是从5个相异元素中取出2个元素的排列，共20种可能结果，所以，样本空间是

$$\Omega=\begin{Bmatrix}(1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5)\\ (2,1) & (2,3) & (2,4) & (2,5)\\ (3,1) & (3,2) & (3,4) & (3,5)\\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,5)\\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4)\end{Bmatrix}$$

(3) 在此试验中，基本事件可分为两个类，一类是 a、b 两球放在同一盒中，共有3种可能结果(用"0"表示盒中没放球)：

$$(ab,0,0),(0,ab,0)(0,0,ab)$$

另一类是 a,b 两球分别放在两个不同盒中，共有 $A_3^2=6$ 种可能结果：

$$(a,b,0),(b,a,0)(a,0,b),(b,0,a),(0,a,b)(0,b,a);$$

所以，样本空间共由以下9个样本点构成：

$$\Omega=\{(ab,0,0),(0,ab,0)(0,0,ab),(a,b,0),(b,a,0)\\(a,0,b),(b,0,a),(0,a,b)(0,b,a)\}.$$

(4) 设 x,y,z 分别为折成的第一段、第二段、第三段的长度，则样本空间为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}$. 若设 $A=$"三段可构成三角形"，则 $A=\{(x,y,z)\mid (x,y,z)\in\Omega,x+y>z,x+z>y,y+z>x\}$.

32. 某运动员连续射击3次，设 $A_i=$"第 i 次射击命中"$(i=1,2,3)$，$B_j=$"3次射击中正好击中 j 次"$(j=0,1,2,3)$，$C_k=$"3次射击中至少击中 k 次"$(k=0,1,2,3)$，写出事件 A_i、B_j、C_k 所在的样本空间.

解　A_i 中考虑的是第几次命中，故设每次射击命中记为1，不命中记为0，用向量 (x_1,x_2,x_3) 表示三次射击结果，$x_i=0$ 或 $1(i=1,2,3)$，则 A_i 所在的样本空间为 $\Omega=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$. B_j 和 C_k 考虑的是命中次数，故他们所在的样本空间均为 $\Omega=\{0,1,2,3\}$.

33. 表示下列随机试验的有关随机事件，并分析他们之间的相互关系.

(1) 掷一颗骰子，观察掷得的点数. 考虑事件："掷得的点数不超过2"、"掷得的点数不超过3"、"掷得的点数大于3"及"掷得奇数点".

(2) 从一批灯泡中任取一只，测试它的寿命，考虑事件"测得寿命大于1000小时"、"测