機械工程學報

第 4 卷　　　　第 2 期

1956

中国机械工程学会編輯
科 学 出 版 社 出 版

机械工程学报

第四卷　第二期

目　　录

CHINESE JOURNAL OF MECHANICAL ENGINEERING

Vol. 4, No. 2

CONTENTS

机 械 工 程 学 报
第4卷 第2期 1956年12月

連續滑动接触共軛曲面原理及其应用

陈 志 新
(中国人民解放軍)

摘　　要

直到目前，关于滑动接触共軛曲面的原理方面，尙沒有一个完整而普遍的理論．本文的目的，就是企圖滿足这方面的要求；并以連續滑动接触的共軛条件为基础，而給予共軛曲面的計算一个普遍而全面的分析．在討論中，由于采用科学的純分析法，替代了一般所習常采用的圖解分析混合法(例如見文献[1,2,3,4])，因而使分析适用的范圍大大地推广了．打破了等速比、固定中心距、無軸向位移及兩軸或是平行或是垂直等等的限制，而使其可适用以分析更普遍性的共軛問題，即不等速比、变动中心距、有軸向位移以及兩軸間夾角为某任何値时的共軛問題．同时由于純分析法的严格邏輯性，更可糾正圖解分析混合法中，由于主观推論或由于圖形复杂以致辨別不清等所造成的一些錯誤結論．在本文中就文献[1,3]中的一些錯誤作了一些討論(見本文二、(三)节、九(一)节及七、(二)节)．

以外，本文还証明了一些直[illegible]严格証明的或尙未报导过的一些結論．例如漸开綫螺旋齒輪的共軛問[illegible]共軛"曲面(六、节)、"轉动位移互換特性"关系式(七、节)等．

关于連續滾动接触共軛[illegible]面 [illegible]节面)[illegible]分析，[illegible]作为連續滑动接触共軛的一个蛻变情况而加以討論的；并对其存在[illegible]条件作了結[illegible]八、(一)节)．

最后(九、节)，对共軛曲面原理在实际工業生产中的广泛应用，作了初步的探討．并对制造"双曲綫"齒輪时的范成运动，較之文献[5,6]作了更簡練而严格的証明(九、(二)节)．

为了在分析計算过程中簡化算式，因此采用了向量分析的运算．所采用的向量計算符号均系根据文献[7]．但最后的計算結果，为了便于应用起見，均系利用直角座标系統表示之．

一、一个預备定理

設$\vec{A}$为任何一向量，$\vec{\omega}$为任何一單位向量，若令$\vec{A}$繞$\vec{\omega}$軸迴轉ε角后而获得一新向量为$\vec{a}$，則

$$\vec{a}=\cos\varepsilon\vec{A}+(1-\cos\varepsilon)(\vec{A}\cdot\vec{\omega})\vec{\omega}+\sin\varepsilon(\vec{\omega}\cdot\vec{A}). \tag{1.1}$$

(1.1) 式的推演甚簡單，可先設：

$$\vec{a}=x\vec{A}+y\vec{\omega}+z(\vec{\omega}\cdot\vec{A}). \tag{1.2}$$

然后利用 $\vec{a}$、$\vec{A}$ 間的三个关系条件：

(1) $\vec{a}$、$\vec{A}$ 的長度相等；

(2) $\vec{a}$、$\vec{A}$ 与 $\vec{\omega}$ 間的夾角相等；

(3) $\vec{a}$、$\vec{A}$ 在垂直于 $\vec{\omega}$ 的平面上之投影綫間的夾角为 ε。

可解得 x、y、z；并將其代回(1.2)式中，即获得(1.1)式。

二、連續滑动接触的共軛条件

(一) 符号的定义：

$\vec{\omega}_1$、$\vec{\omega}_2$——沿第一、第二軸軸綫的單位向量。

Ω_1、Ω_2——第一、第二軸的瞬时迴轉角速度值。

$\vec{p}$——沿一、二兩軸間任一联綫的單位向量，其起点則位于第一軸上。

l——沿 $\vec{p}$ 方向一、二兩軸間的中心距。

$\vec{R}_1$、$\vec{R}_2$——在原始位置时第一、第二軸之共軛曲面上的一对共軛点向量；各以 $\vec{p}$ 中心联綫与第一、第二軸的交点作为其原点。

$\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$——$\vec{R}_1$、$\vec{R}_2$ 点在接触位置时的点向量，各以該时（即接触位置时）之 $\vec{p}$ 中心联綫与第一、第二軸的交点作为其原点。

ε_1、ε_2——由 $\vec{R}_1$、$\vec{R}_2$ 至 $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ 繞 $\vec{\omega}_1$、$\vec{\omega}_2$ 軸所轉过的角度值（正負值按右手規則确定）。

σ_1、σ_2——$\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ 之原点至該时（即接触位置时）之 $\vec{R}_1$、$\vec{R}_2$ 的原点間之距离，各以 $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ 的原点为起点，并各以 $\vec{\omega}_1$、$\vec{\omega}_2$ 为正向；且均設为 ε_1 的函数，即 $\sigma_1=\sigma_1(\varepsilon_1)$、$\sigma_2=\sigma_2(\varepsilon_1)$；由 $\vec{R}_1$、$\vec{R}_2$、$\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ 之原点的定义，显然可得：当 $\varepsilon_1=0$ 时，$\sigma_1=\sigma_2=0$。

$\vec{N}_1$、$\vec{N}_2$——在原始位置时，第一、第二軸之共軛曲面在 $\vec{R}_1$、$\vec{R}_2$ 点的單位法向向量（各以指向离开 $\vec{R}_1$、$\vec{R}_2$ 原点之方向为正向）。

$\vec{n}_1$、$\vec{n}_2$——在接触位置时，第一、第二軸之共軛曲面在 $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ 点的單位法向向量（各以指向离开 $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ 原点之方向为正向）。

(二) 連續滑动接触的四个基本共軛条件：

1. 由于一对共軛点在接触位置时相互重合，則

$$\vec{r}_1-\vec{r}_2=l\vec{p}. \tag{2.1}$$

2. 由于一对共軛点在接触位置时，兩共軛曲面將相互相切于該对共軛点处，則

$$\vec{n}_1=-\vec{n}_2 \text{（外嚙合）}; \tag{2.2}$$

或
$$\vec{n}_1=\vec{n}_2 \text{（內嚙合）}. \tag{2.2a}$$

为了避免重复，本文內將限于討論外嚙合的情形。

3. 由于系連續滑动接触，接触点在其公法綫方向的分速度必須相等，即：

$$\left[(\Omega_1\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)+\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\Omega_1\vec{\omega}_1\right]\cdot\vec{n}_1$$

$$=\left[(\Omega_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)+\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}\Omega_1\vec{\omega}_2+\frac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}\Omega_1\right]\cdot\vec{n}_1. \tag{2.3}$$

4. 由于兩共軛曲面保持連續接触，ε_1、ε_2 間將是一一对应的，即 $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1)$；因而 $\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}$ 存在。同时由瞬时角速度的定义，更得：

$$\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}=\frac{\frac{d\varepsilon_2}{dt}}{\frac{d\varepsilon_1}{dt}}=\frac{\Omega_2}{\Omega_1}=M(\varepsilon_1). \tag{2.4}$$

（三）兩軸位置固定不变及無軸向位移条件下(2.3)式的簡化及节点的新定义：

在所述条件下，$\frac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}=\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}=\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}=0$；再利用(2.1)式，(2.3)式可簡化成为：

$$[(\Omega_1\vec{\omega}_1-\Omega_2\vec{\omega}_2)\times\vec{r}_1]\cdot\vec{n}_1=-l\Omega_2(\vec{\omega}_2\times\vec{p})\cdot\vec{n}_1. \tag{2.5}$$

并令：

$$k=\frac{-l\Omega_2(\vec{\omega})_2\times\vec{p})\cdot\vec{n}_1}{[(\Omega_1\vec{\omega}_1-\Omega_2\vec{\omega}_2)\times\vec{p}]\cdot\vec{n}_1}. \tag{2.6}$$

將其代入(2.5)式并化簡之，可得：

$$[(\Omega_1\vec{\omega}_1-\Omega_2\vec{\omega}_2)\times(\vec{r}_1-k\vec{p})]\cdot\vec{n}_1=0.$$

由此式則得：

$$\vec{r}_1=k\vec{p}+a(\Omega_1\vec{\omega}_1-\Omega_2\vec{\omega}_2)+b\vec{n}_1. \tag{2.7}$$

(2.7) 式中 a、b 为兩参数，由共軛曲面的形狀决定；$k\vec{p}$ 項系代表联心綫上的一点，由于其在用圖解分析混合法分析共軛曲面时起着很大的功用，因此給予了特定的名称“节点”（見文献[1,2]）。显然，由 (2.7) 式可获得“节点”之較为严格的新定义：在以 $\vec{p}$、$(\Omega_1\vec{\omega}_1-\Omega_2\vec{\omega}_2)$、$\vec{n}_1$ 三向量組成的并以 $\vec{p}$ 与第一軸軸綫的交点为原点的座标空間中，接触点在 $\vec{p}$ 座标軸上的投影点称之謂“节点”。所指的投影当然不一定是直角投影，而是与上述三个向量組成的座标空間相适应的投影。

(2.6) 式所定义的 k 值，在各种兩軸間的相对位置之条件下，可进一步簡化如

下：

1. 当兩軸平行时，$\vec{\omega}_1=\pm\vec{\omega}_2$，則(2.6)式可簡化为：

$$k=\frac{l\Omega_2}{\mp\Omega_1+\Omega_2}. \tag{2.8}$$

因而当$\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$=常数，即等速比傳动时，$k$將为一常数，而节点將为联心綫上之一定点，不随迴轉角度之多寡变更其位置。

2. 当兩軸不平行时，$\vec{\omega}_1\neq\pm\vec{\omega}_2$；可先令$\vec{p}\perp\vec{\omega}_1$、$\vec{\omega}_2$，即令：$\vec{p}=\frac{(\vec{\omega}_1\times\vec{\omega}_2)}{\sqrt{1-(\vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_2)^2}}$，將其代入(2.6)式中，幷化簡之，則得：

$$k=\frac{l\Omega_2[(\vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_2)(\vec{\omega}_2\cdot\vec{n}_1)-(\vec{\omega}_1\cdot\vec{n}_1)]}{[\Omega_1(\vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_2)-\Omega_2](\vec{\omega}_1\cdot\vec{n}_1)-[\Omega_1-\Omega_2(\vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_2)](\vec{\omega}_2\cdot\vec{n}_1)}. \tag{2.9}$$

若兩軸相交，$l=0$，則$k=0$，节点將位于兩軸的交点上。

若兩軸不相交，$l\neq0$，則由(2.9)式知k值非但决定于l、$\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$、$(\vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_2)$，同时又决定于$\vec{n}_1$。由于$\vec{n}_1$在一般情况下，是随迴轉角度的多寡而变更的，因此即使在等速比傳动条件下，即$\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$=常数时，节点的位置一般仍將随迴轉角度的多寡而变更。这一点与上段討論之兩軸平行条件下的节点之特性是有所区别的。在文献[1]的第17章中，正是沒有顧及到这个区别，而毫無根据地把平行兩軸条件下的节点特性推广至不平行不相交的兩軸条件下去計算齿形曲面，結果使得整个該章中之有关計算公式和計算結果都成为是錯誤的。关于它的具体錯誤，將于本文之九、(一)节中較詳細地討論之。

三、共軛曲面的独立关系方程式

共軛曲面的关系方程式有下列三大类：

(1) 座标轉換关系方程式：由二、(一)节中符号的定义及一、节中的預备定理(1.1)式，可得下列諸方程式：

$$\vec{r}_1=\vec{R}_1\cos\varepsilon_1+(1-\cos\varepsilon_1)(\vec{R}_1\cdot\vec{\omega}_1)\vec{\omega}_1+\sin\varepsilon_1(\vec{\omega}_1\times\vec{R}_1)+\sigma_1\vec{\omega}_1. \tag{3.1}$$

$$\vec{r}_2=\vec{R}_2\cos\varepsilon_2+(1-\cos\varepsilon_2)(\vec{R}_2\cdot\vec{\omega}_2)\vec{\omega}_2+\sin\varepsilon_2(\vec{\omega}_2\times\vec{R}_2)+\sigma_2\vec{\omega}_2. \tag{3.2}$$

$$\vec{n}_1=\vec{N}_1\cos\varepsilon_1+(1-\cos\varepsilon_1)(\vec{N}_1\cdot\vec{\omega}_1)\vec{\omega}_1+\sin\varepsilon_1(\vec{\omega}_1\times\vec{N}_1). \tag{3.3}$$

$$\vec{n}_2=\vec{N}_2\cos\varepsilon_2+(1-\cos\varepsilon_2)(\vec{N}_2\cdot\vec{\omega}_2)\vec{\omega}_2+\sin\varepsilon_2(\vec{\omega}_2\times\vec{N}_2). \tag{3.4}$$

(2) 曲面的几何关系方程式：由于$\vec{R}_1$、$\vec{R}_2$为相互共軛点，是一一对应的，因此可設共軛曲面方程式为：$\vec{R}_1=\vec{R}_1(u,v)$及$\vec{R}_2=\vec{R}_2(u,v)$，其中u、v为兩独立参变数。由曲面的單位法向向量的定义可得：

$$\vec{N}_1=\frac{\left(\frac{\partial\vec{R}_1}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{R}_1}{\partial v}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial\vec{R}_1}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{R}_1}{\partial v}\right)\cdot\left(\frac{\partial\vec{R}_1}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{R}_1}{\partial v}\right)}}. \tag{3.5}$$

$$\vec{N}_2=\frac{\left(\frac{\partial\vec{R}_2}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{R}_2}{\partial v}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial\vec{R}_2}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{R}_2}{\partial v}\right)\cdot\left(\frac{\partial\vec{R}_2}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{R}_2}{\partial v}\right)}}. \tag{3.6}$$

(3) 連續滑动接触共軛条件之关系方程式：即 (2.1)、(2.2)、(2.3)、(2.4) 四式。

由于每个普通向量代表着三个变量，每个單位向量（由于其長度已确定为單位長度）代表着兩个变量，因此上述这些关系方程式总共代表着 21 个方程式。但这些方程式并不是彼此完全独立的，(3.6)式可由其余各式推演获得，如下所示：

由(3.1)及(3.3)兩式可推导得：

$$\vec{R}_1=\vec{r}_1\cos\varepsilon_1+(1-\cos\varepsilon_1)(\vec{r}_1\cdot\vec{\omega}_1)\vec{\omega}_1-\sin\varepsilon_1(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)-\sigma_1\vec{\omega}_1.$$
$$\vec{N}_1=\vec{n}_1\cos\varepsilon_1+(1-\cos\varepsilon_1)(\vec{n}_1\cdot\vec{\omega}_1)\vec{\omega}_1-\sin\varepsilon_1(\vec{\omega}_1\times\vec{n}_1).$$

由此兩式可进一步导得：

$$\vec{N}_1\cdot\frac{\partial\vec{R}_1}{\partial u}=\vec{n}_1\cdot\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial u}-\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial u}\left[(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)+\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\vec{\omega}_1\right]\cdot\vec{n}_1. \tag{3.7}$$

同样，由(3.2)及(3.4)兩式可推导得：

$$\vec{N}_2\cdot\frac{\partial\vec{R}_2}{\partial u}=\vec{n}_2\cdot\frac{\partial\vec{r}_2}{\partial u}-\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial u}\left[(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)+\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_2}\vec{\omega}_2\right]\cdot\vec{n}_2. \tag{3.8}$$

由于 ε_1、ε_2 仅决定于共軛点 $\vec{R}_1$ 的位置，它們將仅为 u、v 的函数；同时由于 u、v 为相互独立的兩参变数，故得：

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1}=\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}=\frac{\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial u}du+\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial v}dv}{\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial u}du+\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial v}dv}=\frac{\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial u}}{\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial u}}=\frac{\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial v}}{\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial v}}. \tag{3.9}$$

將(2.1)式兩边对 u 偏微分，則得：

$$\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial u}-\frac{\partial\vec{r}_2}{\partial u}=\frac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial u}. \tag{3.10}$$

利用 (2.2)、(2.3)、(3.9)、(3.10) 四式，可証明 (3.7)、(3.8) 兩式等号右边部份彼此相等而仅差一符号，因而获得：

$$\vec{N}_1\cdot\frac{\partial\vec{R}_1}{\partial u}=-\vec{N}_2\cdot\frac{\partial\vec{R}_2}{\partial u}. \tag{3.11}$$

同理可証：

$$\vec{N}_1\cdot\frac{\partial\vec{R}_1}{\partial v}=-\vec{N}_2\cdot\frac{\partial\vec{R}_2}{\partial v}. \tag{3.12}$$

由 (3.5) 式可得，$\vec{N}_1\cdot\frac{\partial\vec{R}_1}{\partial u}=\vec{N}_1\cdot\frac{\partial\vec{R}_1}{\partial v}=0$；因此根据 (3.11)、(3.12) 兩式得，$\vec{N}_2\cdot\frac{\partial\vec{R}_2}{\partial u}=\vec{N}_2\cdot\frac{\partial\vec{R}_2}{\partial v}=0$；即 $\vec{N}_2\perp\frac{\partial\vec{R}_2}{\partial u}$、$\frac{\partial\vec{R}_2}{\partial v}$。同时自定义又知 $\vec{N}_2$ 为一單位向量。至此，即自其余各式推演得到了(3.6)式。

由于 (3.6) 式为單位向量的关系方程式，它只代表着兩个方程式，因此在前述的总共 21 个方程式中，独立的关系方程式將只有 19 个。此 19 个方程式也就是共軛曲面的独立关系方程式。

在变数方面，同样把向量变数归算成为普通变数，則总計有：$\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$、$\vec{R}_1$、$\vec{R}_2$、$\vec{n}_1$、$\vec{n}_2$、$\vec{N}_1$、$\vec{N}_2$、ε_1、ε_2、σ_1、σ_2、$l\vec{p}$、及$\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$(由于在关系方程式中，仅与此比値有关，而与 Ω_1、Ω_2 的絕对值無关)，合計为 28 个。因此为了使一个共軛曲面問題能获解，必須給予且只須給予 9 个独立条件。在兩軸位置固定不变及無軸向位移条件下，由于已給予了：$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}=\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}=\frac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}=0$，共計 5 个独立条件，因此只須（且必須）再給予 4 个独立条件就够了；若更給予了兩軸間傳动速比之值：$\frac{\Omega_2}{\Omega_1}=M(\varepsilon_1)$，則只須(且必須)再給予 3 个独立条件就够了。

四、在已知：$\sigma_1=\sigma_1(\varepsilon_1)$、$\sigma_2=\sigma_2(\varepsilon_1)$、$l\vec{p}=f(\varepsilon_1)\vec{i}+h(\varepsilon_1)\vec{j}$、并設 $\vec{\omega}_1=\vec{k}$、$\vec{\omega}_2=-\sin\alpha\vec{j}-\cos\alpha\vec{k}$ 条件下的三类共軛曲面問題及其普遍解

(一)　三类共軛曲面問題。

根据上节分析，在所述条件下只須再給予 4 个独立条件就够了；但这些条件可通过三种不同方式給予，这样就形成了三类共軛曲面問題：

1. 第一类共軛曲面問題：給予一共軛曲面方程式：$\vec{R}_1=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$ 及 $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1)$，求对应之共軛曲面方程式：$\vec{R}_2=x'\vec{i'}+y'\vec{j'}+z'\vec{k'}$及接触曲面方程式：$\vec{r}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$。其中$\vec{i'}$、$\vec{j'}$、$\vec{k'}$ 为与 $\vec{\omega}_2$ 相适应的直角座标軸，即：$\vec{i'}=\vec{i}$、$\vec{j'}=\cos\alpha\vec{j}-\sin\alpha\vec{k}$、$\vec{k'}=-\vec{\omega}_2=\sin\alpha\vec{j}+\cos\alpha\vec{k}$；利用这一組座标軸，可使所求得之共軛曲面方程式，更明确地表达曲面的形狀。一般所遇到的共軛曲面問題大都是屬于这一类。

2. 第二类共軛曲面問題：給予一接触曲面方程式：$\vec{r}_1=x_1(u、v)\vec{i}+y_1(u、v)\vec{j}+z_1(u、v)\vec{k}$，其起始的接触曲綫：$\varepsilon_1=0$ 时 $u=u_0(v)$ 及 $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1)$，求与其相对应的一对共軛曲面方程式：$\vec{R}_1=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 及 $\vec{R}_2=x'\vec{i'}+y'\vec{j'}+z'\vec{k'}$。

3. 第三类共軛曲面問題：給予一对共軛曲面方程式：$\vec{R}_1=x(u、v)\vec{i}+y(u、v)\vec{j}+z(u、v)\vec{k}$ 及 $\vec{R}_2=x'(q、t)\vec{i'}+y'(q、t)\vec{j'}+z'(q、t)\vec{k'}$，求其接触軌迹：$\vec{r}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ 及 $\varepsilon_1、\varepsilon_2$ 間的关系式。

（二）　第一类共軛曲面問題的普遍解：

利用給予的共軛曲面方程式及(3.1)、(2.1)、(3.5)、(3.3) 四式，可將 $\vec{r}_1、\vec{r}_2、\vec{N}_1、\vec{n}_1$ 依次表为 $u、v、\varepsilon_1$ 的函数。利用給予的关系式：$\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1)$ 及 (2.4) 式，可求得 $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}=M(\varepsilon_1)$。將所求得之結果代入 (2.3) 式，即可获得 $u、v、\varepsilon_1$ 間的一关系式；由此式可求得 $\varepsilon_1=\varepsilon_1(u、v)$（这一步一般須用試算法完成之）。然后將求得之 ε_1 代回 $\vec{r}_1$ 式中，即解得所求之接触曲面方程式；代回 $\vec{r}_2$ 式中并利用(3.2)式及 $\vec{i'}、\vec{j'}、\vec{k'}$ 直角座标系統，即解得所求之对应的共軛曲面方程式。通过具体演算，得此类問題的普遍解如下：对应共軛曲面的計算公式为：

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1)\quad（已知条件）.\\
&\frac{\Omega_2}{\Omega_1}=\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}=M(\varepsilon_1).\\
&A=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}.\\
&B=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}.\\
&C=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.\\
&U=A\left[Mh\cos\alpha+M(z+\sigma_1)\sin\alpha-\frac{df}{d\varepsilon_1}\right]\\
&\qquad-B\left(Mf\cos\alpha+\frac{dh}{d\varepsilon_1}-\sin\alpha\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}\right)-CMx\sin\alpha.\\
&V=A\left(Mf\cos\alpha+\frac{dh}{d\varepsilon_1}-\sin\alpha\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}\right)\\
&\qquad+B\left[Mh\cos\alpha+M(z+\sigma_1)\sin\alpha-\frac{df}{d\varepsilon_1}\right]-CMy\sin\alpha.\\
&\tan\delta=\frac{V}{U}.\\
&\cos(\varepsilon_1+\delta)=\frac{(1+M\cos\alpha)(Ay-Bx)-CMf\sin\alpha-C\cos\alpha\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}-C\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}}{\sqrt{U^2+V^2}}.
\end{aligned}\right\}\qquad(4.1)$$

$$\left.\begin{aligned}
x' &= x(\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2-\cos\alpha\sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_2)\\
&\quad -y(\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_2+\cos\alpha\cos\varepsilon_1\sin\varepsilon_2)\\
&\quad +(z+\sigma_1)\sin\alpha\sin\varepsilon_2-f\cos\varepsilon_2+h\cos\alpha\sin\varepsilon_2.\\
y' &= x(\cos\varepsilon_1\sin\varepsilon_2+\cos\alpha\sin\varepsilon_1\cos\varepsilon_2)\\
&\quad +y(\cos\alpha\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2-\sin\varepsilon_1\sin\varepsilon_2)\\
&\quad -(z+\sigma_1)\sin\alpha\cos\varepsilon_2-f\sin\varepsilon_2-h\cos\alpha\cos\varepsilon_2.\\
z' &= x\sin\alpha\sin\varepsilon_1+y\sin\alpha\cos\varepsilon_1+(z+\sigma_1)\cos\alpha-h\sin\alpha+\sigma_2.
\end{aligned}\right\}$$

接触曲面的計算公式为：

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= x\cos\varepsilon_1-y\sin\varepsilon_1.\\
y_1 &= x\sin\varepsilon_1+y\cos\varepsilon_1.\\
z_1 &= z+\sigma_1.
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

及(4.1)中起首的 9 个計算公式。

(三) **第二类共轭曲面問題的普遍解：**

由給予的关系式：$\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1)$ 及 (2.4) 式，可求得$\dfrac{\Omega_2}{\Omega_1}=M(\varepsilon_1)$。由 (2.3)、(3.5)、(3.7) 三式則知：$\left[(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)-M(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)+\dfrac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\vec{\omega}_1-\dfrac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}\vec{\omega}_2-\dfrac{d(l\vec{p})}{d\varepsilon_1}\right]$、$\left[\dfrac{\partial\vec{r}_1}{\partial u}-\dfrac{\partial\varepsilon_1}{\partial u}\left(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\dfrac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\vec{\omega}_1\right)\right]$、$\left[\dfrac{\partial\vec{r}_1}{\partial v}-\dfrac{\partial\varepsilon_1}{\partial v}\left(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\dfrac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\vec{\omega}_1\right)\right]$三向量均系与$\vec{n}_1$垂直，因此系共面向量，其混合积等于零。利用給予的接触曲面方程式及 (2.1) 式，此条件經过一系列的演算可簡化得一偏微分方程式：

$$a_0+b_0\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial u}+c_0\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial v}=0. \tag{4.3}$$

其中：

$$a_0=P_1A_1+P_2B_1+P_3C_1.$$

$$\begin{aligned}
b_0=&-\frac{\partial z_1}{\partial v}(x_1P_1+y_1P_2)+\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\left(P_1\frac{\partial y_1}{\partial v}-P_2\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)\\
&+P_3\left(x_1\frac{\partial x_1}{\partial v}+y_1\frac{\partial y_1}{\partial v}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_0=&\frac{\partial z_1}{\partial u}(x_1P_1+y_1P_2)-\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\left(P_1\frac{\partial y_1}{\partial u}-P_2\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)\\
&-P_3\left(x_1\frac{\partial x_1}{\partial u}+y_1\frac{\partial y_1}{\partial u}\right).
\end{aligned}$$

而
$$A_1=\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v}-\frac{\partial y_1}{\partial v}\frac{\partial z_1}{\partial u}.$$
$$B_1=\frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}-\frac{\partial z_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}.$$
$$C_1=\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v}-\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial y_1}{\partial u}.$$
$$P_1=y_1\,(1+M\cos\alpha)-Mz_1\sin\alpha+\frac{df}{d\varepsilon_1}-Mh\cos\alpha.$$
$$P_2=-x_1(1+M\cos\alpha)-\sin\alpha\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}+\frac{dh}{d\varepsilon_1}+Mf\cos\alpha.$$
$$P_3=Mx_1\sin\alpha-\cos\alpha\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}-\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}-Mf\sin\alpha.$$

設 $g(u、v、\varepsilon_1)=0$ 为(4.3)偏微分方程式之解；由于 $\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial u}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial u}}{\frac{\partial g}{\partial\varepsilon_1}}$、$\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial v}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial g}{\partial\varepsilon_1}}$、故由(4.3)式可推化得：

$$-a_0\frac{\partial g}{\partial\varepsilon_1}+b_0\frac{\partial g}{\partial u}+c_0\frac{\partial g}{\partial v}=0. \tag{4.4}$$

現設 $f_1(u、v、\varepsilon_1)=0$、$f_2(u、v、\varepsilon_1)=0$、$f_3(u、v、\varepsilon_1)=0$ 三式均能满足(4.3)式，則由(4.4) 式得：

$$-a_0\frac{\partial f_1}{\partial\varepsilon_1}+b_0\frac{\partial f_1}{\partial u}+c_0\frac{\partial f_1}{\partial v}=0.$$
$$-a_0\frac{\partial f_2}{\partial\varepsilon_1}+b_0\frac{\partial f_2}{\partial u}+c_0\frac{\partial f_2}{\partial v}=0.$$
$$-a_0\frac{\partial f_3}{\partial\varepsilon_1}+b_0\frac{\partial f_3}{\partial u}+c_0\frac{\partial f_3}{\partial v}=0.$$

由于一般情况下 $a_0、b_0、c_0$ 不会同时都等于零，故上述三式的判别式也就是 f_1、f_2、f_3 三函数的雅科比行列式必須等于零；即：$\Delta=J=\frac{D(f_1、f_2、f_3)}{D(u、v、\varepsilon_1)}=0$.

由高等数学分析知（見文献[8]）：若 $J=0$ 且 f_1、f_2 互为独立函数时，則 $f_3=f_3(f_1、f_2)$。因此，若 $f_1(u、v、\varepsilon_1)=0$ 及 $f_2(u、v、\varepsilon_1)=0$ 为 (4.3) 偏微分方程式的兩个彼此独立的特殊解，則其普遍解將为：$f_3=f_3(f_1、f_2)$。現須在普遍解中选一解，而使其能滿足端点条件：$\varepsilon_1=0$ 时 $u=u_0(v)$。当 $\varepsilon_1=0$ 时：

$$f_1=f_{10}=f_1[u_0(v)、v、0]=f_{10}(v);$$
$$f_2=f_{20}=f_2[u_0(v)、v、0]=f_{20}(v).$$

在上兩式中，視 f_{10}、f_{20} 为变数而消去 v；則得与 v 無关的关系式：

$$F(f_{10}、f_{20})=0. \tag{4.5}$$

在(4.5)式中，分别以 f_1、f_2 替代 f_{10}、f_{20}；所得之方程式：

$$F(f_1、f_2)=0. \tag{4.6}$$

即为所要求之解；由于：

(1) $f_1(u、v、\varepsilon_1)=0$ 及 $f_2(u、v、\varepsilon_1)=0$ 为 (4.3) 之解而 F 又为 f_1、f_2 的函数；根据上面分析得：(4.6)式必定能滿足(4.3)偏微分方程式。

(2) 当 $\varepsilon_1=0$ 时，若 $u=u_0(v)$，由(4.5)式得：$F(f_1、f_2)=F(f_{10}、f_{20})\equiv 0$（与 v 值無关）；即当 $\varepsilon_1=0$ 时，$F(f_1、f_2)=0$ 与 $u=u_0(v)$ 將是相等当的；換句話說：就是 $F(f_1、f_2)=0$ 能滿足端点条件。

显然，由(4.6)式可解得：

$$\varepsilon_1=\varepsilon_1(u、v). \tag{4.7}$$

利用給予的接触曲面方程式及(4.7)式，由 (3.1) 式可得第一共軛曲面的計算公式为：

$$\left.\begin{aligned}
&x=x_1\cos\varepsilon_1+y_1\sin\varepsilon_1.\\
&y=-x_1\sin\varepsilon_1+y_1\cos\varepsilon_1.\\
&z=z_1-\sigma_1.
\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

利用給予的接触曲面方程式、(4.7) 式及 $\vec{i'}$、$\vec{j'}$、$\vec{k'}$ 座标系統，由 (2.1) 及 (3.2) 兩式可得第二共軛曲面的計算公式为：

$$\left.\begin{aligned}
&x'=(x_1-f)\cos\varepsilon_2-[(y_1-h)\cos\alpha-z_1\sin\alpha]\sin\varepsilon_2.\\
&y'=(x_1-f)\sin\varepsilon_2+[(y_1-h)\cos\alpha-z_1\sin\alpha]\cos\varepsilon_2.\\
&z'=(y_1-h)\sin\alpha+z_1\cos\alpha+\sigma_2.
\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

（四）　第三类共軛曲面問題的普遍解：

利用給予的一对共軛曲面方程式及 (3.1)、(3.2)、(3.5)、(3.6)、(3.3)、(3.4) 六式，可將 $\vec{r_1}$、$\vec{r_2}$、$\vec{N_1}$、$\vec{N_2}$、$\vec{n_1}$、$\vec{n_2}$ 依次表为 u、v、q、t、ε_1、ε_2 的函数。將求得之結果代入 (2.1)及(2.2) 兩式内，經化簡后得：

$$\left.\begin{aligned}
&x\cos\varepsilon_1-y\sin\varepsilon_1=x'\cos\varepsilon_2+y'\sin\varepsilon_2+f.\\
&x\sin\varepsilon_1+y\cos\varepsilon_1=-(x'\sin\varepsilon_2-y'\cos\varepsilon_2)\cos\alpha+(z'-\sigma_2)\sin\alpha\\
&\qquad +h.\\
&z+\sigma_1=(x'\sin\varepsilon_2-y'\cos\varepsilon_2)\sin\alpha+(z'-\sigma_2)\cos\alpha.
\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{A\cos\varepsilon_1-B\sin\varepsilon_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=-\frac{A'\cos\varepsilon_2+B'\sin\varepsilon_2}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.\\&\frac{A\sin\varepsilon_1+B\cos\varepsilon_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{(A'\sin\varepsilon_2-B'\cos\varepsilon_2)\cos\alpha-C'\sin\alpha}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.\end{aligned}\right\}$$

其中：

$$A=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

$$B=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

$$C=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

$$A'=\frac{\partial y'}{\partial q}\frac{\partial z'}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial t}\frac{\partial z'}{\partial q}.$$

$$B'=\frac{\partial z'}{\partial q}\frac{\partial x'}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial q}.$$

$$C'=\frac{\partial x'}{\partial q}\frac{\partial y'}{\partial t}-\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial y'}{\partial q}.$$

(4.10) 內共包括 5 个方程式，所牽涉到的未知数則为 u、v、q、t、ε_2、ε_1 共計 6 个。因此，在一般情况下，由 (4.10) 可解得所求之 ε_2、ε_1 間的关系式：$\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1)$。幷能解得：$u=u(\varepsilon_1)$、$v=v(\varepsilon_1)$、$q=q(\varepsilon_1)$、$t=t(\varepsilon_1)$。將这些結果代入 (3.1) 式內，即可获得所求接触軌迹的計算公式为：

$$\left.\begin{aligned}x_1&=x\cos\varepsilon_1-y\sin\varepsilon_1.\\y_1&=x\sin\varepsilon_1+y\cos\varepsilon_1.\\z_1&=z+\sigma_1.\end{aligned}\right\}\tag{4.11}$$

由于 (4.11) 內只包含着一个独立参变数，因此它系一曲綫方程式而非一曲面方程式。由此可得一結論：在通常情况下，若任意給予一对共軛曲面，其接触軌迹將为一曲綫而非一曲面，且其接触情况將为点接触而非綫接触。

今若設由 (4.10) 可解得 ε_1、ε_2 間关系式：$\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1)$，且設此关系式又能使 (4.10) 的雅科比行列式 $J=\dfrac{D(X、Y、Z、W、T)}{D(u、v、q、t、\varepsilon_2)}=0$ (其中：$X=0$、$Y=0$、$Z=0$、$W=0$、$T=0$ 代表(4.10)中的 5 个方程式)，則(4.10)內將只有 4 个相互独立方程式(見文献[8])，而独立变数將不是一个而为兩个。由于 ε_1、ε_2 間已假設存在着关系式：$\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1)$，$\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$ 不能同时都为独立变数。現設选 ε_1、u 为兩独立变数，則由 (4.10) 將可解得：$v=v(u、\varepsilon_1)$、$q=q(u、\varepsilon_1)$、$t=t(u、\varepsilon_1)$ 及 $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1)$。此时，(4.11)內也將包含有兩个独立参变数，而变为一曲面方程式。因此，在所假設的条件下，接触軌迹將变为一曲面而其接触情况

將成为綫接触。

五、兩軸位置固定不变及無軸向位移条件下，共軛曲面問題的三个特例

由于兩軸位置固定不变及無軸向位移，因而通过选用适当的直角座标系統，可使：$f(\varepsilon_1)=e=$常数、$h(\varepsilon_1)=0$、$\sigma_1(\varepsilon_1)=\sigma_2(\varepsilon_1)=0$。

（一）　第一特例（第一类共軛曲面問題）：

給予 $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1)$ 及一漸开綫蝸杆或漸开綫螺旋齿輪的齿曲面方程式：

$$x=a\cos(\theta+\phi)+a\theta\sin(\theta+\phi);$$
$$y=a\sin(\theta+\phi)-a\theta\cos(\theta+\phi);$$
$$z=b\phi.$$

求与其共軛的共軛曲面之計算公式。

利用 (4.1) 計算公式，并將其中的 u、v 代以此处的 θ、ϕ；經化簡后可得所求共軛曲面的計算公式为：

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1)\quad\text{（已知条件）}.\\
&\frac{\Omega_2}{\Omega_1}=\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}=M(\varepsilon_1).\\
&\tan\lambda=\frac{(a^2\theta-b^2\phi)\sin\alpha}{be\cos\alpha-a^2\sin\alpha}.\\
&H=\sqrt{(be\cos\alpha-a^2\sin\alpha)^2+(a^2\theta-b^2\phi)^2\sin^2\alpha}.\\
&\cos(\varepsilon_1+\theta+\phi+\lambda)=\frac{ab\,(1+M\cos\alpha)-Mae\sin\alpha}{MH}.\\
&\beta=\varepsilon_1+\theta+\phi.\\
&x'=(a\cos\beta+a\theta\sin\beta-e)\cos\varepsilon_2-(a\cos\alpha\sin\beta\\
&\qquad-a\theta\cos\alpha\cos\beta-b\phi\sin\alpha)\sin\varepsilon_2.\\
&y'=(a\cos\beta+a\theta\sin\beta-e)\sin\varepsilon_2+(a\cos\alpha\sin\beta\\
&\qquad-a\theta\cos\alpha\cos\beta-b\phi\sin\alpha)\cos\varepsilon_2.\\
&z'=(a\sin\beta-a\theta\cos\beta)\sin\alpha+b\phi\cos\alpha.
\end{aligned}\right\}\qquad(5.1)$$

显然，(5.1) 式同时也就是用普通漸开綫型齿輪插齿刀，以不等速比 $M(\varepsilon_1)$ 傳动时所范成的齿曲面形狀之計算公式。

若在 (5.1) 式中令 $\varepsilon_2=m\varepsilon_1$ 而 m 为一常数，則 $M(\varepsilon_1)=m=$常数，即为等速比傳动。在此条件下，(5.1) 式即蛻变成为与漸开綫蝸杆或漸开綫螺旋齿輪等速比共軛的蝸輪齿

曲面之計算公式。此計算公式虽为(5.1)式的蛻变式，但較之文献[1]第11章內所得的相应結果將更为普遍。这是由于該書采用圖解分析混合法进行推导，受着直角投影的限制，使所得之結果仅能适用于兩軸正交的情况，即 $\alpha=90°$ 或 $270°$ 时（否則須运用繁复的副投影，見文献[4]），与此相反，此处所求得之計算公式則能适用于任何 α 值情况下。这一点也說明了純分析法較之圖解分析混合法更为优越。此外，若更利用(4.2)接触曲面的計算公式，並通过适当地选擇座标系原点相对于嚙合齿輪的相对位置及令 $e=0$ 或 $e\neq0$，即可直接簡練地获得文献[4]中所討論的有关所謂三种"非漸伸嚙合"的全部主要分析結果。

（二） 第二特例（第二类共軛曲面問題）：

給予 $\varepsilon_2=m\varepsilon_1$ 而 m 为常数（即为等速比傳动）、接触曲面方程式（为一平面）：$x_1=\dfrac{m}{1+m}e-s\sin\alpha_0$、$y_1=s\cos\alpha_0$、$z_1=z_1$，其中 s、z_1 为兩独立参变数，及起始的接触曲綫：$\varepsilon_1=0$ 时 $s=z_1\tan\beta$；並設兩軸平行，即 $\alpha=0$；而求与之相对应的一对共軛曲面方程式。

利用給予的条件，並將 s、z_1 替代 u、v，則(4.3)式可簡化成为：

$$(1+m)s-mes\cos\alpha_0\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial s}=0. \tag{5.2}$$

显然，

$$f_1=\varepsilon_1-\frac{1+m}{me\cos\alpha_0}s=0;$$

及

$$f_2=\varepsilon_1-\frac{1+m}{me\cos\alpha_0}s+z_1=0.$$

为(5.2)之兩个彼此独立的特殊解。

由給予的端点条件：$\varepsilon_1=0$ 时 $s=z_1\tan\beta$，因而得：$f_{10}=-\dfrac{1+m}{me\cos\alpha_0}s$、$f_{20}=-\dfrac{1+m}{me\cos\alpha_0}s+s\cot\beta$。由此兩式中消去 s，得与(4.5)相当之式为：$F(f_{10}、f_{20})=\left(\dfrac{1+m}{me\cos\alpha_0}-\cot\beta\right)f_{10}-\dfrac{1+m}{me\cos\alpha_0}f_{20}=0$。利用(4.6)式並化簡之，最后得(5.2)式之滿足端点条件的解为：

$$\varepsilon_1=\frac{1+m}{me\cos\alpha_0}(s-z_1\tan\beta). \tag{5.3}$$

將此結果及給予的接触曲面方程式代入(4.8)、(4.9)兩式內，經化簡后，可得所求之一对共軛曲面方程式为：

$$\left.\begin{aligned}
x&=a\cos(\theta+\tan\alpha_0-\alpha_0-\phi)+a\theta\sin(\theta+\tan\alpha_0-\alpha_0-\phi).\\
y&=-a\sin(\theta+\tan\alpha_0-\alpha_0-\phi)+a\theta\cos(\theta+\tan\alpha_0-\alpha_0-\phi).\\
z&=b\phi.
\end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

其中：$a=\dfrac{me\cos\alpha_0}{1+m}$、$b=\dfrac{a}{\tan\beta}$、$\theta=\dfrac{s}{a}-\tan\alpha_0$、$\phi=\dfrac{z_1}{b}$。

及

$$\left.\begin{aligned}
x'&=a'\cos(\theta'+\tan\alpha_0+\alpha_0-\phi')-a'\theta'\sin(\theta'+\tan\alpha_0+\alpha_0-\phi')。\\
y'&=a'\sin(\theta'+\tan\alpha_0+\alpha_0-\phi')+a'\theta'\cos(\theta'+\tan\alpha_0+\alpha_0-\phi')。\\
z'&=b'\phi'。
\end{aligned}\right\}\tag{5.5}$$

其中：$a'=\dfrac{e\cos\alpha_0}{1+m}$、$b'=\dfrac{a'}{\tan\beta}$、$\theta'=\dfrac{s}{a'}-\tan\alpha_0$、$\phi'=\dfrac{z_1}{b'}$。

显然，(5.4)、(5.5)兩式代表着一对漸开綫螺旋齿輪之齿曲面方程式．当 $m>0$ 时，式中之 a、a' 为基圓半徑；$2\pi b$、$2\pi b'$ 为导程．并由兩式間符号的差别，可推論知这一对螺旋曲面系互为左右旋的．此外，由 a、a'、b、b' 的定义又可推得：$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{2\pi b}{2\pi b'}=m$；这就是說：这一对共軛螺旋漸开綫曲面的基圓半徑之比及导程之比等于傳动比之倒数，在齿輪情况下，即与兩輪齿数比相等。

（三） 第三特例（第三类共軛曲面問題）：

給予一对漸开綫螺旋齿輪齿曲面方程式：

$$\begin{aligned}
x&=a\cos(\theta+\phi)+a\theta\sin(\theta+\phi),\\
y&=a\sin(\theta+\phi)-a\theta\cos(\theta+\phi),\\
z&=b\phi。
\end{aligned}$$

其中：θ、ϕ 为兩独立参变数；

及

$$\begin{aligned}
x'&=a'\cos(\theta'+\phi')+a'\theta'\sin(\theta'+\phi'),\\
y'&=a'\sin(\theta'+\phi')-a'\theta'\cos(\theta'+\phi'),\\
z'&=b'\phi'。
\end{aligned}$$

其中：θ'、ϕ' 为兩独立参变数；

求 ε_1、ε_2 間的关系式。

利用給予的条件，并將 θ、ϕ、θ'、ϕ' 替代 u、v、q、t，則(4.10)可簡化成为：

$$a\cos\lambda_1+a\theta\sin\lambda_1=a'\cos\lambda_2+a'\theta'\sin\lambda_2+e。\tag{5.6}$$

$$a\sin\lambda_1-a\theta\cos\lambda_1=b'\phi'\sin\alpha+a'\cos\alpha\sin\lambda_2-a'\theta'\cos\alpha\cos\lambda_2。\tag{5.7}$$

$$b\phi=b'\phi'\cos\alpha-a'\sin\alpha\sin\lambda_2+a'\theta'\sin\alpha\cos\lambda_2。\tag{5.8}$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\lambda_1=-\frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}\sin\lambda_2。\tag{5.9}$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\lambda_1=\frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2}}(a'\sin\alpha-b'\cos\alpha\cos\lambda_2)。\tag{5.10}$$

其中：
$$\lambda_1=\theta+\phi+\varepsilon_1. \tag{5.11}$$
$$\lambda_2=\theta'+\phi'-\varepsilon_2. \tag{5.12}$$

自(5.9)、(5.10)兩式可將 λ_1、λ_2 解成 a、b、a'、b' 的函数．由于 a、b、a'、b' 为已知常数，因而 λ_1、λ_2 亦將为可計算而得的兩个常数．

由(5.6)、(5.7)、(5.8)三式可解得：

$$\theta'=\frac{a\sin\lambda_1}{a'\sin\lambda_2}\theta+H_1.$$

$$\phi'=\frac{a\theta}{b'\sin\alpha}\left(\cos\alpha\cos\lambda_2\frac{\sin\lambda_1}{\sin\lambda_2}-\cos\lambda_1\right)+H_2.$$

$$\phi=\frac{a\theta}{b\sin\alpha}\left(\cos\lambda_2\frac{\sin\lambda_1}{\sin\lambda_2}-\cos\alpha\cos\lambda_1\right)+H_3.$$

其中：
$$H_1=\frac{a\cos\lambda_1-a'\cos\lambda_2-e}{a'\sin\lambda_2}.$$

$$H_2=\frac{1}{b'\sin\alpha}(a\sin\lambda_1-a'\cos\alpha\sin\lambda_2+a'H_1\cos\alpha\cos\lambda_2).$$

$$H_3=\frac{1}{b\sin\alpha}(a\sin\lambda_1\cos\alpha-a'\sin\lambda_2+a'H_1\cos\lambda_2).$$

利用(5.9)、(5.10)及由此兩式推化得的关系式：

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2}}(a'\cos\alpha+b'\sin\alpha\cos\lambda_2).$$

化簡上述 θ'、ϕ'、ϕ 之解，最后可得：

$$\theta'=-\frac{ab'\sqrt{a^2+b^2}}{a'b\sqrt{a'^2+b'^2}}\theta+H_1. \tag{5.13}$$

$$\phi'=-\frac{aa'\sqrt{a^2+b^2}}{bb'\sqrt{a'^2+b'^2}}\theta+H_2. \tag{5.14}$$

$$\phi=\frac{a^2}{b^2}\theta+H_3. \tag{5.15}$$

將(5.13)、(5.14)、(5.15)三式代入(5.11)与(5.12)兩式內，并自其中消去 θ，最后获得所求之 ε_1，ε_2 間的关系式为：

$$\varepsilon_2=\frac{ab\sqrt{a'^2+b'^2}}{a'b'\sqrt{a^2+b^2}}\varepsilon_1+H_1+H_2-\lambda_2-\frac{ab\sqrt{a'^2+b'^2}}{a'b'\sqrt{a^2+b^2}}(\lambda_1-H_3) \tag{5.16}$$

由(5.16)及(2.4)式可得：

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1}=\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}=\frac{ab\sqrt{a'^2+b'^2}}{a'b'\sqrt{a^2+b^2}}=m(\text{常数}) \tag{5.17}$$