21 世纪高等院校教材

经济管理类·数学基础课教材系列

大学数学
（微积分部分）
习题与解答

孔 敏 张雪娇
秦 彦 白 媛 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

经济管理类·数学基础课教材系列

大学数学(微积分部分)习题与解答

孔　敏　张雪娇　秦　彦　白　媛　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是《大学数学(微积分部分)》(科学出版社，2002)的配套教辅参考书. 内容涵盖了经济管理类数学微积分(数学三、四)全部内容的习题和解答，对初学者开拓思路、提高解题能力、深入掌握教材的内容有很大的帮助. 书后附有近三年考研试题及参考答案，以资参考.

本书可供综合大学经济管理类相关专业的学生使用，尤其对准备参加研究生入学考试的学生极有参考价值，也可作为教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学(微积分部分)习题与解答/孔敏等编. —北京：科学出版社，2006

21 世纪高等院校教材(经济管理类·数学基础课教材系列)

ISBN 7-03-017253-1

I.大… II.孔… III.微积分-高等学校-习题 IV.O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 050240 号

责任编辑：姚莉丽 赵 靖 贾瑞娜／责任校对：张 琪

责任印制：张克忠／封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2006 年 6 月第一次印刷 印张：17 1/4

印数：1—3 000 字数：328 000

定价：22.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

前　言

微积分是高等学校经济管理类专业的一门基础必修课. 作者根据该课程教学的需要和学生学习的要求, 专门编写了《大学数学 (微积分部分) 习题与解答》一书.

本书是根据南京大学商学院教学用书《大学数学 (微积分部分)》的习题编撰的配套教辅参考书. 《大学数学 (微积分部分)》自 1992 年推出以来, 一直为我校商学院和公共管理学院的学生使用并深受好评. 因其以教学为主, 故对所配的课后习题并没有提供完整的解题过程, 而该书所选的习题类型广、梯度大, 某些习题选自研究生入学考试试题, 也有很多题目对于初学者来说并不容易上手. 为了弥补这一缺陷, 也为了让广大读者能更加有效地使用教材, 本书将对教材课后习题做详尽的讲解, 并在附录中提供了近三年数学 (三) 和数学 (四) 的研究生入学考试题目, 体现出最新的研究生考试动向. 在编写过程中我们力求严密, 证明和解答也尽量采取较为简便的方法, 让读者理解起来更容易.

本书中, 按照原教材将习题解答分为 A 组和 B 组, 读者可根据自己的实际水平将书中内容的学习分为两个层次. 第一层次: 通过重点掌握习题的解答, 基本掌握《大学数学 (微积分部分)》课程所要求的基本概念和基本方法; 第二层次: 对全书进行系统的学习, 达到对所学内容融会贯通, 进一步强化对基本概念的理解, 从而提高解题的能力. 本书是学习该课程的必备参考书, 一般经济管理类专业学习微积分课程的学生均可使用, 尤其对准备参加研究生入学考试的学生极有参考价值, 也可作为教师的教学参考书.

我们在编写本书的过程中得到了南京大学数学系、商学院和科学出版社的大力支持及帮助, 并得到了姚天行先生的指教. 因作者编写本书时在新疆伊犁师范学院挂职工作, 期间也得到了伊犁师范学院数学系的大力支持, 该院数学系的高百俊、陈林老师为本书提出了许多宝贵意见, 江雯为本书的制图和排版付出了辛勤劳动, 在此一并表示衷心的感谢.

限于作者水平, 书中不当之处在所难免, 敬请读者不吝赐教.

作　者

目　　录

第 1 章　函数与极限 …… 1
　1.1　实数集 …… 1
　1.2　一元函数 …… 8
　1.3　极限 …… 22
　1.4　连续函数 …… 37
第 2 章　导数和微分 …… 45
　2.1　导数 …… 45
　2.2　微分 …… 61
　2.3　中值定理 …… 65
　2.4　导数的应用 …… 78
第 3 章　一元函数积分学 …… 99
　3.1　不定积分 …… 99
　3.2　定积分 …… 113
　3.3　定积分的应用 …… 129
　3.4　广义积分与 Γ 函数 …… 139
第 4 章　多元函数微积分 …… 144
　4.1　空间解析几何简介 …… 144
　4.2　多元函数微分学 …… 155
　4.3　二重积分 …… 188
第 5 章　级数 …… 206
　5.1　常数项级数 …… 206
　5.2　幂级数 …… 220
第 6 章　微分方程与差分方程简介 …… 239
　6.1　一阶微分方程 …… 239
　6.2　高阶微分方程 …… 251
附录　2004~2006 数(三)、数(四)考研试题(微积分部分) …… 263

第1章　函数与极限

1.1　实　数　集

A 组

1. 设 $A=\{0\}, B=\{0,1\}$, 下列陈述是否正确? 并说明理由.

(1) $A=\emptyset$;　(2) $A\subset B$;　(3) $0\in A$;　(4) $\{0\}\in A$;

(5) $0\subset A$;　(6) $A\cap B=0$;　(7) $A\cup B=B$.

解　(1) 否;　(2) 是;　(3) 是;　(4) 否;　(5) 否;　(6) 否;　(7) 是.

2. 设由 1 至 10 的自然数构成的集合为全集合, 它的三个子集 A,B,C 为

$$A=\{\text{偶数}\},\quad B=\{\text{奇数}\},\quad C=\{3\text{ 的倍数}\}.$$

试求下列各集合的元素:

(1) $B\cap C$;　(2) $\overline{A}\cap\overline{C}$;　(3) $\overline{A\cap C}$.

解　(1) $\{3,9\}$;　(2) $\{1,5,7\}$;　(3) $\{1,2,3,4,5,7,8,9,10\}$.

3. 设全集 U 为男女同班的全体学生组成的集合, 其中 $A=\{\text{男学生}\}, B=\{\text{戴眼镜的学生}\}$, 试写出下列各项所表示的集合:

(1) $A\cap B$;　(2) $\overline{A}\cap B$;　(3) $A\cap\overline{B}$;　(4) $A\cup B$;

(5) $\overline{A}\cup B$;　(6) $A\cup\overline{B}$;　(7) $\overline{A\cap B}$;　(8) $\overline{A\cup B}$.

解　(1) {戴眼镜的男生};　(2) {戴眼镜的女生};　(3) {不戴眼镜的男生}; (4) {全体男生与戴眼镜的女生};　(5) {全体女生与戴眼镜的男生};　(6) {全体男生与不戴眼镜的女生};　(7) {全体女生与不戴眼镜的男生};　(8) {不戴眼镜的女生}.

4. 设 $A=\{(x,y)\,|\,x-y+2\geqslant 0\}, B=\{(x,y)\,|\,2x+3y-6\geqslant 0\}, C=\{(x,y)\,|\,x-4\leqslant 0\}$, 其中 (x,y) 表示坐标平面上点的坐标. 在坐标平面上标出 $A\cap B\cap C$ 的区域.

解　图略.

5. 设 $A=\{x\,|\,x^3+2x^2-x-2>0\}, B=\{x\,|\,x^2+ax+b\leqslant 0\}$. 试求能使 $A\cup B=\{x\,|\,x+2>0\}, A\cap B=\{x\,|\,1<x\leqslant 3\}$ 的 a,b 的值.

解　$x^3+2x^2-x-2=(x+1)(x+2)(x-1)>0\Rightarrow -2<x<-1$ 或 $x>1$, 即 $A=\{x\,|-2<x<-1\cup x>1\}$. 又 $A\cap B\neq\emptyset$, 故 $B\neq\emptyset$. 设方程 $x^2+ax+b=0$ 有两根 x_1,x_2, 不妨令 $x_1\leqslant x_2$, 则 $B=\{x\,|\,x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$, 由 $A\cup B=\{x\,|\,x>-2\}$, 得

$-2 < x_1 \leqslant -1$. 又 $A \cap B = \{x \mid 1 < x \leqslant 3\}$, 所以 $-1 \leqslant x_2 \leqslant 3$. 故 $x_1 = -1, x_2 = 3$. 由韦达定理有 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 x_2 = b, \end{cases}$ 于是 $a = -2, b = -3$.

6. 设 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 验证下列等式:

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum\limits_{i=2}^{n+1} a_{i-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$;

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n} ca_i = c\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$;

(4) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$.

证明　(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,

$\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,

$\sum\limits_{i=2}^{n+1} a_{i-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,

$\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{n-k} = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$,

所以

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}.$$

(2) $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.\end{aligned}$$

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n} ca_i = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

(4) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_0.$

7. 证明伯努利不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 同号且大于 -1.

证明 当 $n=1$ 时, 不等式显然成立. 当 $n=2$ 时,

$$(1+x_1)(1+x_2)=1+x_1+x_2+x_1x_2>1+x_1+x_2,$$

不等式成立. 假设 $n=k$ 时, 不等式成立, 即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}(1+x_1)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})&=(1+x_1)\cdots[(1+x_k)(1+x_{k+1})]\\&=(1+x_1)\cdots(1+x_{k-1})(1+x_k+x_{k+1}+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

因为 $x_k>-1,x_{k+1}>-1$ 且同号, 所以

$$(1+x_k)(1+x_{k+1})=(1+x_k+x_{k+1}+x_kx_{k+1})>0,\quad 且\ x_k+x_{k+1}>-1.$$

于是由归纳假定可知

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k+x_{k+1}+x_kx_{x+1})&\geqslant(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k+x_{k+1})\\&\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}.\end{aligned}$$

综上可知

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,\qquad n\in\mathbf{N},$$

其中 $x_1,x_2\cdots x_n$ 同号且大于 -1.

8. 利用上题证明: 若 $x>-1$ 且 $n>1$, 则

(1) $(1+x)^n\geqslant 1+nx$, 当且仅当 $x=0$ 时等号成立;

(2) $1+\dfrac{x}{n}\geqslant(1+x)^{\frac{1}{n}}$.

证明 (1) 当 $x=0$ 时, 显然等号成立. 当 $x\neq 0$ 时, 由假定 $(n-1)\in\mathbf{N}$, 故有 $(1+x)^{n-1}\geqslant 1+(n-1)x$, 由伯努利不等式有

$$(1+x)^n=(1+x)^{n-1}(1+x)\geqslant[1+(n-1)x](1+x)=1+nx+(n-1)x^2>1+nx,$$

并且等号不成立. 因此当且仅当 $x=0$ 时, 不等式 $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ 等号成立.

(2) 因为 $x>-1, n>1$, 应用伯努利不等式有

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1+n\cdot\frac{x}{n}=1+x>0,$$

故有 $1+\dfrac{x}{n} \geqslant (1+x)^{\frac{1}{n}}$.

9. 分别利用伯努利不等式和 A-G 不等式证明不等式.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

证明 (1) 用伯努利不等式. 由 $-\dfrac{1}{(n+1)^2}>-1$, 有

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}>1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

又

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}&=\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1}=\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]^{n+1}\\&=\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]^{n+1}\\&>\frac{n}{n+1},\end{aligned}$$

于是有

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(2) 用 A-G 不等式.

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\sqrt[n+1]{1\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

由于 $1\neq 1+\dfrac{1}{n}$, 应用 A-G 不等式得

$$\sqrt[n+1]{1\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

于是有 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

10. 证明对任何 $x\in\mathbf{R}$ 有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$;

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

证明 (1) $|x-1|+|x-2|\geqslant|(x-1)+(2-x)|=1$.

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3| \geqslant |x-1+3-x|+|x-2| = 2+|x-2| \geqslant 2$.

11. 下列数集是否有上 (或下) 确界? 若有的话, 写出其上 (或下) 确界:

(1) $S_1 = \left\{1-\dfrac{1}{2^n}\,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$;

(2) $S_2 = \left\{n^{(-1)^n}\,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$.

解 (1) S_1 是有界数集, 其上确界为 $\sup S_1 = 1$, 下确界是 $\inf S_1 = 1/2$.

(2) 当 n 为偶数时, $n^{(-1)^n} = n$; 而当 n 是奇数时, $n^{(-1)^n} = \dfrac{1}{n}$, 所以数集 S_2 无上界, 其下确界为 $\inf S_2 = 0$.

B 组

1. 设 A, B, C 是任意集合, 求证:

(1) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$; (2) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$.

证明 (1)$\forall x \in A\cap(B\cup C)$, 则 $x \in A$ 且 $x \in (B\cup C)$, 即 $x \in A$ 且 $x \in B$, 或 $x \in A$ 且 $x \in C$. 若 $x \in A$ 且 $x \in B$, 则 $x \in A\cap B$, 于是 $x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$. 若 $x \in A$ 且 $x \in C$, 则 $x \in A\cap C$, 于是 $x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$, 故 $A\cap(B\cup C) \subset (A\cap B)\cup(A\cap C)$. 反之, $\forall x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$, 则 $x \in A$ 且 $x \in B$, 或 $x \in A$ 且 $x \in C$. 若 $x \in A$ 且 $x \in B$, 则 $x \in A\cap(B\cup C)$. 若 $x \in A$ 且 $x \in C$, 则 $x \in A\cap(B\cup C)$, 所以 $(A\cap B)\cup(A\cap C) \subset A\cap(B\cup C)$, 因此 $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(2) 下面我们用 (1) 的结论和德摩根 (De Morgan) 律来证明该结论.

$$\overline{A\cup(B\cap C)} = \overline{A}\cap(\overline{B\cap C}) = \overline{A}\cap(\overline{B}\cup\overline{C}) = (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{C}),$$

两边取补得

$$A\cup(B\cap C) = \overline{(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{C})} = \overline{(\overline{A}\cap\overline{B})}\cap\overline{(\overline{A}\cap\overline{C})} = (A\cup B)\cap(A\cup B).$$

2. 证明当 $n > 1$ 时, $\left(\dfrac{n+1}{3}\right)^n < n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

证明 先证 $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$. 由 A-G 不等式

$$\frac{n+1}{2} > \sqrt{n\cdot 1},\ \frac{n-1+2}{2} > \sqrt{(n-1)\cdot 2},\ \frac{n-2+3}{2} > \sqrt{(n-2)\cdot 3},\ \cdots,$$

$$\frac{2+(n-1)}{2} > \sqrt{2\cdot(n-1)},\ \frac{1+n}{2} > \sqrt{1\cdot n},$$

所以有 $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n > \sqrt{(n!)^2} = n!$.

再证 $\left(\dfrac{n+1}{3}\right)^n < n!$.

用数学归纳法, 当 $n=1$ 时显然成立. 设 $n=k$ 时成立, 即 $\left(\frac{k+1}{3}\right)^k<k!$, 当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}\left(\frac{k+2}{3}\right)^{k+1}&=\left(\frac{k+1}{3}\cdot\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(\frac{k+1}{3}\right)^k\left(\frac{k+1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\\&<k!\left(\frac{k+1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}=\frac{1}{3}(k+1)!\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}.\end{aligned}$$

下面证明 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<3,\ \forall k\in\mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k&=1+k\cdot\frac{1}{k}+\frac{k(k-1)}{2!}\left(\frac{1}{k}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k!}k(k-1)\cdots1\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^k\\&=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\\&<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}\\&<2+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(k-1)\cdot k}\\&=2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=3-\frac{1}{k},\end{aligned}$$

故有 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<3$. 于是有

$$\left(\frac{k+2}{3}\right)^{k+1}<\frac{1}{3}(k+1)!\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}<(k+1)!.$$

3. (1) 设 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 为实系数二次三项式, 求证: $\forall x\in\mathbf{R}$ 均有 $y\geqslant0$(或 $y>0$) 成立的充要条件是 $b^2-4ac\leqslant0$(或 $b^2-4ac<0$);

(2) 利用 (1) 的结果证明柯西 (Cauchy) 不等式

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right),\qquad\forall\, x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n\in\mathbf{R}.$$

证明　(1) 由题设 $a>0$, 所以实系数二次三项式 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=-\frac{2a}{b}$ 时取最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$. 于是有

$$y\geqslant0(>0)\Longleftrightarrow\frac{4ac-b^2}{4a}\geqslant0(>0)\Longleftrightarrow4ac-b^2\geqslant0(>0)\Longleftrightarrow b^2-4ac\leqslant0(<0).$$

(2) 因为 $\sum\limits_{i=1}^n(\lambda x_i+y_i)^2\geqslant0$, 又

$$\sum_{i=1}^n(\lambda x_i+y_i)^2=\sum_{i=1}^n(\lambda^2x_i^2+2\lambda x_iy_i+y_i^2)=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\lambda^2+\left(2\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)\lambda+\sum_{i=1}^n y_i^2,$$

由 (1)

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)\lambda^2+2\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)\lambda+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\geqslant 0\iff\Big(2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)^2-4\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\Big)\leqslant 0$$
$$\iff\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)^2\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\Big),$$

等式成立的充要条件是 $\lambda x_i+y_i=0, i=1,\cdots,n$, 即 x_i 与 y_i 成比例 $(i=1,2,\cdots,n)$.

4. 设 a,b,c,d 均为实数, 求证:

(1) $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{b^2+c^2}\right|\leqslant|a-c|$;

(2) $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right|\leqslant|a-c|+|b-d|$.

证明 (1) $|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{b^2+c^2}|=\left|\dfrac{a^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}}\right|$

$$=|a-c|\frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}}\leqslant|a-c|\frac{|a|+|c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}}\leqslant|a-c|.$$

(2) $|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}|=|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{c^2+d^2}|$
$\leqslant|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{b^2+c^2}|+|\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{c^2+d^2}|\leqslant|a-c|+|b-d|$.

5. 证明:

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+n+1}$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

证明

(1) 因 $\dfrac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\dfrac{1}{a+k}-\dfrac{1}{a+k+1}$, 所以

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{1}{a+k}-\frac{1}{a+k+1}\Big)$$
$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a+n+1}$$
$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+n+1}.$$

(2) 因 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\Big)$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big]\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

1.2 一元函数

A 组

1. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1},g(x)=x-1$;

(2) $f(x)=\ln x^2,g(x)=2\ln x$;

(3) $f(x)=\sin x,g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$;

(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3},g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

解 (1) 不同, 因为 $D(f)=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},x\neq-1\},D(g)=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}\}$.

(2) 不同, 因为 $D(f)=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}\},D(g)=\{x\,|\,x>0\}$.

(3) 不同, 因为 $g(x)=|\sin x|$, 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值域不同.

(4) 相同, 因为 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}=x\sqrt[3]{x-1}=g(x)$.

2. 求下列函数的定义域和值域:

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$; (2) $y=\sqrt{2+x-x^2}$;

(3) $y=\ln(1-2\cos x)$; (4) $y=\arccos\dfrac{1-x}{3}$.

解 (1) 定义域为 $\{x\,|\,x\in\mathbf{R},x\neq-1\}$,

$$y=\frac{x^2}{x+1}=\frac{(x+1)^2-2(x+1)+1}{x+1}=(x+1)+\frac{1}{x+1}-2.$$

因 $(x+1)+\dfrac{1}{x+1}\geqslant 2$ 或 $(x+1)+\dfrac{1}{x+1}\leqslant -2$, 故 $y\geqslant 0$ 或 $y\leqslant -4$, 其值域为 $(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$.

(2) $2+x-x^2=(2-x)(x+1)\geqslant 0$, 所以定义域为 $\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 2\}$, $2+x-x^2=-(x-1/2)^2+9/4\leqslant 9/4\ \Rightarrow\ 0\leqslant y=\sqrt{2+x-x^2}\leqslant 3/2$, y 的值域为 $[0,3/2]$.

(3) $1-2\cos x>0 \ \Rightarrow\ \cos x<1/2$, 故定义域为

$$\left\{x \,|\, 2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}\ (k\in \mathbf{Z})\right\}.$$

又 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1\ \Rightarrow -1\leqslant 1-2\cos x\leqslant 3$, 且 $1-2\cos x>0$, 即 $0<1-2\cos x\leqslant 3$, 因此 $\ln(1-2\cos x)\leqslant\ln 3$, y 值域为 $(-\infty,\ln 3]$.

(4) $-1\leqslant\dfrac{1-x}{3}\leqslant 1\Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 4$, 定义域为 $\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 4\}$. 由于 $\dfrac{1-x}{3}$ 可取到 $[-1,1]$ 中所有实数, 故其值域为 $[0,\pi]$.

3. 设 $f(x)=x^2-3x+2$, 求 $f(0), f(-x), f\left(\dfrac{1}{x}\right), f(x+1)$.

解 $f(0)=0-0+2=2$, $f(-x)=(-x)^2-3(-x)+2=x^2+3x+2$,

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-3\left(\frac{1}{x}\right)+2=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2,$$

$$f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+2=x^2-x.$$

4. 设 $f(x)=\sin x$, 画出 $f(2x), f\left(\dfrac{x}{2}\right), 2f(x), \dfrac{1}{2}f(x), f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 及 $f(x)+1$ 的图形.

解 $f(2x)$ 周期为 π, 值域为 $[-1,1]$; $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ 周期为 4π, 值域为 $[-1,1]$;

$2f(x)$ 值域为 $[-2,2]$, 周期为 2π; $\dfrac{1}{2}f(x)$ 值域为 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$, 周期为 2π;

$f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 由 $f(x)$ 的图像向左平移 $\pi/4$ 个单位;

$f(x)+1$ 由 $f(x)$ 的图像向上平移 1 个单位 (图略).

5. 画出由下列方程确定的多值函数的图形:

(1) $x=y+|1-y|$; (2) $|x|+|y|=1$; (3) $x^2+y^2-2x=0$.

解 (1) $x=\begin{cases}1, & y\leqslant 1,\\ 2y-1, & y>1.\end{cases}$

(2) 依题意, 函数关于 x 轴, y 轴及原点均对称, 又因为第一象限中函数表达式为 $y=1-x$, 所以其图形为依次连接点 $(-1,0),(0,1),(1,0),(0,-1)$ 所构成的菱形.

(3) 由 $x^2+y^2-2x=0$ 可得 $(x-1)^2+y^2=1$, 所以该函数的图形是以 $(1,0)$ 为圆心, 半径为 1 的圆 (图略).

6. 求函数 $y=f(x)$, 已知:

(1) $f(x+1)=x^2+2x-1$; (2) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$;

(3) $2f(\sin x)+3f(-\sin x)=4\sin x\cos x, |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$; (4) $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$.

解　(1) $f(x+1)=(x^2+2x+2)-2=(x+1)^2-2$, 故得 $f(x)=x^2-2$.

(2) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=x^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-2x\cdot\dfrac{1}{x}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$, 于是得 $f(x)=x^2-2\ (|x|\geqslant 2)$.

(3) $|x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ -1\leqslant\sin x\leqslant 1$, 定义域关于原点对称.

$$\begin{aligned}&2f(\sin(-x))+3f(-\sin(-x))=4\sin(-x)\cos(-x)\\ \Rightarrow\quad&2f(-\sin x)+3f(\sin x)=-4\sin x\cos x.\end{aligned}$$

又

$$2f(\sin x)+3f(-\sin x)=4\sin x\cos x,$$

解得

$$f(\sin x)+f(-\sin x)=0\quad\Rightarrow\quad f(\sin x)=-4\sin x\sqrt{1-\sin^2 x},$$

因此

$$f(x)=-4x\sqrt{1-x^2},\qquad |x|\leqslant 1.$$

(4)
$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right),$$

所以 $f(x)=2(1-x^2)\ (|x|\leqslant 1)$.

7. 设函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0,\\ x, & 0<x<1,\\ x^2-4x+4, & 1\leqslant x<4,\end{cases}$$

试求 $f(-1),f(0),f\left(\dfrac{1}{2}\right),f(1),f(2)$; 指出函数的定义域并作出函数的图形.

解　函数定义域为 $(-\infty,4)$.

$f(-1)=-(-1)=1,\ f(0)=-0=0,\ f(1/2)=1/2,\ f(1)=1-4+4=1,$

$f(2)=2^2-4\times 2+4=0$ (图略).

8. 用解析式表示图 1-1 中用图形表示的函数:

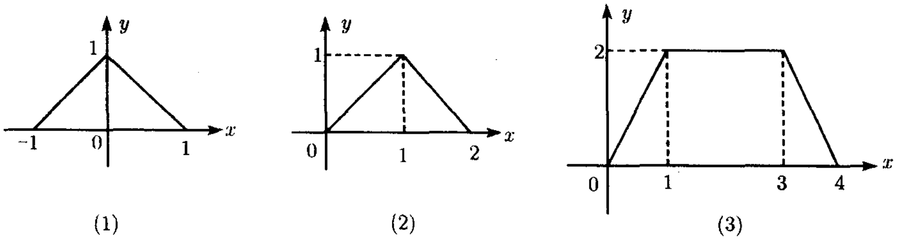

图 1-1

解 (1)$f(x)=\begin{cases} x+1, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x+1, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -x+2, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2, & 1 < x \leqslant 3, \\ -2x+8, & 3 < x \leqslant 4. \end{cases}$

9. 设 x, y 为任意实数, 求证:

(1) $[x+y] \geqslant [x]+[y]$;

(2) $[x-y] \leqslant [x]-[y]$;

(3) $\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}x \cdot \operatorname{sgn}y$;

(4) $|x|=x \cdot \operatorname{sgn}x$.

证明 (1) 因为 $[x] \leqslant x < [x]+1, [y] \leqslant y < [y]+1$, 所以

$$[x]+[y] \leqslant x+y < [x]+[y]+2,$$

因此有

$$[x]+[y]=\Big[[x]+[y]\Big] \leqslant [x+y].$$

(2) $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 有 $x=[x]+\alpha\ (0 \leqslant \alpha < 1),\ y=[y]+\beta\ (0 \leqslant \beta < 1)$. 故

$$-y=-[y]-\beta, \qquad -1 < -\beta \leqslant 0,$$

于是有

$$x-y=[x]-[y]+(\alpha-\beta), \qquad -1 < \alpha-\beta < 1.$$

若 $0 \leqslant \alpha-\beta < 1$, 则 $[x-y]=[x]-[y]$; 若 $-1 < \alpha-\beta < 0$, 则 $x-y=[x]-[y]-1+(1+\alpha-\beta)$, 因 $0 < 1+\alpha-\beta < 1$, 所以 $[x-y]=[x]-[y]-1 < [x]-[y]$. 综上所述, $[x-y] \leqslant [x]-[y]$.

(3) 当 $xy > 0$ 时, $\operatorname{sgn}(xy)=1$. 若 $x > 0, y > 0$, 则

$$\operatorname{sgn}(x)=1, \operatorname{sgn}(y)=1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)=1.$$

若 $x < 0, y < 0$, 则

$$\operatorname{sgn}(x)=-1, \operatorname{sgn}(y)=-1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)=1.$$

当 $xy=0$ 时, $\operatorname{sgn}(xy)=0$, x, y 中至少一个为 $0, \operatorname{sgn}(x)$ 与 $\operatorname{sgn}(y)$ 中至少一个为 0, 于是 $\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)=0$, 故有 $\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)$.

当 $xy<0$ 时, $\operatorname{sgn}(xy)=-1$. 不妨设 $x<0, y>0$, 则 $\operatorname{sgn}x=-1, \operatorname{sgn}y=1$, 所以 $\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)=-1$. 综上所述 $\operatorname{sgn}(xy)=\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)$.

(4) 当 $x=0$ 时显然成立; 当 $x>0$ 时, $\operatorname{sgn}x=1, x\cdot\operatorname{sgn}x=x=|x|$; 当 $x<0$ 时, $\operatorname{sgn}x=-1, x\cdot\operatorname{sgn}x=x\cdot(-1)=-x=|x|$. 综上所述, $|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$.

10. 某直角三角形周长为 $2p$, 一条直角边长为 x, 试将该三角形面积表示成 x 的函数, 并讨论其定义域.

解　设面积为 $y=f(x)$, 另一直角边长为 $u(x)$, 则斜边长为 $2p-x-u(x)$. 由题意

$$x^2+u^2(x)=(2p-x-u(x))^2, \qquad f(x)=\frac{1}{2}x\cdot u(x),$$

故得

$$u(x)=\frac{2p^2-2px}{2p-x}, \qquad f(x)=\frac{px(p-x)}{2p-x}.$$

又 $2p>x>0, u(x)>0$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $(0,p)$.

11. 有一工厂 A 离河道的垂直距离为 h 千米, 垂足为 B, 见图 1-2. 工厂要在河岸建一码头 D, 将产品用汽车运到码头, 再用船运到下游 C 处. 已知汽车每吨每千米的运费是 a 元, 船的运费是 b 元, 设码头 D 距 B 点 x 千米, 试将总运费 y 表示为距离 x 的函数.

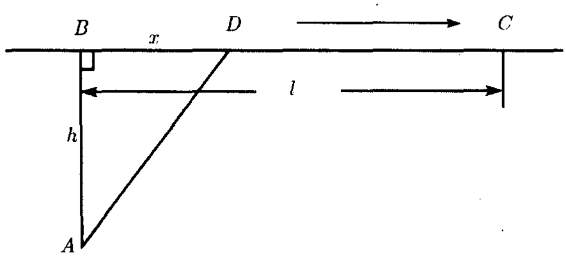

图 1-2

解　如图 1-2 所示, $AD=\sqrt{h^2+x^2}, CD=l-x$, 依题意

$$y=a\sqrt{h^2+x^2}+b(l-x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l.$$

12. 某化肥厂生产尿素能力为 15000 吨, 固定成本为 30 万元, 产量在 5000 吨以内时每吨可变成本为 450 元, 超过 5000 吨部分每吨可变成本为 400 元. 试将总成本 C 与平均每吨成本表示成产量 Q 的函数.

解　当 $0<Q\leqslant 5000$ 时, $C=3\times10^5+450Q, \overline{C}=C/Q=(3\times10^5)/Q+450$; 当 $5000<Q\leqslant 15000$ 时, $C=3\times10^5+450\times5000+400(Q-5000)=5.5\times10^5+400Q, \overline{C}=$