中国中学生

ZHONGGUO
ZHONGXUESHENG

SHUXUE JIETI
FANGFA DAQUAN

数学解题方法大全

（高中）

陈振宣
杨象富 主编

上海远东出版社

中国中学生数学解题方法大全（高中）

陈振宣　杨象富　主编

上海远东出版社

中国中学生数学解题方法大全（高中）

陈振宣　杨象富　主编

上海远东出版社出版发行

（上海冠生园路 393 号　邮政编码 200233）

新华书店经销　上海海峰印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 18.5　千字：541

1997 年 4 月第 1 版　　1997 年 10 月第 2 次印刷

印数 21001—32000

ISBN 7—80613—428-X/G·454　定价：18.00 元

前　言

世纪之交，人类已进入信息时代。知识密集型产业异军突起，计算机工业日新月异。高新技术本质上是数学技术，数学已渗透到自然科学、社会科学及国民经济、日常生活的一切领域。于是出现了关于数学的一些新提法：

“在21世纪，没有相当的数学知识，就是没有文化，就是文盲。”

“数学是人的文化素质的一个重要组成部分。”

数学教育是训练人才，开发脑潜能的重要手段之一，已成为人们的共识。

但在数学教育上历来存在着两种策略思想：一是“以多取胜”，另一是“以少御多”。目前在数学教育上仍占统治地位的是搞大运动量的“题海战术”，并误认为是考试取胜的不二法门，其根源正是“以多取胜”的策略思想。实践已使越来越多的人认识到，这一策略无助于思维水平的提高，反而把思维禁锢在机械摹仿的思维定势之中。要真正提高思维能力非改弦易辙走“以少御多”之路不可。如何才能达到“以少御多”？那就应该在理解数学知识与熟练数学语言的基础上，使知识与语言转化为技能，从思维方法的高度作概括，深刻领会数学思维方法，特别是数学模型方法，关系映射反演方法，参数法，递推与迭代，逐步优化，逻辑划分，等价与非等价转化等等，同时通过一定量的实际应用题，探究题，趣题妙题，培养数学应用意识，探究意识，审美意识，克服困难的毅力，对数学的浓厚兴趣，这是提高数学思维能力的必

由之路。

这本《中国中学生数学解题方法大全(高中)》就是在上述指导思想下写成的。第一编基础知识、基本方法引导读者在理解知识、熟练语言的基础上,适当渗透数学思维方法,在熟练数学技能的前提下,为深刻领会数学思维方法增添感性认识,打好基础。第二编常用的数学思维方法则对数学思维方法作系统介绍,以利巩固、发展、提高。面对问题,思路开阔,灵活多变,出奇制胜,妙思迭出,逐步进入解决问题的自由王国,达到“以少御多”,既减轻负担,又真正提高数学素养。

《中国中学生数学解题方法大全(高中)》一书中,第一编的作者是杨象富(第一、二章)、陈永箴(第三章)、柴盛楣(第四、十一章)、章良强(第五章)、郑瑞岳(第六章)、贝跃敏(第七、十章)、潘亚奎(第八、十二章)、胡明华(第九章)、项宁(第十三章)、施全汝(第十四章),第二编的作者是陈振宣。

我们虽然都作过长期探索,经历了四十多年以至半个世纪的教育实践,摸索到的这条“以少御多”之路,还有待于广大师生的实践检验。考虑不周、认识不全之处,热诚欢迎广大读者与专家指正。

陈振宣　杨象富

1996年10月15日

目　　录

第一编　基础知识、基本方法

代　　数

立体几何

解析几何

第二编　常用的数学思维方法

第一编　基本知识、基本方法

代　　数

第一章　逻辑概念与衔接教材

一、命题、充要条件

知识与方法提要

1. 命题

(1) 命题及其结构：可以判断真假的语句，叫做命题. 每个命题都由题设和结论两部分组成，通常写成“若 A，则 B”的形式.

(2) 复合命题：用“或”(或者)、“且”(并且)、“非”(不是)这三个逻辑联结词中的一个，把简单命题联合起来，就构成复合命题. 如用字母 A、B 表示命题，常见的三种复合命题就是：

“或命题”——“A 或 B”(记作“$A\vee B$”)；

“且命题”——“A 且 B”(记作“$A\wedge B$”)；

“非命题”——“非 A”(记作“$\overline{A}$”).

(3) 复合命题的否定：$\overline{A\vee B}\Leftrightarrow\overline{A}\wedge\overline{B}$，

$\overline{A\wedge B}\Leftrightarrow\overline{A}\vee\overline{B}$，$\overline{(\overline{A})}=A$.

2. 命题的四种形式

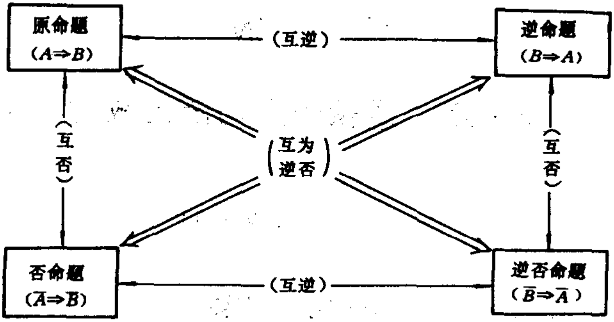
原命题：若 A，则 B(即 $A\Rightarrow B$)；

逆命题:若 B,则 A(即 $B\Rightarrow A$);

否命题:若非 A,则非 B(即 $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$);

逆否命题:若非 B,则非 A(即 $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$).

它们相互间的关系,如下面的"方形图"所示:



互逆或互否的两个命题,可以都真,可以都假,也可以一真一假;而互为逆否的两个命题,真则同真,假则同假.

两个互为逆否的命题同真同假,叫做互为逆否的命题的等效性,它给命题的证明开辟了一条广阔的道路.

3. 充分条件,必要条件,充要条件

如果有真命题"$A\Rightarrow B$"(即"$\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$"),就说

"A 是 B 的充分条件"(A 为条件,B 为结论);或说"B 是 A 的必要条件"(B 为条件,A 为结论).

如果"$A\Rightarrow B$ 并且 $B\Rightarrow A$"成立,就说"A 是 B 的充要条件"(同时,"B 是 A 的充要条件").

范　例

例 1　判定下列命题的真假,并说明理由:

(1) 若 $m^2a=m^2b$,则 $a=b$;

(2) $a^2+b^2\geqslant 0$;

(3) 凡偶数都是合数；

(4) 对$\triangle ABC$，若 $\sin A=\dfrac{1}{2}$，则 $A=30^\circ$.

［解］ (1) 是假命题. 当 $m=0$ 时，由 $m^2a=m^2b$ 未必有 $a=b$；

(2) 是真命题. 当 a、b 是实数时，$a^2\geqslant 0$，$b^2\geqslant 0$，因此必有 $a^2+b^2\geqslant 0$；

(3) 是假命题. 如 2 是偶数，但不是合数；

(4) 是假命题. 由 $\sin A=\dfrac{1}{2}$，内角 A 可为 30°或 150°.

例 2 把下列式子写成复合命题的形式：

(1) $m=\pm n$； (2) $m\neq\pm n$；

(3) $MN \overset{\parallel}{=} PQ$； (4) $x\geqslant y$；

(5) $0<x<10$； (6) $\begin{cases} a=10, \\ b=-1. \end{cases}$

［解］ (1) $m=n$ 或 $m=-n$；

(2) $m\neq n$ 且 $m\neq -n$；

(3) $MN\parallel PQ$ 且 $MN=PQ$；

(4) $x>y$ 或 $x=y$(亦即 $x\not< y$)；

(5) $x>0$ 且 $x<10$；

(6) $a=10$ 且 $b=-1$.

例 3 写出下列各命题的否命题：

(1) $a=\pm b$； (2) $a\neq\pm b$；

(3) a,b,c 三数都相等.

［解］ (1) "$a=\pm b$"即"$a=b$ 或 $a=-b$"，这是"$A\vee B$"型的复合命题，它的否定是"$\overline{A}\wedge\overline{B}$"，即"$a\neq b$ 且 $a\neq -b$".

所以，"$a=\pm b$"的否定是"$a\neq b$ 且 $a\neq -b$".

(2) "$a\neq\pm b$"即"$a\neq b$ 且 $a\neq -b$"，这是"$A\wedge B$"型的复合命题，它的否定是"$\overline{A}\vee\overline{B}$"，即"$a=b$ 或 $a=-b$".

所以，"$a\neq\pm b$"的否定是"$a=b$ 或 $a=-b$".

(3) "$a=b=c$"即"$a=b$ 且 $b=c$"，其否定是"$a\neq b$ 或 $b\neq c$"，即"a,b,c 不都相等"，亦即"a,b,c 中至少有两个不相等".

例 4 (1) 如果原命题是"$\overline{A}\Rightarrow D$"，写出相应的逆命题、否命题和逆否命题；

(2) 如果否命题是“$\overline{A}\Rightarrow D$”,写出相应的原命题、逆命题和逆否命题.

[**解**] (1) 逆命题是“$D\Rightarrow\overline{A}$”,否命题是“$A\Rightarrow\overline{D}$”,逆否命题是“$\overline{D}\Rightarrow A$”.

(2) 原命题是“$A\Rightarrow\overline{D}$”,逆命题是“$\overline{D}\Rightarrow A$”,逆否命题是“$D\Rightarrow\overline{A}$”.

例 5 在下列横线上填写“互逆”、“互否”或“互为逆否”:

(1) “$q\Rightarrow\overline{p}$”与“$\overline{q}\Rightarrow p$”是__________关系;

(2) “$\overline{p}\Rightarrow q$”与“$q\Rightarrow\overline{p}$”是__________关系;

(3) “$\overline{q}\Rightarrow p$”与“$\overline{p}\Rightarrow q$”是__________关系.

[**解**] (1)互否,(2)互逆,(3)互为逆否.

例 6 证明:对角互补的四边形,必定内接于一个圆.

[**分析**] 不易直接证明原题,可改证与它等效的逆否命题.

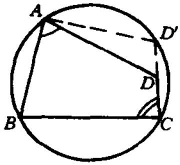


图 1-1

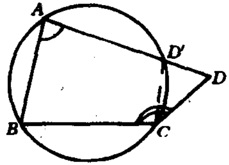


图 1-2

[**证明**] 与原题等效的逆否命题是:

“若四边形 $ABCD$ 不内接于圆,则它的对角不互补.”

如图 1-1,图 1-2 所示,由于四边形 $ABCD$ 不内接于圆,那么过不共线的三点 A、B、C 所作的圆不能通过 D 点. 这时,D 点或在圆内或在圆外,没有其他可能.

(1) 若 D 点在圆内(如图 1-1),延长 CD 至圆上的 D' 点,连 AD',则有

$$\angle D'AB+\angle C=180°.$$

而$\angle D'AB>\angle DAB$,所以$\angle DAB+\angle C<180°$,因而又有$\angle ADC+\angle B>180°$. 可知四边形 $ABCD$ 的对角不互补.

(2) 若 D 点在圆外(如图 1-2),同样可以证明对角不互补.(证明请读者补上)

例 7 在下列横线上填写“充要条件”、“充分而非必要条件”、“必要而非充分条件”或“既非充分又非必要条件”:

(1) $a=1$ 是 $a^2=1$ 的__________;

(2) $|a|=|b|$ 是 $a=b$ 的__________;

(3) $a<b$ 是 $|a-b|>a-b$ 的__________;

(4) $a>b$ 是 $ac>bc$ 的__________.

[解] (1) 充分而非必要条件,因为 $a=1\Rightarrow a^2=1$,

但 $a^2=1\nRightarrow a=1$ (如 $(-1)^2=1$,但 $-1\neq1$).

(2) 必要而非充分条件,因为 $a=b\Rightarrow|a|=|b|$,

但 $|a|=|b|\nRightarrow a=b$ (如 $|-2|=|2|$,但 $-2\neq2$).

(3) 充要条件,因为

$$a<b\Leftrightarrow a-b<0\Leftrightarrow|a-b|>a-b.$$

(4) 既非充分又非必要条件,因为

如 $2>1$,但 $2\times(-10)\ngtr1\times(-10)$;

又如 $1\times(-10)>2\times(-10)$,但 $1\ngtr2$.

例 8 已知 A 是 B 的充分条件,B 是 C 的必要条件,C 是 D 的必要条件,D 是 B 的必要条件,则(1)A 是 D 的__________条件;(2)B 是 D 的__________条件.

[解] 已知 $A\Rightarrow B$,$B\Leftarrow C$,$C\Leftarrow D$,$D\Leftarrow B$,综合起来,就是

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, Rightarrow] & B \arrow[r, Rightarrow] & D \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & C \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

由此可见:(1) $A\Rightarrow D$ 但 $D\nRightarrow A$,故 A 是 D 的充分而非必要条件;

(2) $B\Leftrightarrow D$,故 B 是 D 的充要条件.

例 9 求证:二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个异号实根的充要条件是 a 与 c 异号.

[证明] (1) 充分性:

若 a 与 c 异号,则 $ac<0$,$b^2-4ac>0$,可见方程有两个不相等的实根.又由于

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0,$$

故方程有两个异号实根.

(2) 必要性:

若 x_1 与 x_2 是方程的异号实根，即 $x_1 \cdot x_2<0$，$\frac{c}{a}<0$，亦即 a 与 c 异号.

二、一元二次不等式

知识与方法提要

1. 不等式 $|ax+b|<c(c>0)$ 与 $|ax+b|>c(c>0)$ 的解

$|ax+b|<c \Leftrightarrow -c<ax+b<c \Leftrightarrow (ax+b)^2<c^2$；

$|ax+b|>c \Leftrightarrow ax+b<-c$ 或

$ax+b>c \Leftrightarrow (ax+b)^2>c^2$；

2. 一元二次不等式的解

	$ax^2+bx+c>0$ 的解		$ax^2+bx+c<0$ 的解	
a 的符号	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
$\Delta>0$ $\left(\begin{array}{l}\text{两根}\\x_2>x_1\end{array}\right)$	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x_1<x<x_2$	$x_1<x<x_2$	$x<x_1$ 或 $x>x_2$
$\Delta=0$ $\left(\begin{array}{l}x_1=x_2\\=-\frac{b}{2a}\end{array}\right)$	除 $x=-\frac{b}{2a}$ 以外的一切实数	无解	无解	除 $x=-\frac{b}{2a}$ 以外的一切实数
$\Delta<0$	一切实数	无解	无解	一切实数

范　　例

例 1　(1)求不等式 $|x|\leqslant 2$ 的整数解的集合；

(2)求不等式 $|2-x|>3$ 的解集；

(3)求不等式 $|2-3x|\leqslant 4$ 的解集.

[解]　(1)原不等式即$-2\leqslant x\leqslant 2$,故所求整数解的集合为$\{-2,-1,0,1,2\}$.

(2) 原不等式即 $2-x<-3$ 或 $2-x>3$,

得　　　　$x>5$ 或 $x<-1$,

所以原不等式的解集是$\{x\mid x<-1$ 或 $x>5\}$.

(3) 原不等式即$-4\leqslant 2-3x\leqslant 4$,

即　　　　$-6\leqslant -3x\leqslant 2$,故　$2\geqslant x\geqslant -\frac{2}{3}$.

所以原不等式的解集是$\left\{x\,\middle|\,-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2\right\}$.

例 2　解下列不等式:

(1) $(x-3)(x-7)<5(x-3)$;

(2) $x^2-5x>3x+4$;

(3) $(x-\sqrt{2})^2<1$;

(4) $(1+\sqrt{2}x)(1-\sqrt{2}x)>4x$;

(5) $-3x^2+4x-10>0$;

(6) $|(x+2)(x-3)|\geqslant(x+2)(x-3)$.

[解]　(1)原不等式即$(x-3)(x-12)<0$,得 $3<x<12$,所求解集为$\{x\mid 3<x<12\}$.

(2) 原不等式即 $x^2-8x-4>0$,解得

$$x<4-2\sqrt{5} \text{ 或 } x>4+2\sqrt{5},$$

所求解集为$\{x\mid x<4-2\sqrt{5}$ 或 $x>4+2\sqrt{5}\}$.

(3) 原不等式即$|x-\sqrt{2}|<1$,就是$-1<x-\sqrt{2}<1$,即

$$\sqrt{2}-1<x<\sqrt{2}+1.$$

所求解集为$\{x\mid \sqrt{2}-1<x<\sqrt{2}+1\}$.

(4) 原不等式即

$$1-2x^2>4x\Leftrightarrow -2x^2-4x+1>0\Leftrightarrow 2x^2+4x-1<0.$$

解得　　　　$-1-\frac{\sqrt{6}}{2}<x<-1+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

所求解集为$\left\{x\,\middle|\,-1-\frac{\sqrt{6}}{2}<x<-1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$.