高等学校教材

雷达信号理论

林茂庸　柯有安　编著

国防工业出版社

雷达信号理论

林茂庸　柯有安　编著

国防工业出版社

内容简介

本书系高等学校工科电子类电子工程专业统编教材之一，是一本比较系统阐述雷达信号理论的书籍。

全书共分九章，另有三个附录，从雷达信号的最优处理理论入手，阐明匹配滤波器是最优处理的基础。接着从分辨理论引出模糊函数，系统分析了雷达信号的模糊函数及其主要参数对系统潜在性能（诸如分辨力、测量精度、模糊度、杂波抑制能力等）的影响。然后分析了几种典型信号的模糊函数。最后介绍波形设计的基本方法。

本书除作大学有关专业教材外，还可供从事雷达、声纳、通信等有关方面的科技工作者参考。

雷达信号理论

林茂庸　柯有安　编著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$787\times1092^{1}/_{16}$　印张$15^{5}/_{8}$　357千字

1984年11月第一版　1984年11月第一次印刷　印数：0,001—3,100册

统一书号：15034·2108　定价：2.40元

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初，由于各有关院校，特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材 159 种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》，中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构，并制定了一九八二～一九八五年教材编审出版规划，列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共 217 种选题。在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

这一批教材的书稿，主要是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选择优和从第一轮较好的教材中修编产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力。

这一批教材，分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社和天津科学技术出版社承担出版工作。

限于水平和经验，这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前 言

本教材系由《通信与电子系统》教材编审委员会《雷达》编审小组评选审定，并推荐出版。

该教材由北京工业学院林茂庸、柯有安编写（第一、四、五、六、七、八、九章及附录Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ由林茂庸编写，第二、三章由柯有安编写）华东工程学院刘国岁和南京航空学院朱兆达担任主审。编审者均依据《雷达》编审小组审定的编写大纲进行编写和审阅的。

本课程的参考教学时数为60学时，全书共分九章，并有三个附录，从内容上讲可概括为四个部分：第一章是信号和系统分析方面的基础知识，重点讲述信号的矢量表示、实信号的复数表示、波形参数以及信号通过线性带通系统的包络分析法等。第二至五章系统阐述雷达信号检测、参量估计和分辨理论。介绍模糊函数及其主要性质，系统分析雷达信号的模糊函数及其主要参数对系统潜在性能（诸如分辨力、测量精度、模糊度和杂波抑制能力等）的影响。第六至八章为典型雷达信号分析部分。导出信号的频谱、模糊函数、匹配滤波器频率特性等的解析表达式，分析各种信号模糊图的特点及其适用场合。关于信号产生和处理方法因有专书介绍，这里仅做一些原理性叙述。第九章讲述波形选择和波形设计的基本方法，包括：按自相关函数设计波形、抑制杂波波形设计以及从目标分辨要求设计波形的基本方法。

本书比较侧重基本理论、基本概念和基本方法的叙述，在数学推导上力求准确，但不过分追求数学上的严密性，有些地方从实际应用出发采用了近似计算方法。本书各章都附有一定数量的习题，它有助于读者加深理解所学内容。章末附有参考文献目录，便于读者对有关问题进行深入地钻研。

考虑到本专业学生对泛函分析、近世代数和优化数学不太熟悉，本书在第一章用很小的篇幅介绍了信号空间的概念，并采用附录形式，介绍了近世代数和优化数学方面的基础知识。

本课程应在学生学过“信号、电路与系统”、“线性系统与反馈系统”、“统计无线电技术”和“雷达系统”等课程后开设。目的在于提高学生对雷达信号的分析与综合能力，为掌握近代雷达理论、从事雷达系统分析、信号处理和波形设计等方面的工作打下理论基础。

参加本教材的审阅工作的还有西北电讯工程学院的戴树荪同志，其他兄弟院校同志也对本书提出宝贵意见，这里表示诚挚的感谢。由于编者水平有限，书中不可避免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编者

目　录

绪　论

众所周知，雷达是一个信息传输和处理的系统，它区别于通讯系统之处，在于信息的调制过程发生在目标散射之时。显然，雷达信息传输过程也会受到各种外界（自然和人为的）干扰和内部噪声干扰。所以雷达信号理论的发展也是建立在信息论，特别是信号检测理论的基础之上的。

早在1943年诺思（North）[1]提出匹配滤波器理论，大大推动了雷达检测能力的提高。1950年劳森（Lawson）把匹配滤波器理论系统地载入著名的专著[2]。

1950年伍德沃德（Woodward）[3]把香农（Shannon）所建立的基础信息论●中关于信息量的概念推广应用于雷达信号检测中来，认为从提取最多有用信息的观点出发，理想的雷达接收机同样应该是一个后验概率的计算装置。

从统计学的观点看，雷达观测是一个典型的统计判断过程。汉索（Hance）[4]和马库姆（Marcum）[5]最早把密笃尔顿（Middleton）[6]和聂曼（Neyman）[7]建立的统计检测理论应用于雷达。斯威尔林（Swerling）[8]结合雷达目标起伏特性建立了四种目标起伏模型，得到许多有用的目标检测数据。

在信号检测理论的历史上，曾出现过许多最佳准则，已经证明，从各种最佳检测准则出发，导出的最佳信号检测系统都是由一个似然比计算装置和一个门限检测器组成的。根据不同的最佳准则，门限取值不同。在高斯噪声下对确知信号的似然比计算装置实质上就是一个匹配滤波器。至此，按最大信噪比准则导出的匹配滤波器与按统计判决理论导出的似然比计算装置之间的内在联系便显而易见了。

为了解决杂波中的信号检测问题，乌尔柯维兹（Urkowitz）[9]把匹配滤波器理论推广到色噪声的场合，提出“白化滤波器”和“逆滤波器”的概念。之后，曼那斯（Manasse）[10]研究了同时存在白噪声和杂波干扰下的最佳滤波器，为抑制杂波波形优化问题打下了理论基础。

克拉美（Cramer）[11]继承菲切尔（Fisher）的工作，建立了经典的参量估计理论。斯莱皮恩（Slepian）把经典的最大似然估计理论应用于雷达[12]，稍后斯科尔尼克(Skolnik)[13]对雷达测量的理论精度作了系统的分析和总结。

值得指出的是伍德沃德不仅在发展雷达信号检测理论上作出了很大贡献，而且在著名的著作[14]中提出有名的雷达模糊原理，定义了模糊函数及分辨常数等新概念，奠定了雷达分辨理论的基础。并首次触及波形设计问题，指出距离分辨力和测量精度取决于信号的带宽而非时宽，从而大大推动了雷达信号理论的发展。稍后的赫尔斯翘姆（Helstrom）的著作[15]应该说也是雷达信号统计检测理论方面很好的一本参考书。

二次世界大战期间及战后初期，在实现了雷达信号最优处理的前提下，典型的脉冲雷达在同时提高发现能力、距离和速度测量精度以及分辨力方面遇到了不可克服的矛盾，为了解决这个问题，也为了反雷达侦察的需要，各国先后开展了应用“复杂波形”

● 卡切尔尼柯夫（Котельников）也是基础信息论的创始人之一。

代替传统的脉冲信号的研究。最早获得实际应用的是线性调频脉冲压缩信号[16~22]。以后相继出现非线性调频、相位编码[23]和相参脉冲串等大时宽-带宽信号。

由于雷达发射波形不仅决定了信号处理方法，而且直接影响系统的分辨力、测量精度以及抑制杂波能力等潜在性能。于是，波形设计就成了雷达系统最佳综合的重要内容，逐渐形成现代雷达理论的重要分支。

开始，人们希望找到一种"理想"的波形，以适应各种不同的目标环境和工作要求，很快就发现这种努力是徒劳的。

雷达波形设计一直沿着两种不同的途径进行研究，一种是萨斯曼（Sussman）等人[24~26]所走的波形综合的道路，通过模糊函数最优综合的方法，得到所需要的最优波形。遗憾的是这方面不仅遇到了数学上的困难，而且综合得到的复杂调制波形，也往往是技术上难以实现的信号。不过一维模糊函数的综合借助于相位逗留原理获得了较好的解决[27]。里海涅克（Rihaczek）[28]提出另外一种"简便的波形选择途径"，即根据目标环境图和信号模糊图匹配的原则，选择合适的信号类型。进而兼顾技术实现的难易程度，选择合适的信号形式和波形参数。近代先进的数字化多功能雷达大多采用多种发射信号，以适应不同的战术用途。随着电子战的发展，现代雷达面临的目标环境不仅复杂多端，而且是瞬息万变的，所以波形自适应是个值得重视的发展方向。

综上所述，可以看到，雷达信号理论的形成与发展，目的在于提高雷达信号传输的可靠性和有效性。显然，这里不是针对系统的某个环节或某个电路的具体措施，而是对整个系统进行最优综合。概括地说，雷达信号理论研究的课题包括从理论上探讨信号最优处理方法和最优波形的选择等两方面。这里涉及如何建立系统的数学模型；确定最优准则以及寻求最优系统结构（数学运算结构）等方面的问题。所以雷达信号理论是发展各种雷达新体制的理论基础。此外，雷达信号理论也是对实际雷达系统进行性能分析的理论指导，用以阐明实际雷达系统的合理性及改进的可能性。相信随着雷达信号理论的发展，雷达系统的威力、精度、分辨力以及反侦察、抗干扰能力必将得到进一步提高，雷达回波信号中所包含的有用信息必将得到更充分的利用。

雷达信号理论既然是设计近代雷达的理论基础，在培养高等科技人材的院校设置这门课程就显得十分必要了。当然，雷达信号理论涉及面很广，内容十分丰富，本书只是个导论性的书籍，着重介绍雷达信号最优检测、最优估计、分辨理论以及波形设计等基本问题，为读者进一步掌握近代雷达理论提供必要的基础。

参考文献

〔1〕 D. O. North, Analysis of Factors which Determine Signal-to-noise Discrimination in Pulsed Carrier Systems, RCA Rept, PTR-6C, June 1943.（PIEEE Vol 51, pp 1015, 1963重印）.

〔2〕 J. L. Lawson and G. E. Uhlenbeck, Threshold Signals, Radiation Lab. Series No. 24, McGraw-Hill, 1950.

〔3〕 P. M. Woodward and I. L. Devies, A Theory of Radar Information, Phil. Mag. Vol 41, pp1001～1017, 1950.

〔4〕 H. V. Hance, The Optimization and Analysis of Systems for the Detection of Pulsed Signals in Random Noise, D. Sc Dissertation, MIT Cambridge Mass, 1951.

〔5〕 J. I. Marcum, A statistical Theory of Target Detection by Pulsed Radar, RAND Corp Mem. RM-754, Dec. 1947; RM-753, July 1948.（IRE Trans, Vol IT-6 No. 2, 1960重印）.

〔6〕 D. Middleton and J. H. Van Vleck, Theoretical Comparison of the Visual, Aural and Meter Reception of Pulsed Signals in the Presence of Noise, J. of Appl. Phys. Vol 17, pp940～971Nov. 1946.

〔7〕 J. Neyman and E. J. Pearson, On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypothesses, Philos. Trans. Royal Soc. London Series A, 23 pp289～337, 1931.

〔8〕 P. Swerling, Probability of Detection for Fluctuating Targets RAND Corp Res Mem. RM-1217 March 1954. (IRE Trans. Vol IT-6 pp269～308 April 1960重印).

〔9〕 H. Urkowitz, Filter for Detection of Small Signals in Clutter, J. Appl. Phy. Vol 24 pp 1024, July 1953.

〔10〕 R. Manasse, The Use of Pulse Coding to Discriminate Against Clutter, AD260. 230, 1961.

〔11〕 H. Cramer, Methods of Mathematical Statistics, Princeton Univ. press, 1946.

〔12〕 D. Slepien, Estimation of Signal Parameters in the Presence of Noise, IRE Trans. Vol IT-4, pp 68～89, March 1954.

〔13〕 M. I. Skolnik, Theoretical Accuracy of Radar Measurements PGANE Trans. ANE-7 No.4 pp123～129, 1960.

〔14〕 P. M. Woodward, Probability and Information Theory with Application to Radar, McGraw-Hill, 1953.

〔15〕 C. W. Helstrom, Statistical Theory of Signal Detection, Pergamon Press, 1960.

〔16〕 E. Huffman, German Patent No. 768, 068, 1940.

〔17〕 D. O. Sproule and A. J. Hughes, British Patent No. 604, 429, 1948.

〔18〕 W. Cauer, German Patent No. 892, 772, 1950.

〔19〕 R. H. Dicke, U. S. Patent, No.2, 624, 876, 1953.

〔20〕 S. Darlington, U. S. Patent, No.2, 678, 997, 1954.

〔21〕 Я. Д. Шнрман, Способ повышения разрешающей способности радиолокационных станций и устройство для его осуществления, Авт. свид. No. 146803 по Заявке No. 461974/40 от 25 Июля 1956.

〔22〕 J. E. Chin and C. E. Cook, The Mathematics of Pulse Compression, Sperry Eng. Review Vol 12, pp11～16 Oct. 1959.

〔23〕 W. M. Sibert, A Radar Detection Philocophy, IRE Trans Vol IT-2, pp 204～221, Sept. 1956.

〔24〕 C. H. Wilcox, The Synthesis Problem for Radar Ambiguity Function, AD 239427, 1960.

〔25〕 S. M. Sussman, Least-square Synthesis of Radar Ambiguity Functions, IRE Trans. Vol IT-8 No.3 1962.

〔26〕 J. D. Walf, G. M. Lee and C. E. Suyo, Radar Waveform Synthesis by Mean-square Optimization Techniques, IEEE Trans. Vol AES-5, July 1969.

〔27〕 E. L. Key, E. N. Fowle and R. D. Haggarty, A Method of Designing Signals of Large Time-bandwidth Production, IRE Int. Conv. Record pt 4 pp 146～155, 1961.

〔28〕 A. W. Rihaczek, Radar Waveform Selection——A Simplified Approach, IEEE Trans. Vol AES-7, Nov. 1971.

第一章　信号分析基础

1.1 概　　述

实信号　雷达发射信号与通信系统的发射信号不同，它不包含任何有关目标的信息而只是信息的运载工具，有关目标的信息是在发射信号碰到目标并产生反射的过程中调制上去的，即目标的全部信息是蕴藏在雷达回波信号内的。雷达发射信号一般是除初始相位外，其余参量均确知的确定信号（相参雷达的发射信号则与某一基准信号保持严格的相位关系）。雷达接收信号则是回波信号与噪声干扰叠加而成的随机信号。信号可以用时间的实函数 $x(t)$ 表示，称为实信号，其特点是具有有限的能量或有限的功率。如果把信号 $x(t)$ 理解为单位电阻上的电压或通过其中的电流，则

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt$$

即为单位电阻上所消耗的能量。信号能量有限即

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt<\infty$$

也就是说函数 $x(t)$ 是平方可积的。我们称能量有限信号为能量型信号。随机信号及周期信号的特点是具有有限的功率而能量无限，故称为功率型信号。

频谱　一般来说，信号用时间函数表示，其形式是比较复杂的，直接对它本身进行分析和处理都是比较困难的。为了克服这种困难，常将一般的复杂信号展开成各种类型的基本信号之和或积分，基本信号除了必须满足一定的数学条件外，其主要的特点在于其简单性——或者实现起来简单，或者分析起来简单，或者二者兼而有之。在无线电技术领域中，最常采用作为基本信号的是正弦信号，其复数型式称为复正弦信号。此外，还有 δ 函数，sin c 函数，walsh 函数和 z 变换函数等。这里着重介绍用正弦型基本信号对信号进行分析，即信号的频谱分析。

用具有 ω 参量的复正弦信号作为基本信号，则任何复杂调制信号都可写成

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

其中

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

对于平方可积，也就是能量有限信号，则函数 $X(\omega)$ 总是存在的，而且 $X(\omega)$ 也总是平方可积的。若以 f 为参量，以上式子还可写成具有对称的形式

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{j2\pi ft}df \tag{1.1}$$

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{1.2}$$

通常把$X(f)$叫做信号的谱密度，或简称为频谱。一般$X(f)$为f的复函数

$$X(f)=|X(f)|e^{j\Theta(f)} \tag{1.3}$$

式中$|X(f)|$为信号的振幅频谱，$\Theta(f)$为相位频谱。

信号$x(t)$与其频谱$X(f)$之间的关系是一一对应的关系。换句话说，信号$x(t)$给定后，信号$X(f)$便是确定的，反之亦然。因此，信号既可以用时间函数$x(t)$来描述，也可以用它的频谱$X(f)$来描述。

式（1.2）称为信号$x(t)$的傅立叶变换，而式（1.1）称为$X(f)$的傅立叶反变换。信号$x(t)$及其频谱$X(f)$组成一组傅立叶变换对，记作

$$x(t)\rightleftharpoons X(f)$$

对实信号来说，$x(t)$为实函数，即$x(t)=x^*(t)$，于是信号频谱的复共轭为

$$X^*(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x^*(t)e^{j2\pi ft}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi(-f)t}dt=X(-f)$$

这就是实信号频谱的对称性质：

$$X^*(f)=X(-f) \tag{1.4}$$

$$\left.\begin{aligned}|X(f)|&=|X(-f)|\\ \Theta(f)&=-\Theta(-f)\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

也就是说，实信号的振幅频谱为偶函数，相位频谱为奇函数。

信号的傅立叶变换具有一些重要性质，（参见附录Ⅰ），灵活运用这些性质可以较快地求出许多复杂信号的频谱[1,2]。

一般实信号的频谱是分布在整个频率轴（$-\infty<f<\infty$）上的，尤其是持续时间有限的信号更是如此，也就是说，实信号具有双边频谱。式（1.4）说明，实信号频谱的正负频率两半边之间有着完全确定的关系，由一个半边频谱可推导出另一个半边频谱。

窄带信号　雷达信号常是这样一类信号，其频谱主要成分集中于载频附近某一频带Δf内，且一般总能满足$\Delta f\ll f_0$，两个边带频谱互不重叠，此时用一个边带频谱就可决定信号波形。这类信号称为窄带信号，其数学表达式常可写成

$$x(t)=a(t)\cos[2\pi f_0t+\theta(t)] \tag{1.6}$$

其中$a(t)$和$\theta(t)$与$\cos 2\pi f_0t$相比，是时间的慢变化函数，称$a(t)$为载波$\cos 2\pi f_0t$的包络函数，$\theta(t)$为相位调制函数。

为了简化信号和系统分析，广泛采用具有单边频谱的复信号，关于实信号用复函数表示，我们将在1.4节中介绍。

为了给信号表示、变换、处理提供一个统一的工具，也为了在信号分析和处理中能够应用大家所熟悉的矢量空间的概念和矢量分析方法，我们将在1.2和1.3节中分别介绍信号空间的概念，以及信号的矢量表示和投影定理。

1.2　信号空间的概念

为了讨论各种各样的信号，我们需要有一个统一的工具，信号空间的概念和泛函分析的方法就是这样一种工具。应用信号空间的概念会使一些比较抽象、难以理解的问题，变得更直观、易于理解了。例如在讨论分辨问题时，就可以把两个邻近目标的回波信号视

为信号空间的两个点，而用两点间的距离来量度它们之间的可分辨程度（参见5.1节）。

信号集合 我们把具有某种共同性质的信号归为一个集合，称之为信号集合，记为 $S=\{x; P\}$ 或 $P \Rightarrow x \in S$，P 表示集合中信号的共同性质。下面给出几个信号分析中常见的信号集合。

正弦信号集合 记为

$$S_c=\{x;\ x(t)=\mathrm{Re}[e^{a+j(2\pi ft+\theta)}],\ -\infty<t<\infty,\ \alpha,\ \theta,\ f \in R\}$$

其中 R 表示实数集合。

周期信号集合 记为

$$S_R(T_r)=\{x;\ x(t+T_r)=x(t),\ -\infty<t<\infty\}$$

其中 T_r 表示信号周期。

能量有限信号集合 记为

$$S_E(K)=\left\{x;\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt \leqslant K\right\}$$

其中 K 为正实数，表示信号能量。

持续期有限信号集合 记为

$$S_D(T)=\{x;\ x(t)=0,\ |t|>T\}$$

其中 T 表示给定的信号持续期。

带宽有限信号集合 记为

$$S_B(W)=\left\{x;\ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt=X(f)=0,\ |f|>W\right\}$$

其中 W 表示给定的信号带宽。

信号集合运算 在讨论信号集合时，常用到两种集合运算：

（1）并集运算，记为

$$S_1 \cup S_2=\{x;\ x\in S_1 \text{ 或 } x\in S_2\}$$

（2）交集运算，记为

$$S_1 \cap S_2=\{x;\ x\in S_1 \text{ 与 } x\in S_2\}$$

通过上述运算得到的集合，分别称为“并集”和“交集”。

在通信工程中，一个信号不可能既是持续期有限信号，又是带宽有限信号，即

$$S_D(T)\cap S_B(W)=\{0\}=\{x;\ x(t)=0 \text{ 对所有 } t\}$$

注意，应将集合 $\{0\}$ 与空集 ϕ 区分开来。

集合的映射 对于集合 S_1 中的每一个元，如果可以按某种规则使它与集合 S_2 中的唯一的一个元相对应，就称这种对应为从 S_1 到 S_2 的映射，记为 $f: S_1 \to S_2$，即

$$y=f(x);\quad x\in S_1,\quad y\in S_2$$

与 S_1 中的元 x 相对应的 S_2 中的元 y，叫做 x 的象，而 x 则称为 y 的源。逆映射记为

$$f^{-1}: S_2 \to S_1$$

映射这个概念与数学分析中函数的概念一致，因此，$f(x)$ 又常叫做 x 的函数。通常 x 有唯一的象 $f(x)$，但象 $f(x)$ 不一定只有一个源 x，而可能有一个以上的源。如果任意象只有一个源，那么，这种映射称为一对一映射或可逆一致映射。

信号分析中广泛应用的傅氏变换就是映射的一个例子。记为

$$\mathscr{F}: S_1 \longrightarrow S_2 \Longrightarrow X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

其逆映射记为

$$\mathscr{F}^{-1}: S_2 \longrightarrow S_1 \Longrightarrow x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

其中 S_1 为能量有限信号集合

$$S_1=\left\{x;\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt<\infty\right\}$$

S_2 表示另一平方可积函数集合

$$S_2=\left\{X;\ \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df<\infty\right\}$$

距离空间 我们在信号集合中引入几何空间的“距离”概念，得到一个抽象的代数空间称为距离空间。设有包含多个元素的集合$\mathscr{X}$，如它每一对元素 x，$y\in\mathscr{X}$，可使一个非负实数 $d(x,\ y)$ 与之对应，并满足下列距离公理：

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ d(x,\ y)\geqslant 0，当 x=y 时取等号\\(2)\ d(x,\ y)=d(y,\ x)\\(3)\ d(x,\ z)\leqslant d(x,\ y)+d(y,\ z)\end{array}\right\}\tag{1.7}$$

则集合$\mathscr{X}$是所定义距离 d 的距离空间，记为（$\mathscr{X}$，d）。显然，对同一元素集合，采取不同的距离定义，将构成不同的距离空间。

〔**例 1**〕 2^n 个 n 位 0，1 数元组成的二元码字集合$\mathscr{X}$，从中任取两个元素 $x=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$，$y=\{\beta_1, \beta_2\cdots\beta_n\}$；$\alpha_i$，$\beta_i\in(0,1)$，定义

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i\oplus\beta_i]$$

为二元码字的海明距离，则（$\mathscr{X}$, d）构成码字空间（距离空间）。

〔**例 2**〕 持续期有限 $T=[t;\ a\leqslant t\leqslant b]$ 的实（或复）时间函数集合 $\mathscr{X}=[x;\ x(t)=0,\ |t|>T]$，定义距离为

$$\left.\begin{array}{l}(a)\ d_1(x,y)=\int_T |x(t)-y(t)| dt\\(b)\ d_2(x,y)=\left[\int_T |x(t)-y(t)|^2 dt\right]^{1/2}\end{array}\right\}\tag{1.8}$$

可分别构成 $L^1(T)$ 和 $L^2(T)$ 距离空间。

收敛和连续映射 在距离空间中给出元素间距离的概念后，我们可利用这一概念导出极限、收敛、连续映射等概念。

设有序列 $\{x_n;\ x_n\in\mathscr{X},\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ 若存在 $x\in\mathscr{X}$，对于任意正数 ε，有正整数 n_0，使

$$n\geqslant n_0\Longrightarrow d(x_n,\ x)<\varepsilon$$

则称序列 $\{x_n\}$ 为收敛序列，x 为序列的极限。通常写成

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x$$

值得注意的是采用不同的距离定义，将得出不同极限的定义。

假如距离空间$\mathscr{X}$中的序列$\{x_n\}$具有如下性质：给定任意$\varepsilon>0$，存在正整数n_0，使得$m, n\geqslant n_0 \Longrightarrow d(x_m, x_n)\leqslant\varepsilon$，则称之为柯西序列。从三角形不等式$d(x_n, x_m)\leqslant d(x_n, x)+d(x, x_m)$可知，一个收敛序列必定是柯西序列，但一个柯西序列可以不收敛，因为序列所趋近的极限元素可以不在空间$\mathscr{X}$之中。如果距离空间$\mathscr{X}$的每一个柯西序列都收敛于同一空间内的某一极限，则称$\mathscr{X}$为完备的距离空间。

建立距离空间的一个重要结果是函数连续的概念可以推广于由一个距离空间至另一个距离空间的连续映射。

令泛函f表示从空间$(\mathscr{X}, d_1)$到$(\mathscr{Y}, d_2)$的映射，今后写成$f:(\mathscr{X}, d_1)\longrightarrow(\mathscr{Y}, d_2)$，如果在$x_0$点，对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得

$$d_1(x, x_0)<\delta\Longrightarrow d_2(y, y_0)<\varepsilon\,;\ x\in\mathscr{X},\ y\in\mathscr{Y}$$

则称f在x_0点连续，其中$y=f(x)$，$y_0=f(x_0)$。如果f在其空间内的每一点都连续，则称f为连续映射。

〔**例 3**〕 我们讨论由实时间函数空间$L^2(T)$到实数空间R的映射。这里对空间$L^2(T)$定义距离

$$d_2(x, y)=\left[\int_T|x(t)-y(t)|^2dt\right]^{1/2}$$

对空间R定义距离

$$d(x, y)=|x-y|$$

泛函（映射）定义为

$$f_\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\varphi(t)dt$$

对于任意x_0有

$$d\{f_\varphi(x),\ f_\varphi(x_0)\}=|f_\varphi(x)-f_\varphi(x_0)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)-x_0(t)]\varphi(t)dt\right|$$

应用许华兹不等式可得

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)-x_0(t)]\varphi(t)dt\right|\leqslant\left[\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)-x_0(t)]^2dt\right]^{1/2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(t)dt\right]^{1/2}$$

如果$\varphi(t)$是平方可积函数，即

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(t)dt\right]^{1/2}\leqslant K$$

K为正实数，于是，如果

$$d_2(x,\ x_0)<\delta=\frac{\varepsilon}{K}$$

则有

$$|f_\varphi(x)-f_\varphi(x_0)|<Kd_2(x,\ x_0)<\varepsilon$$

即f为连续泛函。

分析距离空间除了前述的完备性外，还需讨论它的可分性(Separability)和列紧性(Compactness)。对于任意$\varepsilon>0$，我们可以在空间$\mathscr{X}$中找到可列个元素$\{x_1,\ x_2,\ \cdots\}$(无穷多个元素如果可以照次序一个个地排列，则称为可列的)，使得对于某些i和任意

的 $x\in\mathscr{X}$，有 $d(x, x_i)<\varepsilon$，则称距离空间（$\mathscr{X}, d$）是可分的。如果可以在距离空间$\mathscr{X}$中找到有限序列$\{x, x_2, \cdots, x_{n(\varepsilon)}\}$，使得对于某些 i，$1\leqslant i\leqslant n(\varepsilon)$ 和任意 $x\in\mathscr{X}$，有 $d(x, x_i)<\varepsilon$，则称距离空间（$\mathscr{X}, d$）为列紧的。我们设想列紧的距离空间可用有限个半径为 ε 的圆球来覆盖它，那么可分的空间总是大于列紧的空间，至少可用可列个圆球来覆盖它。

线性空间 在信号集合中引入简单的代数结构，称之为线性空间，亦称矢量空间。如果x，$\boldsymbol{y}$，z 表示线性空间的任意元素（矢量或函数），α，β 表示任意实数或复数，则有加法与数乘法运算：$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 与 $\alpha\boldsymbol{x}$，这些运算满足平常向量运算所遵守的规律：

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x} \quad \text{(加法交换律)；}\\ (2) & \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} \quad \text{(加法结合律)；}\\ (3) & \text{集合包含唯一的零矢量 }\mathbf{0}\text{，使对于每一个 }\boldsymbol{x}\text{ 满足 }\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}\text{；}\\ (4) & \text{对于每一个 }\boldsymbol{x}\text{，存在矢量 }(-\boldsymbol{x})\text{ 使 }\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}\\ (5) & \alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x} \quad \text{(数乘法结合律)}\\ (6) & \left.\begin{array}{l}\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}\\ (\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}\end{array}\right\}\text{(乘法分配律)}\\ (7) & \\ (8) & 1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\end{array}\right\} \tag{1.9}$$

其中 $\mathbf{0}$ 为加法单位矢量，1 为乘法单位元素。如 α，β 为任意实数，则称实线性空间，如 α，β 为复数，则称复线性空间。线性空间的元素可以是矢量、函数或有序数组（ntuple），统称广义矢量。

〔**例4a**〕 n 位有序数组（实数或复数）组成线性空间。设有 n 位有序数组

$$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

其中 x_i，y_i 均为实数（或复数），定义矢量加法运算

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1, \cdots, x_i+y_i, \cdots, x_n+y_n)$$

数乘法运算

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$$

零矢量 $\mathbf{0}=(0, 0, \cdots, 0)$，逆元素 $-\boldsymbol{x}=(-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$ 不难证明，规则（1）～（8）均得到满足。如果 x_i 和 α 均为实数，则称实矢量空间，记为 R^n，如果 x_i 和 α 均为复数，则称复矢量空间，记为 C^n，统称 n 维欧氏空间。

〔**例4b**〕 持续期有限 $T=[t;\ a\leqslant t\leqslant b]$ 的实（或复）时间函数集合组成线性空间，这里广义矢量加法和数乘法运算定义如下：

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\Longrightarrow z(t)=x(t)+y(t)\\ \boldsymbol{z}=\alpha\boldsymbol{x}\Longrightarrow z(t)=\alpha x(t)\end{array}\right\}\forall t\in T$$

这种线性空间亦称函数空间。

赋范线性空间 赋于线性空间V中的矢量 $\boldsymbol{x}$ 以“长度”的概念，称之为矢量的范数，记为$\|\boldsymbol{x}\|$，称V为赋范线性空间或赋范矢量空间。范数是非负实数，并且满足下列性质：