

高中数学

不等式



主 编 傅荣强
本册主编 于长军



最新修订



龍門書局

www.Longmenbooks.com



不等式

最新修订

主 编 傅荣强

本册主编 于长罕

编 者 张书祥 朱岩 常青

孙吉利 赵彬 董玉清



龍門書局

北京

版权所有 翻印必究

举报电话:(010)64034160,13501151303(打假办)

邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

不等式/傅荣强主编;于长军本册主编.一修订版.一北京:龙门书局,2006

(龙门专题)

ISBN 7-80160-133-5

I.不… II.①傅…②于… III.代数课—中学—教学参考资料 IV.G634.623

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第081095号

组稿编辑:田旭/责任编辑:马建丽 李妙茶/封面设计:耕者

龙门书局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

www.longmenbooks.com

北京市东单印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2001年2月第一版 开本:A5(890×1240)

2006年7月第五次修订版 印张:7 3/4

2006年7月第十四次印刷 字数:277 000

印数:340 001—370 000

定价:11.50元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



生命如歌

——来自北大清华优秀学子的报告

未名湖畔，博雅塔旁。

六月的晨光穿透枝叶，懒散地泻落在林间小道上，水银泻地。微风拂起，垂柳摇曳，湖面荡起阵阵涟漪，黑黝黝的博雅塔倒映在湖面，随着柔波翩翩起舞。林间传来朗朗的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，有人静静坐着，那是在求索知识的宝库……

在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨也都是这样；其实在每一所高校，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在长达两年的时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥赛金牌得主还有其他优秀学子到全国各地去巡回讲演。揭开他们光彩夺目的荣誉的面纱，他们是那样的平凡、普通，跟我们是那么的相像接近；但在来来往往出差的路上，深入了解他们的过去、成长历程，我才发现，在平凡、普通的背后，他们每个人的成长都勾勒出一道独特的风景，都是一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的生命都是一首隽永悠长的歌曲，成功更是偶然中的必然。

小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，所以一直学习平平，不思进取；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了。”她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大年三十的晚上还学习到深夜三点？你们又



有谁发烧烧到 39 度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分 684 分成为了浙江省文科高考状元。

小弟姓谭，因为年龄最小，所以大家都叫他小弟，2003 年广东省理科状元，佛山人。我们到广东巡讲结束后，车到了佛山，他却不下车，他说从这里找不到回家的路，因为在佛山上了三年学，除了回家的路知道，从来没有走出过学校的大门。我们只好把他送到广州汽车站，只有在那里他才知道怎么回家。我们大家都哈哈大笑，觉得有些不可思议，只有司机师傅道出天机：“小谭要是能找到回家的路，就不会是高考状元了！”

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说，她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考 GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年 6.4 万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。6.4 万美金，相当于人民币 52 万。

齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，最近被全球最大的软件公司 MICROSOFT 聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈的努力中完成了自身最重要的一次涅槃，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多很多优秀学子，他们都有自己的故事，酸甜苦辣，但都很真实，很精彩。亲爱的同学们，你们是否也已有了自己的理想，有



了自己憧憬的高等学府，是否也渴望着跟他们一样的优秀？在分享这些优秀的学姐学姐们成功的喜悦时，你是否会有很多的感慨，曾经虚度光阴的遗憾，付出与收获不符的苦恼，求知而不入其门的焦虑？我有幸与他们朝夕相处，默默观察，用心感受，感受颇深。其实他们与你一样，并不见得更聪明，或者与众不同，但他们的成功却源于某些共同的特质：目标明确，刻苦勤奋，执着坚韧，最重要的一条是：他们都“学而得其法”，——这，就是为什么我们在本书的前言要讲述他们故事的原因；这，也是

我们筹划出版《龙门专题》这套丛书的原因了。

在跟这些清华、北大优秀学子的交往过程中，曾多次探讨过具体学习方法的问题，而学习辅导资料则是他们反复谈到的话题。我们惊喜地发现：他们及他们的同学中，大部分人都使用过《龙门专题》这套书，有很多同学对《龙门专题》推崇备至，有人甚至还记得本套丛书的一些经典例题和讲解。有时，看着他们互相交流使用《龙门专题》心得时的投入，像小孩子一样争辩着其中哪个知识版块，哪道题目最经典实用时的忘我，我们的激动溢于言表，于是，我让他们把自己使用这套书的心得体会写下来，跟更多的学子们来分享。说句实话，对本套丛书的内容和体例特点，他们的理解很全面也很深刻。受篇幅所限，在此只能简要地摘录一部分，与同学们共勉：

朱师达：（男，2005年湖北省理科第一名，现就读于北京大学元培试验班）

对于数学、物理、化学等科目来讲，一定要有高质量的练习，《龙门专题》这套书习题讲解详细而具体，不仅例题，而且每章后的练习题都有详细地解答过程，只要认真阅读和揣摩，就一定能起到举一反三的效果，这是非常难能可贵的。

王佳杰：（2004年高考上海市第一名，毕业于上海控江中学，高考总分600（满分610分），现就读于北京大学，获2004年上海优秀毕业生，2004年北大新生奖学金等荣誉）

《龙门专题》所选的题目固然多，但决无换个数字就算新题的滥竽充数之招；题目虽然要求较高，但坡度合理，决非书后题和奥赛题的简单结合；《龙门专题》虽然针对的是全国卷的考生，但却也覆盖了所有上海卷的基本考点，又略微拔高一些，基于课本又高于课本——这正是上海高考卷的一向风格。总而言之，这套书给你的是脚踏实地备战高考的正道，如果，还有老师在旁指导挑选出最重要的例题和习题，有和你同样选择《龙门专题》的同学相互切磋的话，那就几乎是完美了。

孙田宇：（2005年吉林省文科第一名，高考总分682）

参考书是每一位学生在学习过程中必不可少的，我在自己备考时用的是



《龙门专题》。很推崇其中的“知识点精析与应用”、“综合应用篇”。“知识点精析与应用”将基础知识脉络理清,可检验我们对基础知识的掌握是否牢固扎实。“综合应用篇”则可以帮助我们打开综合题和应用题的解答思路,面对纷繁多样的试题,发掘一些固定的方法,以不变应万变,我从中受益匪浅。

李原草:(男,2003年安徽省高考文科第一名,现就读于北京大学光华管理学院,曾获得北京大学明德奖学金和社会工作优秀奖)

我认为,一本好的参考书首先要条理清晰,重点突出,讲述透彻明了,参考书是对教材的补充而不是简单的重复。《龙门专题》这套书,依据教材而不是简单地重复教材,将数学、物理、化学等学科的知识分成很多知识点、知识块,分为很多册,分别加以总结和归纳,非常适用于平时有针对性地查漏补缺和系统强化复习。

徐惊蛰:(2003年河南省高考理科第一名,高考总分697,北京大学光华管理学院金融系)

我觉得《龙门专题》这套书非常人性化,适合不同的学生根据自身情况有针对性地进行辅导学习。题目设计难度适宜,由浅入深。我当时在排列组合、电磁学等章节上学得不是很好,做题也不得心应手,而这几本龙门的参考书,讲解非常细致,不论是前面对于章节要点的总结归纳,还是后面习题的解析都比较到位,尤其是练习题的答案,像这样详尽明晰的解析是很少见的。所以这样的书比较适合在某些知识版块上学习有困难的同学,以及自学者使用。建议专题细化的同时,也可以将某知识版块的内容与相关知识点结合、联系,使学生加强综合能力,融会贯通,而不仅仅掌握本知识版块。

刘诗哲:(2003年黑龙江省高考理科第一名,现就读于北京大学光华管理学院)

高中阶段好的参考书必须要根据高考的方向走,围绕高考的考察重点来布局。《龙门专题》这套书正是紧跟着高考走,例如数学等科目的参考书,都在每小节后列出了相关的高考题,以进一步强化复习相关知识点。

一本好书可以改变一个人的命运!我们真诚的希望每一个学生都能学会学习,梦想成真。

《龙门专题》,走向清华北大的阶梯!

《龙门专题》编委会

2006年7月



目 录

基础篇	(1)
第一讲 不等关系与不等式	(2)
1.1 不等关系与不等式	(2)
1.2 比较法在不等式中的运用	(14)
高考热点题型评析与探索	(28)
本讲测试题	(34)
第二讲 不等式的证明	(43)
2.1 基本不等式	(43)
2.2 不等式的证明	(58)
高考热点题型评析与探索	(88)
本讲测试题	(94)
第三讲 不等式的解法	(108)
3.1 有理不等式的解法	(109)
3.2 无理不等式的解法	(127)
3.3 指数不等式、对数不等式的解法	(140)
3.4 含有绝对值的不等式	(160)
高考热点题型评析与探索	(178)
本讲测试题	(185)
综合应用篇	(198)
不等式的理论应用	(199)
一、不等式的解法的应用	(199)
二、关于一元二次方程的实根的分布问题	(205)
三、运用不等式求函数的最大(小)值	(211)

CONTENTS



不等式的实际应用	(219)
一、运用“ $a, b \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ”解答不等式应用题	(220)
二、运用“ $a, b, c \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ ”解答不等式应用题	(229)
三、运用“ $ax^2+bx+c \leq 0 (a \neq 0)$ ”解答不等式应用题	(232)
综合应用训练题	(233)

基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简说是研究“数”和“形”的学科.代数是它的侧重研究运算方法的一个分支.不等式是代数的一个节点,它的本质是研究“数量关系”中的“不等关系”,落脚点是符号“ $>$ ”,“ $<$ ”,“ \neq ”.

不等式研究的基本问题有两大类:

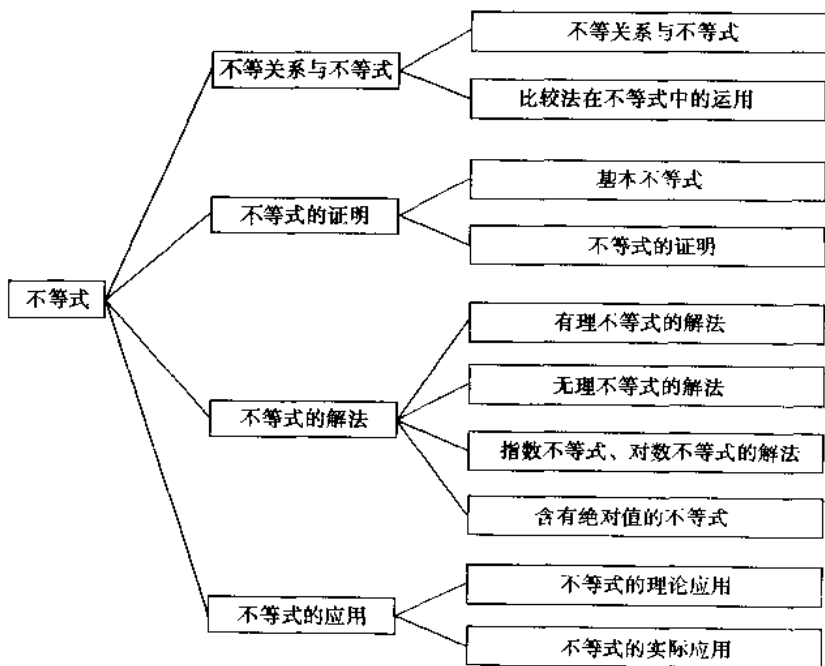
- (1)不等式的证明——证明不等式成立的过程;
- (2)不等式的解法——求不等式的解集的过程.

证明不等式成立,其理论依据是“实数的顺序性,不等式的性质,函数的单调性,基本不等式”;主要方法是“比较法,综合法,分析法”.

解不等式的总体思路有二:一是等价转化;二是套用“模型”.

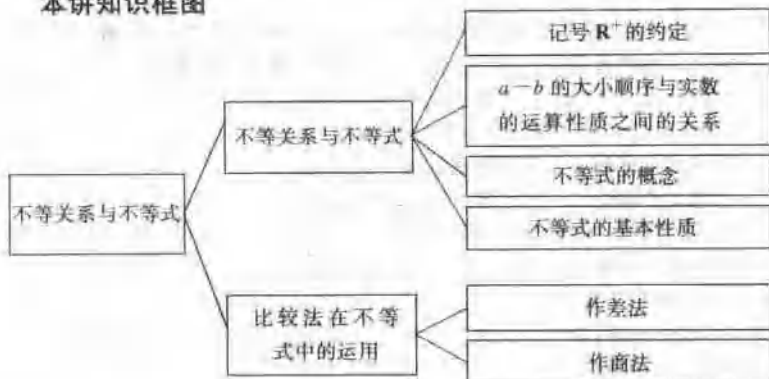
解答不等式问题,最常用的数学思想是等价转化思想和分类讨论思想.

本书知识框图



第一讲 不等关系与不等式

本讲知识框图



学习指导

[考纲要求]

理解不等式的性质;掌握比较法,并会用其解决一些简单的不等式问题.

1.1 不等关系与不等式

重点难点归纳

- 重点** 1. 实数的大小顺序与实数的运算性质之间的关系.
2. 不等式的 8 条基本性质.
- 难点** 对不等式的 8 条基本性质的正确运用.
- 本节需掌握的知识点** 不等式的 8 条基本性质.

知识点精析与应用

知识梳理

1. 记号 \mathbf{R}^+ 的约定

本书数次使用“正实数集”,为了叙述方便,本书约定: $\mathbf{R}^+ = \{\text{正实数}\}$,后面不

再重述.

2. $a-b$ 的大小顺序(实数的顺序性)与实数的运算性质之间的关系

(1) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$\textcircled{1} a-b > 0 \Leftrightarrow a > b;$$

$$\textcircled{2} a-b = 0 \Leftrightarrow a = b;$$

$$\textcircled{3} a-b < 0 \Leftrightarrow a < b.$$

(2) 设 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 则

$$\textcircled{1} \frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b;$$

$$\textcircled{2} \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b;$$

$$\textcircled{3} \frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b.$$

3. 不等式的概念

(1) 不等式的定义

用不等号($<$, $>$, \leq , \geq , \neq)表示不等关系的式子叫做不等式. 用“ $<$ ”或“ $>$ ”号连结的不等式, 叫做严格不等式; 用“ \leq ”或“ \geq ”号连结的不等式, 叫做非严格不等式.

(2) 同向、异向不等式

$f(x) > 0$ 与 $g(x) > 0$ 叫做同向不等式; $f(x) > 0$ 与 $g(x) < 0$ 叫做异向不等式.

(3) 不等式的解集

使 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$) 成立的 x 的集合, 叫做 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$) 的解集.

(4) 同解不等式

若 $f(x) > 0$ 与 $g(x) > 0$ (或 $g(x) < 0$) 的解集相等, 则 $f(x) > 0$ 与 $g(x) > 0$ (或 $g(x) < 0$) 叫做同解不等式.

(5) 不等式的同解变形

一个不等式变形为与它同解的不等式, 这样的变形称为不等式的同解变形.

(6) 证明不等式

证明不等式成立的过程叫做证明不等式.



(7)解不等式

求不等式的解集的过程叫做解不等式。

4. 不等式的基本性质

(1) $a > b \Leftrightarrow b < a$ (对称性).

(2) $a > b, b > c \Rightarrow a > c$ (传递性).

(3) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ (可加性).

(4) $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$.

(5) $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc; a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$ (可乘性).

(6) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$.

(7) $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0 (n \in \mathbf{Z}, \text{且 } n > 1)$.

(8) $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} > 0 (n \in \mathbf{Z}, \text{且 } n > 1)$.

按照这个定义,解不等式得到的结果是一个集合,表示形式:集合或区间!

知识点精析

1. 关于记号 \mathbf{R}^+ 的约定

约定 $\mathbf{R}^+ = \{\text{正实数}\}$, 就是为了叙述上的方便, 别无他意.

2. 关于 $a - b$ 的大小顺序与实数的运算性质之间的关系

$$a - b \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \begin{cases} > b \\ = b \\ < b \end{cases}, \text{ 以及 } \frac{a}{b} \begin{cases} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \begin{cases} > b \\ = b (a, b \in \mathbf{R}^+) \\ < b \end{cases}$$

与 b 的大小的起始步骤, 比较两个实数的大小都是从这里开始的. 从本质上讲, 比较 a 与 b 的大小, 只需比较 $a - b$ 与 0 的大小或 $\frac{a}{b}$ 与 1 的大小, 其中后者是以 $a, b \in \mathbf{R}^+$ 为前提的.

3. 关于不等式的概念

学习不等式, 首先要学懂弄通“不等式的定义, 同向、异向不等式, 不等式的解集, 同解不等式, 不等式的同解变形, 证明不等式, 解不等式”等概念, 这些概念的组合是不等式理论体系的总体框架, 缺了其中的一个, 这个体系就少了一分支撑.

4. 关于不等式的性质

学习不等式的性质, 要解决好以下问题:

(1) 箭头的方向

本书列举的 8 条性质, 只有性质“ $a > b \Leftrightarrow b < a$ ”中的箭头是双向的, 其他性质里面的箭头都是单向的.

个别书中把性质“ $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ ”中的箭头改为双向箭头, 本书认为那是错误的, 其原因是: $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ 是说不等式的两边都加上同一个实数, 所得



不等式与原不等式同向. 照此去做, $a+c>b+c \Leftrightarrow (a+c)+(-c)>(b+c)+(-c)$ 是成立的, 即 $a+c>b+c \Leftrightarrow a>b$ 是成立的. 尽管 $a+c>b+c \Leftrightarrow a>b$ 成立, 但也不能说 $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$ 是可逆的, 而只能说 $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$ 与 $a+c>b+c \Leftrightarrow a>b$ 是同一性质的不同表现形式.

(2) 等号的取舍

本书介绍的不等式的 8 条性质中, 不等号都是“ $>$ ”或“ $<$ ”, 而具体地解决不等式的问题时, “ \geq ”或“ \leq ”号经常和我们见面, 这就要求我们处理好其中的“ $=$ ”号, 统筹解决等号和不等号问题. 如 $a \geq b, b \geq c \Leftrightarrow a \geq c$ 是正确的; $a > b, b \geq c \Leftrightarrow a > c$ 也是正确的; 而“ $a \geq b, b > c \Leftrightarrow a > c$ ”就是错误的.

解题方法指导

1. $a-b$ 与 0 比较典型题

[例 1] 比较 $(1+\frac{\sqrt{2}}{a})^3$ 与 $2-(1-\frac{\sqrt{2}}{a})^3$ 的大小.

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad & \because (1+\frac{\sqrt{2}}{a})^3 - [2-(1-\frac{\sqrt{2}}{a})^3] \quad \leftarrow \text{作差, 被比较的两个数的差} \\
 & = (1+\frac{\sqrt{2}}{a})^3 + (1-\frac{\sqrt{2}}{a})^3 - 2 \\
 & = [(1+\frac{\sqrt{2}}{a}) + (1-\frac{\sqrt{2}}{a})][(1+\frac{\sqrt{2}}{a})^2 \\
 & \quad - (1+\frac{\sqrt{2}}{a})(1-\frac{\sqrt{2}}{a}) + (1-\frac{\sqrt{2}}{a})^2] - 2 \\
 & = 2(2+\frac{4}{a^2}-1+\frac{2}{a^2}) - 2 = 2(1+\frac{6}{a^2}) - 2 \\
 & = \frac{12}{a^2} > 0, \quad \leftarrow \text{判号, 与 0 比较, 是正? 是负? 还是零?} \\
 \therefore & (1+\frac{\sqrt{2}}{a})^3 > 2-(1-\frac{\sqrt{2}}{a})^3. \quad \leftarrow \text{定论, 被比较的两个数谁大, 谁小}
 \end{aligned}$$

[点评] 解答本题的依据是: $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$, 解题步骤是: 作差, 变形, 判号, 定论.

[例 2] 比较 x^2+3 与 $3x$ 的大小, 其中 $x \in \mathbb{R}$.

[解] $\because (x^2+3)-3x \quad \leftarrow \text{作差}$

$$= \left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \left. \vphantom{\left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right]} \right\} \begin{array}{l} \text{变形} \\ \text{配方} \end{array}$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\geq \frac{3}{4} > 0, \quad \left. \vphantom{\geq \frac{3}{4} > 0} \right\} \begin{array}{l} \text{判号, “} \frac{3}{4} > 0 \text{” 这一步是在 “} > \text{” 的基础上} \\ \text{加强了一步, 因为判号是以 0 为标准的!} \end{array}$$

$$\therefore x^2 + 3 > 3x. \quad \left. \vphantom{\therefore x^2 + 3 > 3x} \right\} \begin{array}{l} \text{定论} \end{array}$$

例3 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 比较 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的大小.

解 $\because a, b \in \mathbb{R}^+,$

$$\therefore \left[\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \right] - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$= \frac{a-b}{\sqrt{b}} + \frac{b-a}{\sqrt{a}} = (a-b) \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$$

$$= \frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}$$

$$\geq 0,$$

$$\therefore \left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

由 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 得分子 $\sqrt{ab} > 0$;
分子 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$;
 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow$
 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.
你知道“=”什么时候成立吗?

例4 比较 $x^6 + 2009$ 与 $x^4 + x^2 + 2008$ 的大小, 其中 $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad x^6 + 2009 - (x^4 + x^2 + 2008) &= x^6 - x^4 - x^2 + 1 = x^4(x^2 - 1) - (x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^4 - 1) = (x^2 - 1)^2(x^2 + 1). \end{aligned}$$

当 $x = \pm 1$ 时, $x^6 + 2009 = x^4 + x^2 + 2008$;

当 $x \neq \pm 1$ 时, $x^6 + 2009 > x^4 + x^2 + 2008$.

点评 本题与例3比较, “=”成立的条件有些区别. 例3中“=”成立, 只要 a, b 具备“ $a, b \in \mathbb{R}^+, a=b$ ”这一条件; 而本题中“=”成立, 指出了 x 的具体值, 即“ $x = \pm 1$ ”.

例5 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 且 $b < c$, 比较 ab 与 $ac + bc$ 的大小.

$$\text{[解]} \quad ab - (ac + bc) = a(b - c) - bc.$$

$$\begin{aligned}
 &\because b < c, \\
 &\therefore b - c < 0, \\
 &\text{又 } a > 0, \\
 &\therefore a(b - c) < 0; \\
 &\because b > 0, c > 0, \\
 &\therefore bc > 0, -bc < 0; \\
 &\therefore a(b - c) - bc < 0, \\
 &\therefore ab < ac + bc.
 \end{aligned}$$

比较受条件限制的两个数的大小, 逻辑顺序非常重要

[点评] 本题与例 1~例 4 不同的是: 例 1~例 4 中, 被比较的两个数不受条件限制, 而本题中被比较的两个数 ab 与 $ac + bc$ 受条件“ $b < c$ ”的限制.

[例 6] 已知 $x > 0, x \neq 1, m > n > 0$, 比较 $x^m + \frac{1}{x^m}$ 与 $x^n + \frac{1}{x^n}$ 的大小.

[分析] 本题对 x 分类讨论, 即讨论 $0 < x < 1$ 和 $x > 1$ 两种情况.

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad x^m + \frac{1}{x^m} - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) &= x^m - x^n + \frac{1}{x^m} - \frac{1}{x^n} = x^m - x^n - \frac{x^m - x^n}{x^{m+n}} \\
 &= (x^m - x^n) \left(1 - \frac{1}{x^{m+n}}\right).
 \end{aligned}$$

分类讨论: $0 < x < 1; x > 1$

当 $0 < x < 1$ 时, 由 $m > n > 0$, 知

$$x^m < x^n \text{ 且 } x^{m+n} < 1,$$

$$1 - \frac{1}{x^{m+n}} < 0,$$

所以

$$(x^m - x^n) \left(1 - \frac{1}{x^{m+n}}\right) > 0;$$

当 $x > 1$ 时, 由 $m > n > 0$, 知

$$x^m > x^n \text{ 且 } x^{m+n} > 1,$$

$$1 - \frac{1}{x^{m+n}} > 0,$$

所以

$$(x^m - x^n) \left(1 - \frac{1}{x^{m+n}}\right) > 0,$$

$$\text{综上, } x^m + \frac{1}{x^m} - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) > 0,$$

$$\text{即 } x^m + \frac{1}{x^m} > x^n + \frac{1}{x^n}.$$

不等式的研究中, 分类讨论思想极为重要, 从头开始, 用心体会!

[点评] 解答本例所用的数学思想是分类讨论思想, 解答含有参数的不等式问题, 一般都对参数的取值进行分类讨论.

2. $\frac{a}{b}$ 与 1 比较类型题

【例 7】比较 16^{18} 与 18^{16} 的大小.

【分析】 本题通过两个数的商与 1 比较确定两个数的大小.

【解】 $\because \frac{16^{18}}{18^{16}} = \frac{2^{72}}{2^{16} \cdot 3^{32}} = \frac{2^{56}}{3^{32}} = \left(\frac{2^7}{3^4}\right)^8 = \left(\frac{128}{81}\right)^8 > 1,$

$\therefore 16^{18} > 18^{16}.$

方法提炼

【点评】 解答本题的依据是: 若 $a > 0, b > 0, \frac{a}{b} > 1$, 则 $a > b$. 当 $a < 0, b < 0$ 时, 比较 a 与 b 的大小, 可先比较 $-a$ 与 $-b$ 的大小, 然后再确定 a 与 b 的大小.

基础达标演练

一、选择题

1. 若 $f(x) = 3x^2 - x + 1, g(x) = 2x^2 + x - 1$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是 ()

- A. $f(x) > g(x)$ B. $f(x) = g(x)$
C. $f(x) < g(x)$ D. 随 x 值的变化而变化

2. 若 $a \neq 2$ 或 $b \neq -1$, 则 $M = a^2 + b^2 - 4a + 2b$ 的值与 -5 的大小关系是 ()

- A. $M > -5$ B. $M < -5$ C. $M = -5$ D. 不能确定

3. 若 $a > b, c > d$, 则下列不等关系中不一定成立的是 ()

- A. $a - d > b - c$ B. $a + d > b + c$
C. $a - c > b - c$ D. $a - c < a - d$

4. 若 $-1 < \alpha < \beta < 1$, 则下列各式中恒成立的是 ()

- A. $-1 < \alpha - \beta < 1$ B. $-2 < \alpha - \beta < -1$
C. $-2 < \alpha - \beta < 0$ D. $-1 < \alpha - \beta < 0$

二、填空题

5. 6^8 与 8^6 的大小关系是 6^8 _____ 8^6 .

6. 设 $a > 5$, 则 $\sqrt{a-3} - \sqrt{a-4}$ 与 $\sqrt{a-4} - \sqrt{a-5}$ 的大小关系是 _____.

7. 当 _____ 时, $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} < \sqrt[3]{a-b}$.

8. 设 $0 < a < b$, 且 $a + b = 1$. 将 $a, b, \frac{1}{2}, 2ab, a^2 + b^2$ 从小到大排列, 可排列为 _____.