

“十五”国家重点图书

林大钧 著

计算机工程图形 算法及应用

ISUANJI GONGCHENG TUXING SUANFA JI YINGYONG



华东理工大学出版社

EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

“十五”国家重点图书

林大钧 著

计算机工程图形 算法及应用

ISUANJI GONGCHENG TUXING SUANFA JI YINGYONG



华东理工大学出版社

EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

计算机工程图形算法及应用/林大钧著. —上海:华东理工大学出版社,2006.8

ISBN 7-5628-1925-4

I. 计... II. 林... III. 计算机图形学-算法理论-高等学校-教材 IV. TP391.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 071504 号

计算机工程图形算法及应用

林大钧 著

责任编辑/徐知今

封面设计/王晓迪

责任校对/金慧娟

出版发行/华东理工大学出版社

地址:上海市梅陇路 130 号,200237

电话:(021)64250306(营销部)

传真:(021)64252707

网址:www.hdlgpress.com.cn

印刷/上海展强印刷有限公司

开本/787mm×1092mm 1/16

印张/15.25

字数/371 千字

版次/2006 年 8 月第 1 版

印次/2006 年 8 月第 1 次

印数/1—4 050 册

书号/ISBN 7-5628-1925-4/TP·146

定价/28.00 元(含 CD-ROM 光盘一张)

(本书如有印装质量问题,请到出版社储运部调换)

前 言

在工程中,图形是表达与交流技术思想的重要信息,如工程图样是产品制造加工的技术文件,画法几何图解结果是运用空间思维特色来求解几何元素的度量与定位问题的图形。随着计算机技术在图形处理领域中的应用,图形的输入、输出、生成、表示和变换等已经渗透到各个工程应用领域中,我国很多高等学校均已开设了计算机图形方面的课程。在此背景下,如何将工程图形的生成原理、空间定位度量方法与计算机技术相结合使工程技术人员能应用计算机技术开发企业专业图样;使学生不仅具有计算机绘图技能,而且还能应用计算机进行图形处理以适应工程对各种图形的要求;这都需要掌握构建图形模型,建立数学模型和由计算机进行图形处理的基础知识和基本方法。本书是编者在总结了教学实践和研究应用的基础上,参考国内外最新版本的教材而编写的。本书的编写目的是为高校相关专业的老师和学生,以及从事计算机图形研究与应用的工程技术人员,提供一本学习用形、数、计算机综合的方法处理工程图形信息的实用教材。

本书以“实用、适用、先进”为编写原则并体现“通俗、精练、可操作”的编写风格,目的为解决多年来在同类教材中存在的过深、过高且偏离实际的问题。

实用——本书重点讲述形、数、计算机综合的基本方法和原理,使学生学习后能胜任计算机图形二次开发工作。

适用——本书是以工程图形为主的教材,主要适用于培养应用研究型人才的高校,以符合此类高校学生的培养目标,也便于教师因材施教。

先进——本书所选内容是当今的新技术、新方法。学生在掌握经典的技术和方法之后,可用教材中的新技术、新方法去解决工程中的技术难题,为学生毕业后进入工程领域打下坚实的基础。

通俗——本书语言流畅、深入浅出、容易读懂;尽量避开艰深的理论和长篇的数学推导,以实例来说明问题,在应用实例中掌握理论,使学生轻松掌握所学知识技能,达到事半功倍的效果。

精炼——本书选材精炼,详细而不冗长,简略得当;对学生必须掌握的新技术、新方法,力争讲透、讲到位。本书为教师提供了良好的教学内容,也为教师根据教学对象调整教学内容留出了空间。

可操作——本书所有的实例均是容易操作、且有实际意义的案例。把这些案例连接起来,就是一个应用工程的实例。通过举一反三的应用,可使学生能够在更高层次上创造性地应用教材中的新思想、新技术、新方法去解决问题。

本书可作为高等院校各相关专业的教材,也可作为培训高级技术人员以及需要加深某些方面知识技能人员的相关教材。

作 者

2006.1

目 录

1 计算机辅助图形算法基础	(1)
1.1 空间几何元素度量和定位的投影变换	(1)
1.2 投影变换的数学模型	(3)
1.3 投影变换计算机程序设计	(6)
1.4 形、数计算机几何问题综合解	(9)
1.5 图形计算化	(29)
2 二维图形变换及程序设计	(36)
2.1 平面图形变换及程序设计	(36)
2.2 利用特殊变换设计图形	(51)
3 工程曲线程序设计	(63)
3.1 几何参数曲线的程序设计	(63)
3.2 由参数方程绘制曲线	(73)
3.3 三次参数样条插值曲线	(82)
3.4 贝塞尔曲线	(85)
3.5 B样条曲线	(90)
3.6 三次 NURBS 曲线	(94)
3.7 空间曲线	(98)
4 三维图形变换及程序设计	(104)
4.1 三维图形几何变换	(104)
4.2 轴测投影变换	(112)
4.3 圆轴测投影程序设计	(116)
4.4 正等轴测圆孔	(119)
4.5 正轴测投影的数值方法	(120)
5 工程曲面程序设计	(135)
5.1 工程曲面的数学描述	(135)
5.2 孔斯曲面	(142)
5.3 贝塞尔曲面	(145)
5.4 B样条曲面	(148)
5.5 轧辊曲面设计	(150)
5.6 管道过渡曲面设计	(157)

5.7	过渡曲面的数学模型	(162)
5.8	管道过渡曲面程序设计	(166)
5.9	管道截面形状设计	(167)
5.10	截面交线形状的程序设计	(171)
6	曲面交线与展开图的计算机图形程序设计	(179)
6.1	平面与圆柱面的交线与展开线	(179)
6.2	平面与圆锥面的交线与展开线	(180)
6.3	气垫船围裙展开设计	(183)
6.4	球罐的近似展开方法	(204)
6.5	椭圆形封头的近似展开方法	(212)
6.6	曲面面积求解方法	(222)
6.7	几种求解曲面面积方法的应用与比较	(224)
6.8	数学算法与手工作图展开法比较	(228)
附录	AutoLisp 功能函数	(231)

1.1 空间几何元素度量和定位的投影变换

由正投影原理可知几何元素若与投影面处于一般位置时,其投影的度量性质是变化的。因此在利用画法几何方法图解几何度量和定位问题时,一般是利用投影变换的方法使几何元素与投影面处于特殊位置,以便在新投影面上来度量几何元素的原形或使新投影更有利于解题。在此,所谓度量问题是指具有测量数值性质的问题,而所谓定位问题是指确定几何图形相互从属关系的问题。在点、线、平面范围内基本的度量、定位问题有:

- 两点之间的距离;
- 点至直线的距离;
- 点至平面的距离;
- 直线与平面的夹角;
- 平面与平面的夹角;
- 直线与平面的交点;
- 平面与平面的交线;
- 求平面的实形。

当构成这些度量、定位问题的几何图形与投影面处于一般位置时,则上述基本问题的解在投影面上的投影与解的原形之间存在着一定的关系。为了使这些问题的解能在投影面上直接得到反映,一般要通过如下方法作图:

(1) 对两点之间的距离,可将连接两点的直线变换为投影面平行线,则两点之间的距离 L 就在该投影面上反映实长,见图 1-1(a)。图 1-1 中(b),(c),..., (h)等几何元素都已由一般位置变换到使问题易解的位置(变换过程从略)。

(2) 对点至直线的距离,可将直线变换成某投影面的垂线,点亦随之变换,则点到直线的距离 L 就在该投影面上得到反映,见图 1-1(b)。

(3) 对点至平面的距离,可将平面变换成某投影面的垂直面,点亦随之变换,则点到平面的距离 L 就可在该投影面上求得,见图 1-1(c)。

(4) 对直线与平面的夹角,可将直线变换成水平线,将平面变换成正平面,则直线与平面的夹角 θ 可在水平投影面上得到,见图 1-1(d)。

(5) 对两平面之间的夹角,可将两平面同时变换成投影面的垂直面,则两平面之间的夹角 θ 可在该投影面上得到,见图 1-1(e)。

(6) 对直线与平面的交点,可将平面变换成投影面的垂直面,比如变换成正垂面,直线也随之变换,则在正投影面上得到交点的正面投影,由从属性可得交点的水平投影,见图 1-1(f)。

(7) 对两平面交线,可将其中一个变换成投影面的垂直面,比如变换成正垂面,另一平面也随之变换,则在正投影面上得到交线的正面投影,由从属性可得交线的水平投影,见图 1-1(g)。

(8) 对平面实形,可将平面变换成投影面的平行面,比如变换成水平面,则在水平投影面上可得到该平面的实形,见图 1-1(h)。

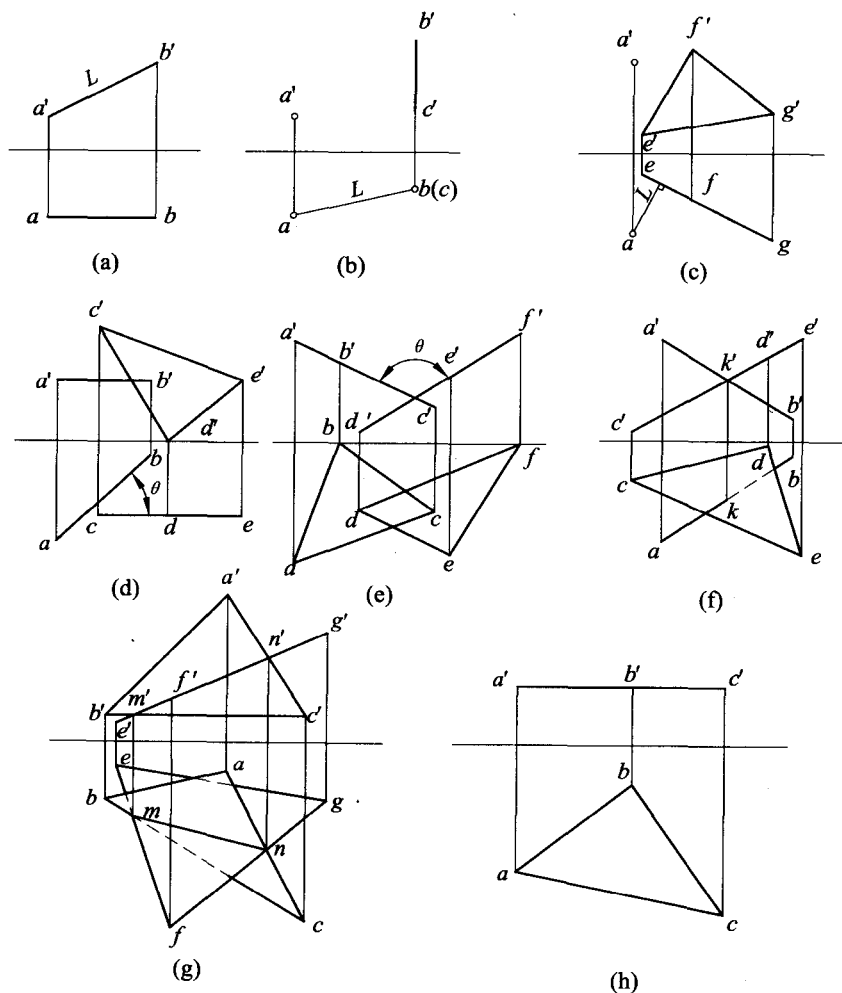


图 1-1 几种常见的度量与定位问题

上述各基本度量或定位问题需经过适当次数的投影变换。从理论上讲,只要在变换投影面的过程中,作图绝对准确,则其解也是精确的。但在实际作图时,要做到绝对准确是不可能的。每一步作图都带有误差,经过若干步作图后,其误差积累使其成为非精确解。为了既能利用投影变换的直观性,又能得到精确的结果,可用形、数、计算机结合的方法使解题的过程体现直观性并能进行定量分析。要由计算机精确求解,就必须在投影变换的基础上,寻求图形之间的量的联系,从而建立起解题的数学模型,再根据数学模型设计计算机绘图程序,使问题在几何、数学、计算机图形相结合的方法中得到

直观的精确解。

1.2 投影变换的数学模型

在解上述各种基本度量、定位问题的过程中,有两种投影变换是基本的。一是将一般位置直线变换为投影面的垂直线,二是将一般位置平面变换为投影面的平行面。现分别建立这两种投影变换的数学模型。

1. 一般位置直线变换为投影面垂直线的数学模型

设 α_0 、 β_0 为确定直线空间方位的已知参数,见图 1-2。

根据投影变换的作图顺序,在相应的投影体系中建立一个坐标系与之对应。如图 1-2 中 $\frac{V}{H}$ 与 $oxyz$ 对应;

$\frac{V_1}{H}$ 与 $o_1x_1y_1z_1$ 对应; $\frac{V_1}{H_2}$ 与 $o_2x_2y_2z_2$ 对应。且使 $oxyz$ 与 $o_1x_1y_1z_1$ 共原点,即 o 、 o_1 两点重合在 x 轴上,而坐标系 $o_2x_2y_2z_2$ 的原点建立在 x_1 轴上, o_2 、 o_1 相距为 L 。由投影变换的方法可知 L 的长度可以任意选取而对解题结果并无影响。

将直线 AB 进行第二次变换时,投影体系 $\frac{V_1}{H}$ 与新投影体系 $\frac{V_1}{H_2}$ 的相对位置取决于 H_2 面和 V_1 面的交线 x_2 轴的位置,也即由 β 角确定。由此可知直线 AB 经二次投影变换后的投影取决于 β_0 和 β 角。在将一般位置直线变换为投影面的垂直线的系统中,

如有一点 $I(x_i, y_i, z_i)$ 随直线 AB 一起变换,则 I 点经一次投影变换后其在 $o_1x_1y_1z_1$ 坐标系中的坐标为

$$\begin{cases} x_{i1} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \cos(\beta_0 - \lambda_i) \\ y_{i1} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \sin(\beta_0 - \lambda_i) \\ z_{i1} = z_i \\ \lambda_i = \arctan\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \end{cases} \quad (1-1)$$

经第二次投影变换后其在 $o_2x_2y_2z_2$ 坐标系中的坐标为

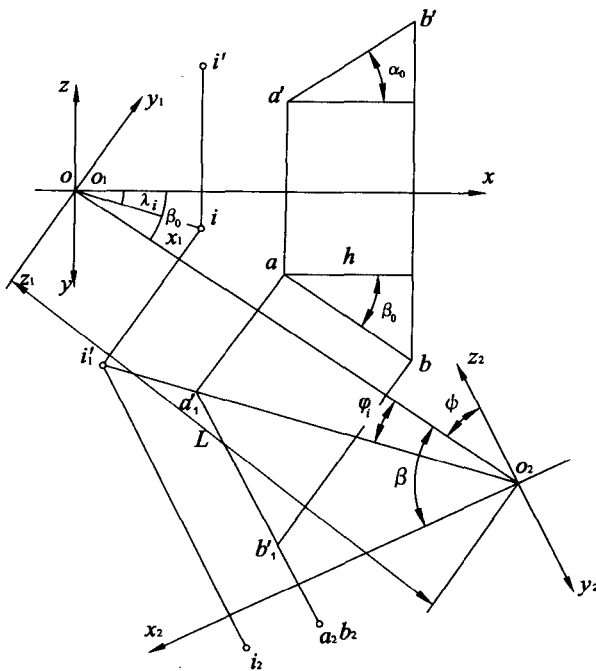


图 1-2 一般位置直线的投影变换

$$\begin{cases}
 x_{i2} = \frac{L - x_{i1}}{\cos \varphi_i} \cos(\beta - \varphi_i) \\
 y_{i2} = y_{i1} \\
 z_{i2} = \frac{L - x_{i1}}{\cos \varphi_i} \sin(\beta - \varphi_i) \\
 \beta = \frac{\pi}{2} - \psi \\
 \psi = \arctan(\tan \alpha_0 \cos \beta_0) \\
 \varphi_i = \arctan\left(\frac{z_i}{L - x_{i1}}\right)
 \end{cases} \quad (1-2)$$

式(1-1)、式(1-2)即为一般位置直线变换为投影面垂直线的数学表达式。

2. 一般位置平面变换为投影面平行面的数学模型

已知平面上三个点的坐标 $I(x_1, y_1, z_1)$; $II(x_2, y_2, z_2)$; $III(x_3, y_3, z_3)$ 。将一般位置平面变换为投影面的平行面的作图顺序可参见图 1-3。在相应的投影体系中建立不同的坐标系与之对应, 即 $\frac{V}{H}$ 与 $oxyz$ 对应, $\frac{V_1}{H}$ 与 $o_1x_1y_1z_1$ 对应, $\frac{V_1}{H_2}$ 与 $o_2x_2y_2z_2$ 对应。且使 $oxyz$ 与 $o_1x_1y_1z_1$ 共原点, 即 o, o_1 两点重合在 x 轴上, 而坐标系 $o_2x_2y_2z_2$ 的原点建立在 x_1 轴上,

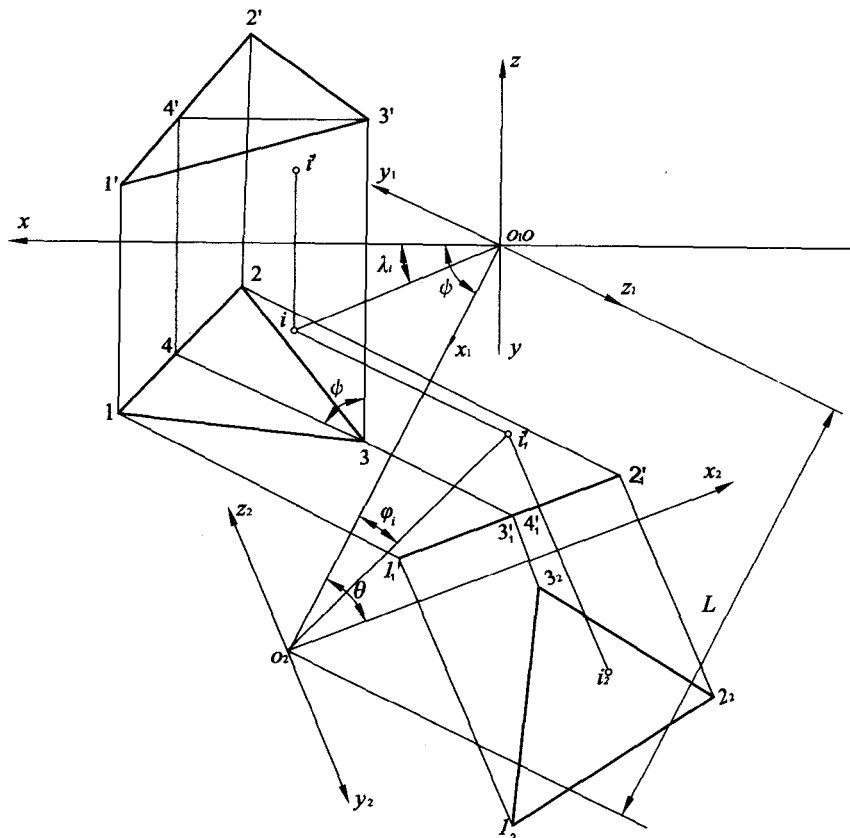


图 1-3 一般位置平面变换为投影面的平行面

o_2 、 o_1 相距为 L 。由投影变换的方法可知 L 的长度可以任意选取而对解题结果并无影响。将平面 $\triangle I II III$ 一次投影变换时,投影体系 $\frac{V}{H}$ 与新投影体系 $\frac{V_1}{H}$ 的相对位置取决于 H 面和 V_1 面的交线 x_1 轴的位置,也即由角 ψ 确定。第二次投影变换时,投影体系 $\frac{V_1}{H}$ 与新投影体系 $\frac{V_1}{H_2}$ 的相对位置取决于 H_2 面和 V_1 面的交线 x_2 轴的位置,也即由 θ 角确定。由此可知,平面经二次投影变换后,其投影取决于 ψ , θ 角,而 ψ , θ 则由投影变换的目的及已知条件确定。由图1-3中一般位置平面变换成投影面的平行面的作图步骤可知

$$\frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_4} = \frac{y_2 - y_4}{y_1 - y_4} = \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}; \quad (1-3)$$

$$z_3 = z_4$$

$$\text{令} \quad \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_4} = \frac{y_2 - y_4}{y_1 - y_4} = D$$

$$\text{则有} \quad D = \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$$

$$\text{由此得} \quad x_4 = \frac{Dx_1 - x_2}{D-1}; \quad y_4 = \frac{Dy_1 - y_2}{D-1}; \quad z_4 = z_3 \quad (1-4)$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{x_4 - x_3}{y_3 - y_4}\right) \quad (1-5)$$

在将一般位置平面变换为投影面的平行面的体系中,如有一点 $I(x_i, y_i, z_i)$ 随平面 $\triangle I II III$ 一起变换,则 I 点经一次投影变换后,其在 $o_1x_1y_1z_1$ 坐标系中的坐标为

$$\begin{cases} x_{i1} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \cos(\psi - \lambda_i) \\ y_{i1} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \sin(\psi - \lambda_i) \\ z_{i1} = z_i \end{cases} \quad (1-6)$$

I 点第二次投影变换后,其在 $o_2x_2y_2z_2$ 坐标系中的坐标为

$$\begin{cases} x_{i2} = \frac{L - x_{i1}}{\cos \varphi_i} \cos(\theta - \varphi_i) \\ y_{i2} = y_{i1} \\ z_{i2} = \frac{L - x_{i1}}{\cos \varphi_i} \sin(\theta - \varphi_i) \\ \theta = \arctan \left[\frac{z_1 - z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cos(\psi - \lambda_1) - \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cos(\psi - \lambda_2)} \right] \\ \lambda_1 = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right); \quad \lambda_2 = \arctan\left(\frac{y_2}{x_2}\right) \\ \varphi_i = \arctan\left[\frac{z_i}{L - x_i}\right] \end{cases} \quad (1-7)$$

式(1-6)、式(1-7)即为一般位置平面变换成投影面的平行面的数学模型。

1.3 投影变换计算机程序设计

将一般位置直线变换成投影面垂直线的程序设计

```
(defun C: Lp1 - 1())
```

Lp1 - 1 为程序名

```
(setq af0(getreal "af0="))
```

输入 af0 角

```
(setq bt0(getreal "bt0="))
```

输入 bf0 角

```
(setq L1(getreal "L1="))
```

输入 L1 值(任意)

```
(setq afr(/ (* af0 pi)180))
```

将 af0、bt0 角度转换成弧度

```
(setq btr(/ (* bt0 pi)180))
```

```
(setq s0(getpoint "enter start point"))
```

给出起始点 s0

```
(setq sx(car s0))
```

获取起始点的坐标 s0

```
(setq sy(cadr s0))
```

```
(setq sz(caddr s0))
```

```
(setq A(list 30 10 15))
```

给出 A、B 两点的坐标

```
(setq B(list 100 50 60))
```

```
(setq xa(+ sx(car A)))
```

获取 A、B 点的坐标

```
(setq ya(+ sy(cadr A)))
```

```
(setq za(+ sz(caddr A)))
```

```
(setq xb(+ sx(car B)))
```

```
(setq yb(+ sy(cadr B)))
```

```
(setq zb(+ sz(caddr B)))
```

```
(setq dya(/ ya xa))
```

求 A、B 两点对应的 λ

```
(setq lada(atan dya))
```

```
(setq dyb(/ yb xb))
```

```
(setq ladb(atan dyb))
```

```
(setq daa(- afr lada))
```

求 $\alpha - \lambda$

```
(setq dab(- afr ladb))
```

求 A、B 点一次变换后在 $o_1x_1y_1z_1$ 坐标系中的坐标

```
(setq xal(* (sqrt(+ (* xa xa) (* ya ya))) (cos daa)))
```

```
(setq yal(* (sqrt(+ (* xa xa) (* ya ya))) (sin daa)))
```

```
(setq zal za)
```

```
(setq xbl(* (sqrt(+ (* xb xb) (* yb yb))) (cos dab)))
```

```
(setq ybl(* (sqrt(+ (* xb xb) (* yb yb))) (sin dab)))
```

```
(setq zbl zb)
```

```
(setq fia(/ za (-L1 xa1)))
```

求第二次变换时 A、B 点对应的 ϕ 值

```
(setq fiar(atan fia))
```

```
(setq fib(/ zb (-L1 xb1)))
```

```
(setq fibr(atan fib))
```

求 x_1, x_2 轴的夹角 β

```
(setq ps(/ (* (sin afr)(cos btr))(cos afr)))
```

```
(setq psr(atan ps))
```

```
(setq bt1(-(/ pi 2)psr))
```

求 A、B 两点二次变换后在 $o_2 x_2 y_2 z_2$

坐标系中的坐标

```
(setq xa2(* (cos(- fiar bt1))/( (- L1 xa1) (cos fiar))))
```

```
(setq ya2 ya1)
```

```
(setq za2(* (sin(- fiar bt1))/( (- L1 xa1) (cos fiar))))
```

```
(setq xb2(* (cos(- fibr bt1))/( (- L1 xb1) (cos fibr))))
```

```
(setq yb2 yb1)
```

```
(setq zb2(* (sin(- fibr bt1))/( (- L1 xb1) (cos fibr))))
```

将一般位置平面变换成投影面平行线的程序设计

```
(defun C: Lp1-2()
```

Lp1-2 为程序名

```
(setq s0(getpoint "enter start point"))
```

给出起始点 s0

```
(setq L(getreal "\nL="))
```

输入 L(任意值)

```
(setq sx(car s0))
```

```
(setq sy(cadr s0))
```

取得 s0 点的坐标

```
(setq sz(caddr s0))
```

```
(setq xa(getreal "\nxa="))
```

输入平面 $\triangle ABC$ 三个点的坐标

```
(setq ya(getreal "\nya="))
```

(以 s0 为坐标系原点)

```
(setq za(getreal "\nza="))
```

```
(setq xb(getreal "\nxb="))
```

```
(setq yb(getreal "\nyb="))
```

```
(setq zb(getreal "\nzb="))
```

```
(setq xc(getreal "\nxc="))
```

```
(setq yc(getreal "\nyc="))
```

```
(setq zc(getreal "\nzc="))
```

```
(setq xa(+ xa sx))
```

求平面 $\triangle ABC$ 在世界坐标系中的坐标

```
(setq ya(+ ya sy))
```

```
(setq za(+ za sz))
```

```
(setq xb(+ xb sx))
```

```
(setq yb(+ yb sy))
```

```
(setq zb(+ zb sz))
```

```
(setq xc(+ xc sx))
```

```
(setq yc(+ yc sy))
```

```
(setq zc(+ zc sz))
```

```
(setq d(/ (-zb zc)(-za zc)))
```

求 D 点坐标

```
(setq xd(/ (-(* d xa) xb)(- d 1)))
```

```
(setq yd(/ (-(* d ya) yb)(- d 1)))
```

```
(setq zd zc)
```

```
(setq ps(/(- xd xc)(- yc yd)))
```

求 x, x_1 轴夹角 ψ

```
(setq pse(atan ps))
```

```
(setq dya(/ ya xa))
```

求 A、B、C 三点所对应的 λ 角

```
(setq lada(atan dya))
```

```
(setq dyb(/ yb xb))
```

```
(setq ladb(atan dyb))
```

```
(setq dyc(/ yc xc))
```

```
(setq ladc(atan dyc))
```

```
(setq xal(* (sqrt(+(* xa xa)(* ya ya)))(cos(- pse lada))))
```

求一次变换后 A、B、C 三点的新坐标

```
(setq yal(* (sqrt(+(* xa xa)(* ya ya)))(sin(- pse lada))))
```

```
(setq zal za)
```

```
(setq xbl(* (sqrt(+(* xb xb)(* yb yb)))(cos(- pse ladb))))
```

```
(setq ybl(* (sqrt(+(* xb xb)(* yb yb)))(sin(- pse ladb))))
```

```
(setq zbl zb)
```

```
(setq xcl(* (sqrt(+(* xc xc)(* yc yc)))(cos(- pse ladc))))
```

```
(setq ycl(* (sqrt(+(* xc xc)(* yc yc)))(sin(- pse ladc))))
```

```
(setq zcl zc)
```

```
(setq z12(- zb za))
```

```
(setq pl(* (sqrt(+(* xa xa)(* ya ya)))(cos(- pse lada))))
```

求 θ, ϕ 角

```
(setq p2(* (sqrt(+(* xb xb)(* yb yb)))(cos(- pse ladb))))
```

```
(setq sit(atan(/ z12(- pl p2))))
```

```
(setq fia(atan(/ za (- L xal))))
```

```
(setq fib(atan(/ zb (- L xbl))))
```

```
(setq fic(atan(/ zc (- L xcl))))
```

```
(setq xa2(* (/(- L xal)(cos fia))(cos(- sit fia))))
```

求 A、B、C 三点二次投影变换后的新坐标

```

(setq ya2 ya1)
(setq za2(* (/(- L xa1)(cos fia))(sin(- sit fia))))
(setq xb2(* (/(- L xb1)(cos fib))(cos(- sit fib))))
(setq yb2 yb1)
(setq zb2(* (/(- L xb1)(cos fib))(sin(- sit fib))))
(setq xc2(* (/(- L xc1)(cos fic))(cos(- sit fic))))
(setq yc2 yc1)
(setq zc2(* (/(- L xc1)(cos fic))(sin(- sit fic))))
(setq pa1(list xa1 za1))
(setq pb1(list xb1 zb1))
(setq pc1(list xc1 zc1))
(setq pa2(list xa2 ya2))
(setq pb2(list xb2 yb2))
(setq pc2(list xc2 yc2))
(setq av(list xa za))
(setq bv(list xb zb))
(setq cv(list xc zc))
(command "pline" av bv cv av "")          绘制新投影
(setq ah(list xa ya))
(setq bh(list xb yb))
(setq ch(list xc yc))
(command "pline" ah bh ch ah "")
(setq abc(ssget "l"))
(command "move" abc "" "120,110" "120,-300")
(command "pline" pa2 pb2 pc2 pa2 "")
(command "line" "0,0" "600,0" "")
(princ)
(command "zoom" "a")
)

```

1.4 形、数计算机几何问题综合解

1.4.1 几何元素度量和定位求解

1. 求解一般位置直线实长、方向角的方法

设线段 AB 端点 A 的坐标为 (x_a, y_a, z_a) ; B 点的坐标为 (x_b, y_b, z_b) 。由 A 点到 B 点的坐标差为: $\Delta x = x_b - x_a$; $\Delta y = y_b - y_a$; $\Delta z = z_b - z_a$ 。参考图 1-4(a)可知

$$\begin{aligned}
 (AB)^2 &= (Ab_1)^2 + (b_1B)^2 = (ab)^2 + (\Delta z)^2 \\
 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2
 \end{aligned}
 \tag{1-8}$$

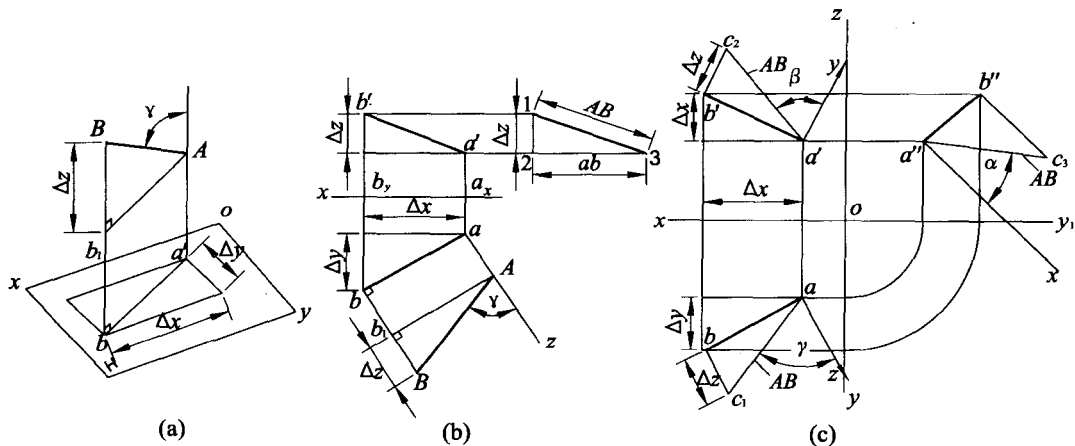


图 1-4 直线各参数之间的关系

所以

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

$$= \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

要注意式(1-8)右边是坐标差平方和的算术平方根。设长度为 $AB = S$, 则

$$\begin{aligned}\Delta z &= z_b - z_a = S \cos \gamma = nS \\ \Delta y &= y_b - y_a = S \cos \beta = mS \\ \Delta x &= x_b - x_a = S \cos \alpha = lS\end{aligned}\quad (1-9)$$

所以由坐标差不但可求实长,也可求方向余弦或方向角。反过来也可由实长和方向角求投影:

$$\begin{aligned}ab &= S \sin \gamma \\ a'b' &= S \sin \beta \\ a''b'' &= S \sin \alpha\end{aligned}\quad (1-10)$$

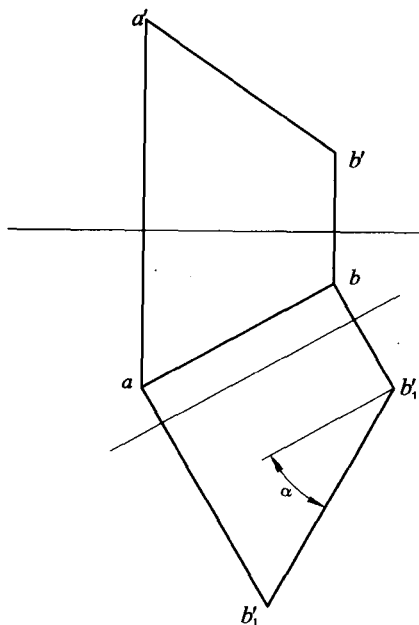


图 1-5 求直线与 H 面的夹角

这里要注意方向角不大于 180° , 其余弦有正负以便说明线段和坐标的向背, 但正弦均为正值, 即投影长恒为正。也可以由投影图解以上问题。在图 1-4(a) 中 AB 和 ab 是直角梯形的两腰。这梯形的两底 Aa 和 Bb 分别等于投影图 1-4(b) 中的 $a'a_x$ 和 $b'b_x$; 直角腰 ab 是投影图中的 H 投影。所以在投影图中可以作出梯形 $aABb$, 其斜腰为实长 AB , 而 AB 与 z 轴的正方向之间的夹角就是 γ 。为简便, 可以只作直角梯形斜腰部分的直角 $\triangle Ab_1B$ 。图 1-4(c) 把这种方法推广于 V 、 W 投影, 即: 以 AB 的 H 、 V 、 W 投影 ab 、 $a'b'$ 、 $a''b''$ 和坐标差 Δz 、 Δy 、 Δx 为直角边作 $\triangle$, 则斜边为 AB 实长, AB 与 $+z$ 、 $+y$ 、 $+x$ 之间的夹角为 γ 、 β 、 α 。

[例 1-1] 已知 A 点的坐标为 $x_a = 50$, $y_a = 60$, $z_a = 80$; B 点的坐标为 $x_b = 120$, $y_b = 20$, $z_b = 30$; 试求 AB 直线与 H 面的倾角 α , 见图 1-5。