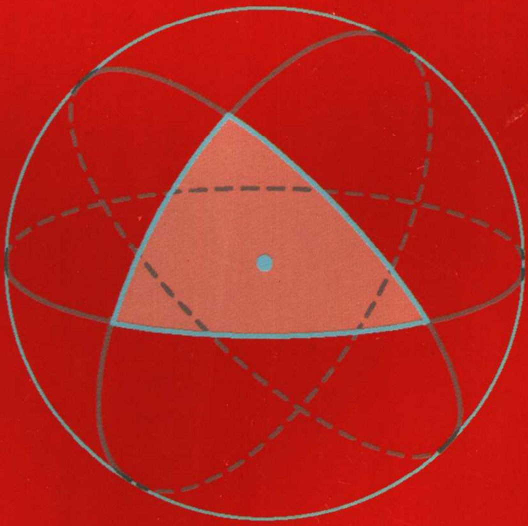
经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

数学

普通高中课程标准实验教科书

选修 3-3

球面上的几何



凤凰出版传媒集团
江蘇教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE
凤凰国标教材

经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

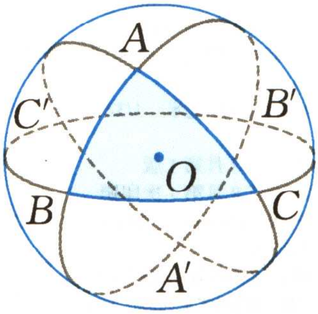
数学

球面上的几何

qiumianshang de jihe

选修 3-3

主　编：单　墫
副主编：李善良　陈永高　王巧林



凤凰核心教辅
凤凰出版传媒集团
江蘇教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

普通高中课程标准实验教科书·数学

书　　名	球面上的几何(选修 3-3)
责任编辑	蔡　立
出版发行	凤凰出版传媒集团
	江苏教育出版社(南京市马家街 31 号 210009)
网　　址	http://www.1088.com.cn
集团网址	凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销	江苏省新华发行集团有限公司
照　　排	南京理工出版信息技术有限公司
印　　刷	江苏淮阴新华印刷厂
厂　　址	淮安市淮海北路 44 号(邮编 223001)
电　　话	0517 - 3941427
开　　本	1000 × 1400 毫米　1/32
印　　张	1.75
版　　次	2006 年 8 月第 1 版
	2006 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN　7 - 5343 - 7544 - 4/G · 7229
定　　价	2.30 元
批发电话	025 - 83260760,83260768
邮购电话	025 - 85400774,8008289797
短信咨询	10602585420909
E - mail	jsep@vip.163.com
盗版举报	025 - 83204538

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换
提供盗版线索者给予重奖
批准文号:苏价费[2006]160 号　举报电话:12358

主　　编　单　墫

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

编写人员　周建伟

参与设计　徐稼红　樊亚东

责任编辑　蔡　立

球与球面是很常见的图形. 地球、月亮、太阳等都近似于球体，清晨荷叶上的小水滴在表面张力作用下，它的形状也近似于球. 研究球面上的几何叫做球面几何.

人们研究球面几何的历史悠久，早期的球面几何是古代人类研究天文的产物.

古代天文学家用天球(一个球面)上的点表示星星，天体在宇宙空间的运行情况可以用它们在天球上的轨迹表示. 历史上有许多这方面研究的记录. 例如，古希腊数学家欧几里得(大约公元前 330 年～公元前 275 年)的《现象》一书中就有球面几何的 18 个命题，其中许多定理是用来探究恒星运动的. 波兰天文学家、太阳系日心说的创立者哥白尼(1473 年～1543 年)在《天体运行论》一书中专门写有球面几何一章(第一卷第十四章).

现代人的生活更离不开球面几何，航海、航空、卫星定位等都需要能进行精确计算的球面几何. 由于球面有很好的对称性以及它与欧氏空间的几何(欧氏几何)的密切联系，使得球面几何的许多性质可以用初等的方法进行研究.

说　明

江苏教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》是根据 2003 年教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需要.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设恰当的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法三条主线,通过问题将全书贯通.每个模块围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开.教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最佳发展.

众多的数学家、心理学家、学科教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写工作.参与本册讨论与审稿的专家与教师有:仇炳生、张乃达、葛军、石志群、陈光立等,在此向他们深表感谢!

本书编写组

2006 年 7 月

目　录

3.1 球面的简单性质

3.1.1 球面的基本概念

我们知道，平面上到一个定点的距离等于定长的点的集合叫做圆，定点叫做圆心，定长叫做圆的半径. 类似地，我们把空间到一个定点的距离等于定长的点的集合叫做**球面**(sphere)，定点叫做**球心**(centre of a sphere)，定长叫做球的**半径**(radius). 一个球面把空间的点分成三个部分：球面内部的点、球面上的点和球面外的点.

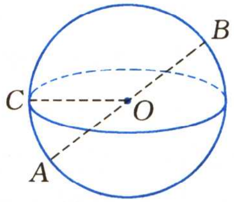


图 3-1-1

我们把球心为 O 的球面记为球面 O. 如图 3-1-1，过球心的直线与球面交于两点 A，B，我们称 A，B 是球面的一对**对径点**，线段 AB 是球的**直径**，线段 OA，OB，OC 都是球的半径.

在平面内，直线与圆有相离、相切和相交三种位置关系；在空间，直线与球面也有相离、相切和相交三种位置关系. 圆的有些性质可以直接推广到球面上，例如平面几何中的圆幂定理可以推广为如下的球幂定理.

如图 3-1-2(1)，设 PA 是球面的切线，A 是切点，B，C 是球面的割线 PB 与球面的两个交点. 过 PA，PB 的平面与球面交于一个圆，从圆幂定理可以得到

$$PA^2 = PB \cdot PC.$$

进一步，如果 PD 是球面的另一条割线，D，E 是两个交点，从上式可以得到

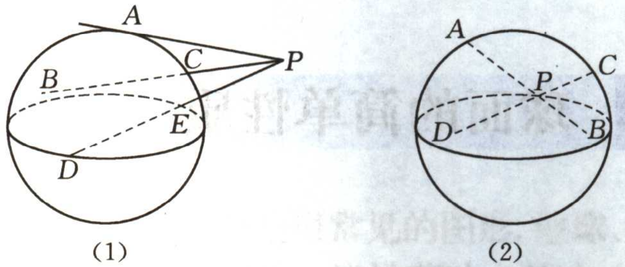


图 3-1-2

$$PB \cdot PC = PD \cdot PE.$$

如图 3-1-2(2)，设 AB，CD 是球面的两条弦，它们交于点 P，那么

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

这些性质都叫做球幂定理.

在空间，如何刻画平面与球面的位置关系呢?

设 α 是一个平面，球面 O 的半径为 R，从球心 O 向平面 α 作垂线，垂足是 P，线段 OP 的长 d 就是球心 O 到平面 α 的距离. 平面 α 与球面的关系由 d 决定，可以分如下几种情况：

(1) $d=0$ 时，如图 3-1-3(1)，平面 α 过球心 O，这时平面 α 与球面交于一个半径与球半径一样大的圆. 这样的圆叫做球面上的**大圆**(great circle).

(2) $0<d<R$ 时，如图 3-1-3(2)，平面 α 与球面相交于一个圆，它的半径是 $\sqrt{R^2-d^2}$，圆心就是点 P，这样的圆叫球面上的**小圆**(small circle).

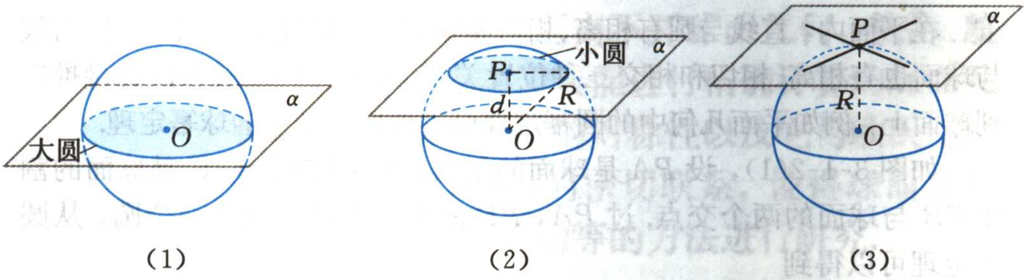


图 3-1-3

(3) $d=R$ 时，如图 3-1-3(3)，平面 α 与球面 O 有且只有一个交点，此时平面与球面相切，惟一的交点 P 是**切点**. 进一步，我们把过 P 的平

面 α 上的直线都叫做球面在点 P 处的**切线**(tangent line)，α 是 P 处的**切平面**(tangent plane).

(4) $d>R$ 时，平面 α 与球面 O 没有公共点，它们不相交，自然也不相切.

3.1.2 球面的对称性

圆是对称图形，经过圆心的任一直线都是圆的对称轴. 与圆一样，球面的美感及其许多运用也源于它的对称性，那么球面具有哪些对称性呢?

设 AB 是球面 O 的任意一条直径，当球面 O 绕 AB 旋转时，球面保持不变. 如果 Γ 是以 AB 为直径的球面上的一个大圆，则 Γ 绕 AB 旋转一周也生成球面，因此球面是一个旋转曲面.

另一方面，取定一条直径 AB，对于球面上的任一点 P(P 不取 A，B)，可以找到球面上的另一点 P'，使线段 PP' 与 AB 垂直相交，且交点就是 PP' 的中点. 这样的两点 P，P' 是球面上关于直线 AB 的对称点，如图3-1-4. 因此球面关于它的任一直径对称.

如图 3-1-5，过球心的平面与球面交于一个大圆，球面关于过球心的平面是对称的.

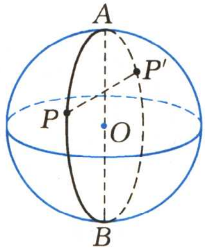


图 3-1-4

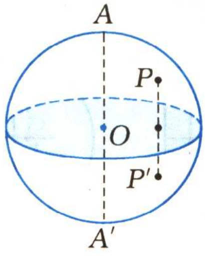


图 3-1-5

自然，球心 O 也是球面的对称中心，球面上一对对径点就是关于球心 O 的一对对称点.

以上介绍的球面上关于直径的旋转，关于球心、直径、过球心的平面的对称也叫做球面上的运动. 不难知道，球面上的图形与它们在这些运动下的像的形状是一样的.

3.1.3 球面坐标

为了航海的目的，在球面上采用一个共同的坐标系是特别重要的.经纬度就是这样的坐标系.

例如，如何根据呼救信息“这是‘华远’号轮船，我们正在下沉，我们的位置是东经 60°，北纬 18°”确定该船的位置？

我们先做一个地球的框架模型.

从硬纸片上剪三个半径为 5 cm 的圆片，并按图 3-1-6 剪上几条缝，短缝长 2.7 cm，长缝长 5 cm.

图 3-1-6

把图 3-1-6 中的(1)和(2)的长缝对准对插起来，再把四个半圆对折后插入圆片(3)的十字缝中，再把折起来的四个半圆弄直，就得到地球的框架模型(如图 3-1-7).

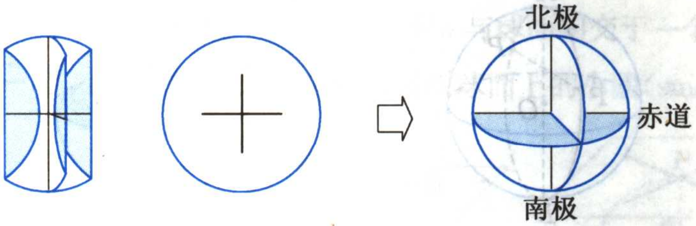


图 3-1-7

北极和南极是地球自转轴与球面的两个交点.赤道就是位于和极轴垂直的平面上的那个大圆.通过两极的任何大圆的一半(以两极为端点)都被称为**子午线**(meridian).经过伦敦格林威治天文台的子午线称为格林威治子午线(或本初子午线、国际日期变更线).

下面我们来确定“华远”号轮船的位置 P.在你的模型上，把以格林威治子午线作为边界线的半圆片(图 3-1-8 中阴影部分)涂上色.

把地轴固定为旋转轴，将这个半圆片向东旋转. 在图 3-1-8 中，圆片转了 60°，这样圆片所在的平面与格林威治子午线所在的平面之间的夹角称为这个圆片所在的平面的**经度**(longitude). 格林威治子午线所在的平面的经度是 0°，于是点 P 位于东经 60°的经线上(图 3-1-8).

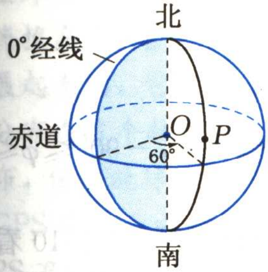


图 3-1-8

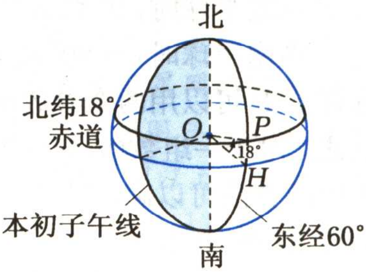


图 3-1-9

为了最终确定点 P 的位置，还需要第二个坐标. 如图 3-1-9，设 H 是东经 60°经线与赤道的交点. 将半径 OH 绕点 O 向北旋转，H 在东经 60°的经线上移动. 当 H 转了 18°后，H 就到达点 P. 经过点 P 且与赤道平面平行的小圆称为北纬 18°的纬线. 这个小圆上的点的**纬度**(latitude)都是北纬 18°.

这样，我们确定了“华远”号轮船的位置 P，并且可以把点 P 表示为(东经 60°，北纬 18°)，或(60°，18°).

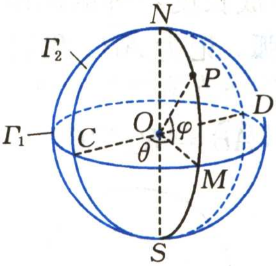


图 3-1-10

一般地，如图 3-1-10，设 Γ_1 是赤道，S，N 分别是南、北极，Γ_2 是过 S，N 的大圆，Γ_2 与 Γ_1 垂直，交于点 C，D. Γ_2 右边半球叫东半球，左边半球叫西半球，N 所在的上半球叫北半球，另一半球是南半球. Γ_2 上前半部分连结 S，N 的半圆是本初子午线.

设 P 是球面上点，P 不是南、北极 S，N，过南、北极与 P 作大圆交赤道

Γ_1 于 M，两点 P，M 在此大圆由 S，N 所分的同一半圆内. 直线段 OC 与 OM 的夹角是 θ，OM 与 OP 的夹角是 φ. θ，φ 分别是点 P 的经度、纬度. 规定：

点 P 在东半球时，$0° \leqslant \theta \leqslant 180°$；

在西半球时，$-180° \leqslant \theta \leqslant 0°$.

点 P 在北半球时，$0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$；

在南半球时，$-90° \leqslant \varphi \leqslant 0°$.

这样点 P 可以用两个参数 (θ, φ) 表示.

反之，对于一组数 (θ, φ)，其中 $-180° \leqslant \theta \leqslant 180°$，$-90° \leqslant \varphi \leqslant 90°$，利用上面的方法可以确定球面上一点.

地球上的经纬度实际上是一种球面坐标. 如果把图 3-1-10 看成一般球面，Γ_1，Γ_2 是两个所在平面互相垂直的大圆，用上面的方法可以确定球面上点 P 的球面坐标 (θ, φ).

思 考

地球表面上哪两点是位于所有经线上的？怎样用坐标表示这两点的位置？

如图 3-1-11，设 A，B 是球面上两点，A，B 不是对径点. 过 A，B 有惟一的一个大圆，它是过不共线的三点 O，A，B 的平面与球面的交线. 点 A，B 把这一大圆分成长度不等的两段，我们把短的那一段叫做连结 A，B 的球面上的**劣弧**，记为 $\overset{\frown}{AB}$. 我们也用 $\overset{\frown}{AB}$ 表示这一劣弧的长，计算弧长的公式是

$$\overset{\frown}{AB} = R\angle AOB,$$

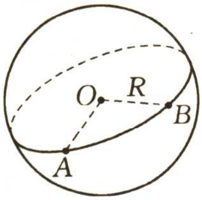


图 3-1-11

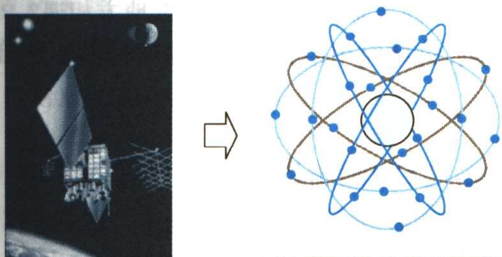
其中 R 是球半径，$\angle AOB$ 用弧度表示，并且 $0 < \angle AOB < \pi$.

阅读

全球卫星定位系统

全球卫星定位系统，简称GPS，它可以直接测定地面上一点的经纬度和海拔高度. 这种卫星定位系统是20世纪70年代末由美国国防部主持发展起来的，它由24颗离地面约两万千米的卫星网络组成. 这24颗卫星分布在6个轨道上，每个轨道上4颗卫星(如图3-1-12). 这样的卫星分布，使得地球上任一地点均可同时接收到4颗以上卫星的信号.

GPS定位是由地面专用GPS接收机(如图3-1-13)同时接收4～8颗GPS卫星发射的电磁波信号，利用电磁波信号可精确地算出每颗卫星与地面接收机的距离. 这些卫星在空间的位置是已知的，利用地面接收机与这些卫星的距离即可确定地面接收机在空间的位置. 由地面接收



24颗卫星构成的网络

图 3-1-12

GPS接收机

图 3-1-13

机在空间的位置可以进一步算出它所在点的经纬度和海拔高度. 地面接收机的位置也是以这些卫星为球心，以它们到接收机的距离为半径的几个球面的交点.

习题 3.1

1. 设 AB 是一直线段，空间点 P 使$\angle APB$ 是直角，动点 P 的轨迹(加上 A，B)是什么？
2. 设 A，B 是半径为 R 的球面上两点，$\angle AOB=\theta$，在下列条件下，分别求 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长：

   (1) $\theta=\frac{\pi}{6}$；　　(2) $\theta=\frac{\pi}{2}$；　　(3) $\theta=\frac{5\pi}{6}$.
3. 过球面外一定点作球面的切线所形成的轨迹是什么？
4. 站在点(东经 60°，南纬 30°)上，假设你从该点往地下掘土，一直掘到地心，并且继续掘下去，那么最终你将在哪一个点上冒出来？
5. 如果从北京(东经 116.4°，北纬 39.9°)出发，向西飞行了 40°，再向南飞行了 60°，你将到达什么地点？
6. 假设两个人同时从 P 点(西经 20°，北纬 60°)出发，乘气垫船分别沿不同的大圆航线旅行. 如果他们以相同的速度行驶，那么他们将在什么地方相遇？
7. 找出球面、球体在实际生活中的应用. 这些应用用到球面的哪些性质？

3.2 球面上的直线

我们知道，空间或平面内的两点决定一条线段，这条线段是连结这两点的最短曲线. 那么对于球面上的两点，连结这两点的什么样的球面曲线最短？

操 作

准备一条足够长的细绳、一支铅笔、一块橡皮、一个皮球、一把剪刀.

(1) 制作一段长度等于大圆周长的细绳；

(2) 给定皮球上两点，利用长度等于大圆周长的那段细绳画出过这两点的大圆劣弧，再过这两点画一条别的曲线，分别用细绳丈量，比较它们的长短；

(3) 与其他同学交流.

例如，从中国北京到美国纽约，选择什么路线才能使路程最短(如图 3-2-1)？当然，我们不能走直线段，因为北京与纽约分别在地球的东、西半球，要走直线段就要在地球内部打一个洞，这是不可能的.

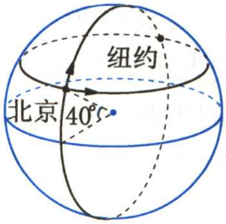


图 3-2-1

北京与纽约都在地球上北纬 40°附近，纽约在北京的东边，那么从北京乘飞机到纽约应该向东飞行，可是实际上并不完全如此. 据报道，2002 年 9 月 27 日 14 点，国航 CA981 航班从首都国际机场起飞，经过北极地域，于当地时间 9 月 27 日 15 点 30 分到达纽约肯尼迪机场. 这是中国人第一次经北极地域经营北京—纽约的直飞航线. 为什么这么飞？

上述飞行航线问题可以转化为下面的数学问题.

如图 3-2-2，设 A，B 是半径为 R 的球面上的两点，$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，小圆 D 是以 AB 为直径的圆，且所在平面垂直于 OD. 试比较连结 A，B 两点的劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与小圆 D 上连结 A，B 两点的圆弧的长短.

解　A，O，B 构成一个等边三角形，连结 A，B 两点的劣弧 $\overset{\frown}{AB}=\frac{\pi}{3}R$. 线段 AB 长是 R，因此小圆 D 的半圆周长是 $\frac{\pi}{2}R$. 由于 $\frac{\pi}{3}R<\frac{\pi}{2}R$，所以连结 A，B 的劣弧比连结 A，B 两点的这一段小圆弧短.

这告诉我们，从 A 点出发向东飞行到点 B，与经过北极沿着大圆弧飞行到点 B 的路线相比，后一种飞法要好. 地球半径 $R=6\,400$ 千米，这时行程缩短了

$$\frac{\pi}{2}R-\frac{\pi}{3}R=\frac{\pi}{6}R\approx 3\,350(\text{千米}).$$

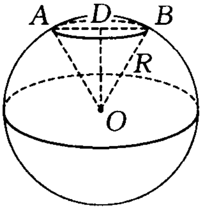


图 3-2-2

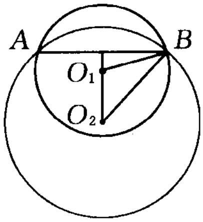


图 3-2-3

这一事实也可以用图 3-2-3 来说明：过线段 AB 的圆很多，把这些圆都放在同一平面内. 半径较大的圆上由 A，B 决定的同一侧的弧较短，而且半径越大，连结 A，B 的劣弧与弦 AB 越接近. 因为地球近似于球体，在地面两点之间的最短航线应该是大圆的一段劣弧，沿它飞行的航线叫做直航线.

对于球面上的一对对径点，连结它们的大圆弧很多，它们的长度都是 πR.

以后我们讨论角度，特别是有关角度的计算时通常采用弧度制.

如图 3-2-4，设 A，B，C 是球面上不在同一个大圆上的三点，它们两两不是对径点，我们把这三点及连结它们的大圆的三条劣弧 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$ 构成的图形叫做球面三角形(spherical triangle)，记作$\triangle ABC$. 三点与三条劣弧分别是$\triangle ABC$ 的三顶点与三边. 三边 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$ 的弧长