现代经济学高级教程

房地产经济学

Real Estate Economics

洪开荣 / 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

现代经济学高级教程

房地产经济学

Real Estate Economics

洪开荣 / 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

房地产经济学/洪开荣编著. —武汉：武汉大学出版社，2006.3
现代经济学高级教程
ISBN 7-307-04953-8

Ⅰ.房… Ⅱ.洪… Ⅲ.房地产经济学—教材 Ⅳ.F293.30

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 012099 号

责任编辑:柴　艺　　责任校对:刘　欣　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)
印刷:湖北省黄冈日报社印刷厂
开本:787×980　1/16　　印张:17.875　字数:327 千字
版次:2006 年 3 月第 1 版　　2006 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-04953-8/F・973　　定价:30.00 元

前　言

在现代经济理论中,房地产经济理论是一个特殊领域。这一方面表现在房地产作为不动产的特殊性上,这种不动产特性决定了在各种形式的房地产经济分析中,基于"区位"的房地产思考原则不可或缺;另一方面,这种特殊性也表现在房地产经济分析中不动产特性的凸现与隐藏上。在考虑有关房地产区位商品属性、房地产开发时机,以及房地产市场的地区分割等决策问题时,我们把区位因素作为分析基础,并且断言,选择了有最大(隐含)价值的(房地产)区位,就意味着得到了开发成功的最大保证。这种突出区位分析的研究取向,使房地产经济研究与城市经济或区域经济研究存在诸多交叉或重叠之处。房地产经济分析的另一个特点是,与房地产经济问题相关的区位或空间分析被符号化或特征值化,以便于构建起符合主流经济学假设的房地产经济分析模型。然而,这种分析的解释力虽很强,但在这种符号化或特征值化之后,房地产的区位思考原则不得不舍弃了,房地产经济分析的独特意义也大大消减了。

鉴于这种认识,也基于作者多年的房地产经济理论研究和教学经验,作者以反映房地产经济学本质特性和理解房地产经济学基础模型为出发点,重点分析了九个方面的房地产经济理论问题,并在每章的结尾部分,提出三个与该章模型分析相关的思考题。这些思考题主要来源于作者的研究心得,可以作为本书读者理解房地产经济学前沿问题的参考点。而且,对于每个思考题,作者都提出了可以采纳的思考要点,而这些思考要点可以视为相关房地产经济学前沿理论的具体化。由于这些内容涵盖了房地产经济理论研究最为活跃的主要领域,所以全面理解这九个方面的理论问题及其基础模型,必将有助于读者正确把握房地产经济分析的理论技巧。

本书致力于服务的主要对象,是那些已具备房地产经济学基本素养而希望进一步提升自己理论水平的研究生,特别是那些希望撰写房地产经济学及相关领域研究论文的硕士生或博士生。对于他们来说,理解并学会房地产经济模型的建模方法,是提升研究水平和完成研究论文不可或缺的工作。正是考虑到研究生教学的特点,作者在简化的系列模型描述中勾绘了房地产经济学前沿理论的基本框架。

特别值得指出的是，本书的大量内容都涉及博弈论和实物期权理论的应用分析。这种编著取向的确定，不仅是因为房地产经济问题的解释无法离开对于主体相互作用和环境不确定性的思考，也因为借助于博弈论和期权理论，我们可以更深入地理解房地产、房地产业和房地产市场的基本内涵，也可以更深入地理解房地产经济分析的本质特征。当然，对于那些与作者有相同阅读偏好的读者，本书的阅读将把我们一起带入房地产经济模型的奇妙领域，让我们一起沉醉于这些模型的精致优美，一起体会这种精致优美下的愉快和满足。

在本书历经三年终于完成之际，作者要特别感谢引领我走入房地产经济理论前沿领域的三位授业恩师：南开大学经济研究所的曹振良教授、中南大学商学院的陈晓红教授、高阳教授。同时，本书撰写和出版得到了国家自然科学基金(编号:70471048)和中南大学商学院发展基金的资助，一并致谢。

洪开荣

2005年12月28日于中南大学

目 录

第一章 房地产开发理论 …… 1

1.1 确定性环境中房地产开发的最适时机…… 1

1.2 不确定性环境中房地产开发的最适时机…… 5

1.3 区划权与房地产开发时机…… 16

第二章 房地产区位理论 …… 28

2.1 非居住性房地产区位…… 28

2.2 居住性房地产区位…… 35

2.3 房地产区位均衡…… 42

第三章 房地产规制理论 …… 47

3.1 开发密度的政府管制模型…… 47

3.2 土地利用管制的成本和收益…… 51

3.3 拆迁补偿制度的理论模型…… 56

3.4 区划寻租与土地开发…… 68

第四章 房地产期权理论 …… 79

4.1 房地产开发项目的期权价值…… 79

4.2 新兴市场的土地开发期权…… 88

4.3 房地产开发期权模型及其验证…… 92

第五章 房地产博弈理论…… 101

5.1 房地产开发问题的博弈分析 …… 101

5.2 再开发成本与土地开发博弈 …… 116

5.3 房地产接管的博弈分析 …… 126

5.4 现房购买的逆向选择模型 …… 137

第六章　房地产开发项目评价理论 …… 147
6.1　房地产开发项目的博弈评价 …… 147
6.2　房地产开发项目的期权评价 …… 172

第七章　房地产租赁市场理论 …… 207
7.1　租赁住房质量的局部均衡分析 …… 207
7.2　房屋租赁市场的不对称信息问题 …… 214
7.3　房屋租赁市场的外部性分析 …… 222
7.4　搜寻成本与住宅租赁市场均衡 …… 226

第八章　房地产代理理论 …… 235
8.1　房地产代理佣金制度的效率比较 …… 235
8.2　房地产代理的搜寻模型 …… 240
8.3　房地产经纪人的最优激励系统 …… 247

第九章　房地产金融理论 …… 251
9.1　房地产投资的最佳杠杆 …… 251
9.2　逆向抵押贷款的持有风险模型 …… 259
9.3　抵押贷款违约的延迟价值 …… 269

参考文献 …… 275

第一章 房地产开发理论

本章将从三个不同角度探讨房地产开发的时机选择问题。首先探讨的是确定性环境中房地产开发时机的选择。然后,引入实物期权分析思想,探讨在不确定性环境中房地产开发的最适时机。最后,以区划权的运用为切入点,探讨政府行使区划权与房地产开发时机之间的相互联系和相互影响。

1.1 确定性环境中房地产开发的最适时机

在房地产投资活动中,时机把握是能否成功的关键选择。对于特定的开发商而言,时机不仅是宏观经济条件的有利变化,也是开发商资源在特定时点的有效结合。定量地了解时机的内涵对开发商有非常重要的意义。按照 Richard J. Arnott 和 Frank D. Levvis(1979)的研究思路,我们在一个部分均衡分析的框架中,首先探讨确定环境中的开发商最优时机问题,然后再把模型扩展,考虑土地用途改变,即物业改造情况下的最适时机问题。①

1.1.1 土地开发模型及其求解

开发商问题的简单描述就是:空置土地在什么时候、以什么密度被开发,以便获取最大化的土地现值,即是说,在城市发展过程中,发展商的问题就是选择最适时间和最适规模来实现他所拥有土地现值的最大化。

我们假定所开发物业将一直保有某种特定的用途。此外,我们还假定:(1)土地开发前的租值(农业租值)为零;(2)资本价格不变;(3)资产税为零;(4)建筑物不贬值;(5)所开发物业的预期租值以恒定的速率增长。发展商的目标是使单位土地的租值现值和建设成本现值之差最大化。开发时间为 T,投入土地的资本为 K,即有:

① 在实物期权理论引入房地产开发最优时机选择的分析之前,有许多类似 Richard J. Arnott 和 Frank D. Levvis(1979)的研究文献,但在不考虑随机变量的情况下,这些研究都不能有效处理房地产开发不确定性及其对于房地产最优时机选择的影响等问题。

$$\max_{T,K} L(T,K) = \int_T^{\infty} r(t)Q(K)e^{-it}dt - pKe^{-iT} \tag{1}$$

这里，$L(T,K)$是在时间范围 T 内，投入资本量为 K 时的单位土地的现值。$r(t)$是时间 t 单位物业的租金率。$Q(K)$代表拥有资本 K 时单位土地上物业的产出，而 K 满足$Q'(K)>0$，$Q''(K)<0$。i 为利率。p 为单位资本价格。

从假设(5)可以引出：

$$r(t) = r(0)e^{\eta t} \tag{2}$$

这里，η 表示租金率的预期变化率($\eta>0$)。

上式的一阶条件是：$-r(T)Q(K)e^{-iT} + ipKe^{-iT} = 0$，而其最优化的二阶条件要求 $L''_{TT}<0$，这就意味着 $r'(T)>0$，或者说，开发时间租金率是递增的。

或者：

$$\frac{pK}{r(T)Q(K)} = \frac{1}{i} \tag{3}$$

物业价值就是预期的未来租值的现值，可表示为：

$$P(s) = \begin{cases} \int_s^{\infty} r(t)Q(K)e^{-i(t-s)}dt, & \text{对于 } s \geqslant T \\ [P(T) - pK]e^{-i(T-s)}, & \text{对于 } s < T \end{cases} \tag{4}$$

这里，$P(s)$为时点 s 的物业价值，时间范围 T 和资本投入量 K 为给定值。而且，这里的分析都忽视了所谓的“Hahn problem”，即资产价格不一定等于净现金流的折现值。

由等式(2)可以知道，在开发时间范围内物业的价值为：

$$P(T) = \frac{r(T)Q(K)}{i-\eta} \tag{5}$$

把式(5)代入式(3)，则有：

$$\frac{pK}{P(T)} = \frac{i-\eta}{i} \tag{6}$$

等式(6)说明：在最优的开发时间(独立于结构密度)，资本成本与物业价值的比率必定等于利率与预期租金率的增长率之差同利率的比率。这个规则的经济意义是明显的，即开发商进行土地开发的最适时间将是某个时期推迟开发所节约的利益 ipK 等于其损失的物业租值$(i-\eta)P(T)$。

联系到结构规模的相关条件，由式(1)对 K 微分获得，并应用于式(2)：

$$\frac{r(T)Q'(K)}{i-\eta}e^{-iT} - pe^{-iT} = 0 \tag{7}$$

得到的二阶条件 $r(T)Q''(K)e^{-iT}/(i-\eta)<0$，意味着折现边际资本产品曲线必定是向下倾斜的。替代式(5)到式(7)，并重新安排可得：

$$\frac{pK}{P(T)}=\frac{Q'(K)K}{Q(K)}=\alpha(K) \tag{8}$$

这里，$\alpha(K)$为生产住房的资本产出弹性。

等式(8)要求：开发时间独立，开发商将通过资本产出弹性等于资本成本与不动产价值比率来构造住房。这条规则的含义是明确的。单位资本增加 p 的成本增加，必定等于租金增加的建造时间的折现价值 $P(T)Q'(K)K$。

结合式(6)和式(8)，给出了资本产出弹性、租金率与租金率的预期增长率之间的关系：

$$\alpha(K)=\frac{i-\eta}{i} \tag{9}$$

当开发发生在最优密度和最优时间时上式成立。局部最优的必要条件是 $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}K$ 是非正的，或者等价于住房生产时土地和资本之间的替代弹性小于或等于1(假定住房有一个不变规模生产函数)。而且，如果土地被最优开发，开发时点的土地价值与不动产价值的比率等于租金率的预期增长率与利率的比率：

$$\frac{V(T)}{P(T)}=\frac{\eta}{i} \tag{10}$$

如表1-1所示，最适时间和最适资本投入量的比较静态结果如下：

资本价格的上升将推迟最优开发时间，当前租金率的上升也将推迟它，利率效果和租金率的预期增长率的效果不确定。开发密度不受资本价格或当前租金率的影响，但利率的增长将减少密度，租金率的预期增长率将增加密度。

表1-1　　比较静态结果

	p	i	$r(0)$	η
T	+	?	-	?
K	0	-	0	+

注：比较静态结果是基于土地与资本替代弹性小于1的假设。

1.1.2　模型的扩展

(1)引入土地税收因素和容许资产价格变化。

引入土地税收因素，即开发前后的资产税分别为 τ_b 和 τ_a，再考虑资本价格预期以一个不变比率 δ 变化，即有：

$$p(t)=p(0)\mathrm{e}^{\delta t}$$

相似的原理可以求解以下最优化问题：

$$\max_{T,K} L(T,K) = \int_T^{\infty} r(t)Q(K)e^{-it}dt - \tau_b\int_0^T P(t)e^{-it}dt$$

$$- \tau_a\int_T^{\infty} P(t)e^{-it}dt - P(T)Ke^{-iT} \qquad (11)$$

式(8)、式(9)和式(10)各自变成：

$$\alpha(K) = \frac{P(T)K}{P(T)} \qquad (12)$$

$$\alpha(K) = \frac{i + \tau_b - \eta}{i + \tau_b - \delta} \qquad (13)$$

$$\frac{V(T)}{P(T)} = \frac{\eta - \delta}{1 + \tau_b - \delta} \qquad (14)$$

如表1-2所示，从比较静态结果来看：开发前的不动产税率和资本价格的预期变化率的增加会减少土地资本密度，而开发后的不动产税率则对密度没有影响。开发前的不动产税率的上升将加速物业开发，而开发后的不动产税率的下降会推迟物业开发的最适时间。资本价格的预期变化率的时间效应则是不确定的。

表1-2　　比较静态结果

	τ_a	δ	τ_b
T	+	?	−
K	0	−	−

(2)物业改变用途的情况。

需要说明的是，与一般企业相同，开发商的理性行为也是最大化其收益，但在进行了土地投资之后，土地的沉没成本使最大化总的土地租金成为开发商更新的理性准则。当旧物业被具有新结构的新物业所代替时，发展商的时机选择将取决于新租金收益 $R(t)$ 足够大，即为以下的最大化问题：

$$\max L_n(T,K) = \int_T^{\infty} R(t)Q(K)e^{-it}dt - \int_T^{\infty} r(t)Q(K)e^{-it}dt - pKe^{-it} \qquad (15)$$

一阶条件是：

$$-R(T)Q(K)e^{-iT} + r(T)Q(K)e^{-iT} + ipKe^{-iT} = 0$$

即有：

$$\frac{pK}{[R(T)-r(T)]Q(K)}=\frac{1}{i} \tag{16}$$

与前面的式子相比较,我们可以看到:改变物业用途的最佳时机,需要考虑新物业用途的租金值与旧物业用途的租金值之差值的大小。

1.1.3 结　论

以上的简单模型分析表明,开发活动产生在土地价值与开发后的物业价值的比率等于租金的预期增长率和利率的时候。如果知道拟投入地块的资本量、物业租金收益、单位资本价格和资本在该地块上的产出,就可利用一个简单模型来判别土地利用的最适时机。上述分析不考虑预期收益获取的不确定性,假定了建筑与土地的特定用途永远不变,也假设建筑是不会贬值的,然而,这种处理只有在开发商有理性预期且为风险中性时才是适当的。

1.2 不确定性环境中房地产开发的最适时机

在本节,我们在不确定性环境中探讨房地产开发的最适时机选择问题。通过明确处理房地产开发项目的单位租赁和单位建设成本的规模弹性的影响,Tien Foo Sing(2001)重新审视了 Williams(1991)和 Quigg(1993)的开发问题。其研究发现,规模成本弹性和融资成本有助于增加等待期权价值,但租赁产出因素减弱了等待的动机,高租赁产出趋向于加快开发项目。

1.2.1 问题详述

就空地开发问题而言,"土地是其潜在资产的要约期权"这个中心思想,形成了以下实物期权定价模型的基础。作为分析过程的一个起点,假定土地是空置的,并且在执行开发期权之前没有来自这片未开发土地的临时现金收入,只有当运用开发期权时租金收入才能产生。为了启动最佳开发时间期权,我们的模型将需要基础资产(underlying asset)的资本化价值,即这个待完成商业楼宇超过总开发成本(触发价格)和机会成本的净收益。

在执行开发期权的那个时间,租金收益仍不能实现,因为从最优建造规模到项目完成还需要时间。有两种处理最优开发时间期权模型时滞的方法。第一种方法是基于自由套利均衡框架。在这种框架中,构造一个套期(hedge)抵押贷款,其包含一个比较长期的开发期权价值 $V(R,T)$和一个比较短期的开发期权价值 $C(R,T)$。这里,T 代表期权消亡之时,它也与建造时间一致。当实际租金下降到$R(T)$之下时,要约期权(call option)容许开发商"锁定"物业长期市场

租金，因为只要简单执行这个期权，物业价值就不至于减少。通过把 T 年期的、租金为 δ 的均衡契约价值与套期抵押贷款等价起来，就能计算均衡租金，或者说，$0\leqslant t\leqslant T$ 期间的均衡租金率 $R(V,C,t)$：

$$R(V,C,t)=\frac{\delta}{1-\exp[-r(T-t)]}\cdot[V(R,T)-C(R,T)] \tag{1}$$

这里，r 是无风险利率。

模拟时滞效应的第二种方法是由 Grenadier(1995)提出的适用于前向租约的方法。按照这种方法，在建造开始时，建筑空间就被预租，租金收益仅在项目完成时才能得到。前向租约的均衡租 $R(t)$ 由一个包含两种零执行价格但不同消亡时间的欧式看涨期权(European put option)所复制。其一是 $P(R,V_t,T)$，它预定在项目完成的 T 时间消失；其二是在 $T+\tau$ 时期内存在，这里 τ 代表了附加于完成后建筑的租约利息范围。对一个无限期租约物业来说，第二项欧式期权 $P(R,V_t,\infty)$ 是没有价值的。等价的前向租金率可以简化为以下形式：

$$R(t)=\frac{\delta}{\exp[-r(T-t)]}\cdot P(R,V_t,T) \tag{2}$$

基于式(1)或者式(2)，主体开发的单位均衡租金 $R(t)$ 可以被经验性确定。在估计过程中，需要明确一些输入条件，例如，价格、租金收入、无风险利息、美式与欧式期权溢价，等等。基于这些输入条件的经验性分析由 Quigg(1993)的研究所展示，本节论述则集中于理论模型的构建上。

在数量分析上，土地价值的影响可以分别利用开发租金和开发成本的凹凸情况来形成模型。假定存在租金和成本零方差，即 $\sigma_x^2=\sigma_\kappa^2=0$，此时，项目的剩余土地价值由下式表示：

$$L(R,\kappa,q)=(q^\theta R)/\delta_x-(q^\gamma\kappa+F_i) \tag{3}$$

这里，κ 是单位变动成本，F_i 是项目固定总成本，θ 和 γ 是规模价格弹性和规模成本弹性，开发规模受限制于 Q；风险调节资本化率给定为 $\delta=\mu-\alpha$，其中，μ 代表等量风险，α 表示风险调节漂移率。

1.2.2 模型假设

(1)风险假设(risk spanning)。

为了运用未定权益评价(contingent claim)方法，假设存在有效率无摩擦的资本市场、持续不断的交易、无限制的短期出售，以及存在无风险下的无限制租借等。此外，风险假设还必须严格遵守未定权益评价方法运行必须有的条件。由于事实上在开发项目收入流的实现过程中，其风险并不能在项目完成前从市场中直接观察到，所以可以存在源于特定随机过程的动态风险生成机制。

(2)随机过程。

要假定风险生成条件在未定权益评价模型中成立,我们不得不为两个状态变量,单位租金(x)和单位建筑成本(κ),指定适当的连续时间随机过程。算术分布(arithmetic diffusion)和乘法分布(multiplicative diffusion)是房地产期权模型中常用的两种 Ito 过程。乘法分布,或更专门化为几何布朗运动过程,广泛出现在金融期权资产价格的随机过程假设中。

然而,在城市土地价值模型的案例中,Capozza & Helsley(1989,1990),Capozza 和 Schwann(1990),以及 Capozza 和 Sick(1994)争论说,国家城市土地的租金可以任意减少到负价值,如果这块土地"搬离"城市中心足够远。对于远离市中心的土地来说,当被用于农业用途时,来往市中心的交通费用可能会超过土地的租金。因此,基于农业用途的土地净价值是负的,而算术布朗过程是这种情况下土地价值随机过程的更好代表。

负的净现金流来自于高额的交通费用以及土地开发潜力不足。尽管没有确切排除建筑成本超过收入的可能性,然而在很多实际案例中,开发商都会运用期权来完全放弃项目或是暂时停止建设活动来止损。负净现金流的情况并不常见。

在成本方面,在投资和建设费用不可能为负的情况下,对数正态分布假设与单位成本变量相关。而且,像租金变量一样,成本变量是一种"价格"而不是一种价值概念。它必定是严格非负的,而对数正态分布假设在模型中得到证明。

(3)状态变量假设。

在开发评价阶段,最优开发时间期权溢价取决于两个状态变量:单位租金率 x 和单位建造成本 κ。x 代表租出一个单位建筑空间的净租金收益,这种单位租金流按照下面的几何布朗随机过程而变化:

$$dx = \alpha_x x dt + \sigma_x x dz_x \quad (4)$$

这里,α_x 和 σ_x 代表即时漂移率;现金流的标准偏离 dz_x 是一个服从标准分布[$N(0,1)$]的标准维纳过程。

在成本方面(K),拥有最大密度 Q 的土地开发项目,总投资包括一定数量的变动成本(κQ)和固定成本(F_i),即 $K = \kappa Q + F_i$,单位变动成本(κ)也被假定遵循一种对数正态分布过程。

$$d\kappa = \alpha_\kappa \kappa dt + \sigma_\kappa \kappa dz_\kappa \quad (5)$$

这里,α_κ 和 σ_κ 代表即时漂移率,dz_κ 是一个具有相关系数 $\rho_{x\kappa} = E(dz_x, dz_\kappa)$ 且与单位租金变量 dz_κ 相关的标准维纳过程。

需要指出的是,基于 Ito 推论的实物期权模型被限制在两个随机变量的情况,而放松这种限制的第一种方法是使用联系不同状态变量的先验界定函数,这

些状态变量表征了普通的随机产生过程。此时,内在的随机过程、租金变量的密度和相互作用效果通过一个反映随机过程的外生变量 R 被分别模型化。这就减少了模型计算的状态变量数目。第二种方法是把房地产开发问题分解成几个独立阶段,并将它们建模为序列行动。在每个阶段,我们容许不同状态变量被分别模型化。每个状态推导的期权溢价就被分别组合在一种逆推过程中。此外,简化两个以上变量模型的更简单方法是武断地固定一个或更多的状态变量为零。但是,由于定义在边界条件中的零价值吸收特性,这种方法产生了角解。

1.2.3 模型构建及其数量分析

(1)开发期权 $L(x,\kappa)$。

假定我们可以确定均衡租金收益率为 $R(t)$,通过相应的有单位现金流 x 的可交易资产,这种现金流按照方程(4)的几何布朗运动随机变化。单位建设成本 κ 也被假定遵循由式(5)定义的一个相关的几何布朗运动过程。溢价 $L(x,\kappa)$ 与开发一宗没有初始收益($\pi=0$)的空地的最优时间期权相联系,通过一个未定权益定价模型(contingent claim valuation model)可推导出:

$$0=\frac{1}{2}x^2\sigma_x^2L''_{xx}+\frac{1}{2}\kappa^2\sigma_\kappa^2L''_{\kappa\kappa}+\rho_{x\kappa}x\kappa\sigma_x\sigma_\kappa L''_{x\kappa}$$
$$+(r-\delta_x)xL'_x+(r-\delta_\kappa)\kappa L'_\kappa-rL \qquad (6)$$

这里,δ_x 是租金收入,δ_κ 是融资成本,$\rho_{x\kappa}$是维纳过程 dz_x 和 dz_κ 之间的相关系数。

偏微分方程(PDE)(6)的求解受限制于两个边界条件。第一个边界条件限制 $L(x,\kappa)$在两个终点等于0,这里,x 将为0或 κ 会变得极大:

$$L(0,\kappa)=0;L(x,\infty)=0 \qquad (7a与7b)$$

第二个边界条件定义了基于以下价值匹配条件和平滑相等条件的期权的自由边界区域:

$$L(x,\kappa)=q^\theta x/\delta_x-(q^\gamma\kappa+F_i) \qquad (8a)$$

$$L_x(x,\kappa)=q^\theta/\delta_x \qquad (8b)$$

$$L_\kappa(x,\kappa)=q^\gamma \qquad (8c)$$

可以通过重新定义变量 x 和期权价值函数 $L(x,\kappa)$来求解偏微分方程(6),这种定义基于一阶齐次假设(homogeneity assumption),即单位租金和最优时间期权溢价分别由单位变动成本,譬如 $S=x/\kappa$ 和 $M(S)=L(x,\kappa)/\kappa$ 所代表。这些新变量与式(4)的一阶和二阶微分一起代入式(6)中,得到下面简化的一般微分方程:

$$0=\frac{1}{2}(\sigma_x^2+\sigma_\kappa^2-2\rho_{x\kappa}\sigma_x\sigma_\kappa)S^2M''_{SS}+(\delta_\kappa-\delta_x)SM'_S-\delta_\kappa M \qquad (9)$$

微分方程(9)为一个简单齐次的二阶微分方程，其一般解为：

$$M(S)=A_1S^{\varphi_1}+A_2S^{\varphi_2} \tag{10}$$

这里，φ_1 和 φ_2 分别被定义为：

$$\varphi_1=\left[\frac{1}{2}+\frac{\delta_x-\delta_\kappa}{\sigma_S^2}\right]+\sqrt{\left[\frac{\delta_\kappa-\delta_x}{\sigma_S^2}-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{2\delta_\kappa}{\sigma_S^2}}>1 \tag{11a}$$

$$\varphi_2=\left[\frac{1}{2}+\frac{\delta_x-\delta_\kappa}{\sigma_S^2}\right]-\sqrt{\left[\frac{\delta_\kappa-\delta_x}{\sigma_S^2}-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{2\delta_\kappa}{\sigma_S^2}}\leqslant 0 \tag{11b}$$

给定 $\sigma_S^2=\sigma_x^2+\sigma_\kappa^2-2\rho_{x\kappa}\sigma_x\sigma_\kappa$。

让吸收障碍(条件)为 $M(0)=0$，最优土地期权价值估计受限制于以下由方程(8a)、(8b)和(8c)转换而来的边界条件：

$$\kappa M(S)=L(x,\kappa)=(q^\theta x)/\delta_x-(q^\gamma\kappa+F_i) \tag{12a}$$

$$M'_S(S)=L'_x(x,\kappa)=q^\theta/\delta_x \tag{12b}$$

$$M(S)-SM'_S(S)=L'_\kappa(x,\kappa)=-q^\gamma \tag{12c}$$

在不确定性环境中，把两个平滑条件式(12b)和式(12c)与土地期权价值函数 $M(S)$ 并列，运用价值匹配条件式(12a)和一阶平滑相等条件式(12b)，可以导出一般微分等式(9)的解如下：

$$M(x,\kappa)=\begin{cases}A_1S^{\varphi_1}-\dfrac{q^\gamma+F_{i\kappa}}{\kappa}, & \text{对于 } S<S^\# \\[2ex] \dfrac{Sq^\theta}{\delta_x}-\dfrac{q^\gamma+F_{i\kappa}}{\kappa}, & \text{对于 } S\geqslant S\end{cases} \tag{13}$$

在所有者保持土地空置与开发土地之间无差异的 $S^\#$，可以得到式(13)的闭合形式解如下所示，其代表了最优的土地价值：

$$A_1=\left(\frac{q^\gamma+\dfrac{F_i}{\kappa}}{\varphi_1-1}\right)^{1-\varphi_1}\cdot\left(\frac{q^\theta}{\delta\varphi_1}\right)^{\varphi_1} \tag{14a}$$

$$S^\#=\frac{\varphi_1}{\varphi_1-1}\cdot\frac{\delta_x}{q^\theta}\cdot\left(q^\gamma+\frac{F_i}{\kappa}\right) \tag{14b}$$

$$L(x^*,\kappa^*)=\frac{\kappa q^\gamma+F_i}{\varphi_1-1} \tag{15}$$

(2)最佳开发期权的数量分析。

考虑一个项目，它在一块空地上建立 5000m^2 的可出租的空间。这块地以 500 万元购得，或相当于每层单位楼面价为 1000 元。定义在式(13)、式(14a)、式(14b)和式(15)中的最佳投资规则和最佳开发时间期权价值有了数量表达。把表 1-3 的基本参数输入，我们估算了开发期权中成本和租金函数中租金与成

本改变以及密度限制的影响。与选择关键变量相关的削价租金(cut-off rental) $x^{\#}$ 和最优期权价值 $L(x,(3))$ 的比较静态结果被归纳在表 1-4 中。

表 1-3 **数 量 分 析**

投入变量	基础价值
最大开发密度(sm)	$Q=5000$
单位租金的即时漂移(%)	$\alpha_x=8$
单位租金变差(%)	$\sigma_x=20$
单位可变建造成本(元/psm)	$\kappa=1500$
单位成本的即时漂移(%)	$\alpha_\kappa=10$
单位成本变差(%)	$\sigma_\kappa=10$
两种维纳过程的相互关联,$E(dz_x,dz_\kappa)$	$\rho_{x\kappa}=0.0$
预估的固定成本(土地成本)(元)	$F_i=5000000$
规模租赁弹性	$\theta=0.95$
规模成本弹性	$\gamma=1.02$
租金率(%)	$\delta_x=12$
融资成本(%)	$\delta_\kappa=10$

注:sm 代表平方米。

(3)比较静态效果。

表 1-4 **比较静态结果**

变量投入	最优开发决策中变量价值的增加效果	
	削价租金,x^*	期权溢价,$L(x^*,\kappa)$
σ_x	+	+
σ_κ	+	+
$\rho_{x\kappa}$	−	−
θ	−	不变