

中国中学生

ZHONGGUO  
ZHONGXUESHENG

SHUXUE JIETI  
FANGFA DAQUAN

陈振宣 主编  
杨象富

数学  
解题  
方法  
大全  
(高中)



上海远东出版社

# 中国中学生数学解题 方法大全(高中)

陈振宣 杨象富 主编

上海远东出版社

**中国中学生数学解题方法大全(高中)**

■ 陈振宣 杨象富 主编

上海远东出版社出版发行

(上海冠生园路 393 号 邮政编码 200233)

新华书店经销 上海海峰印刷厂印刷

开本  $787 \times 1092$  1/32 印张 18.5 千字: 541

1997 年 4 月第 1 版 1997 年 10 月第 2 次印刷

印数 21001—32000

ISBN 7-80613-428-X/G · 454 定价: 18.00 元

## 前 言

世纪之交,人类已进入信息时代。知识密集型产业异军突起,计算机工业日新月异。高新技术本质上是数学技术,数学已渗透到自然科学、社会科学及国民经济、日常生活的一切领域。于是出现了关于数学的一些新提法:

“在 21 世纪,没有相当的数学知识,就是没有文化,就是文盲。”

“数学是人的文化素质的一个重要组成部分。”

数学教育是训练人才,开发脑潜能的重要手段之一,已成为人们的共识。

但在数学教育上历来存在着两种策略思想:一是“以多取胜”,另一是“以少御多”。目前在数学教育上仍占统治地位的是搞大运动量的“题海战术”,并误认为是考试取胜的不二法门,其根源正是“以多取胜”的策略思想。实践已使越来越多的人认识到,这一策略无助于思维水平的提高,反而把思维禁锢在机械摹仿的思维定势之中。要真正提高思维能力非改弦易辙走“以少御多”之路不可。如何才能达到“以少御多”?那就应该在理解数学知识与熟练数学语言的基础上,使知识与语言转化为技能,从思维方法的高度作概括,深刻领会数学思维方法,特别是数学模型方法,关系映射反演方法,参数法,递推与迭代,逐步优化,逻辑划分,等价与非等价转化等等,同时通过一定量的实际应用题,探究题,趣题妙题,培养数学应用意识,探究意识,审美意识,克服困难的毅力,对数学的浓厚兴趣,这是提高数学思维能力的必

由之路。

这本《中国中学生数学解题方法大全(高中)》就是在上述指导思想下写成的。第一编基础知识、基本方法引导读者在理解知识、熟练语言的基础上,适当渗透数学思维方法,在熟练数学技能的前提下,为深刻领会数学思维方法增添感性认识,打好基础。第二编常用的数学思维方法则对数学思维方法作系统介绍,以利巩固、发展、提高。面对问题,思路开阔,灵活多变,出奇制胜,妙思迭出,逐步进入解决问题的自由王国,达到“以少御多”,既减轻负担,又真正提高数学素养。

《中国中学生数学解题方法大全(高中)》一书中,第一编的作者是杨象富(第一、二章)、陈永箴(第三章)、柴盛榴(第四、十一章)、章良强(第五章)、郑瑞岳(第六章)、贝跃敏(第七、十章)、潘亚奎(第八、十二章)、胡明华(第九章)、项宁(第十三章)、施全汝(第十四章),第二编的作者是陈振宣。

我们虽然都作过长期探索,经历了四十多年以至半个世纪的教育实践,摸索到的这条“以少御多”之路,还有待于广大师生的实践检验。考虑不周、认识不全之处,热诚欢迎广大读者与专家指正。

**陈振宣 杨象富**

1996年10月15日

# 目 录

## 第一编 基础知识、基本方法

### 代 数

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| <b>第一章 逻辑概念与衔接教材</b> .....     | 1   |
| 一、命题、充要条件 .....                | 1   |
| 二、一元二次不等式 .....                | 6   |
| 三、指数与对数 .....                  | 11  |
| 四、解斜三角形 .....                  | 17  |
| 五、复习与小结 .....                  | 25  |
| <b>第二章 幂函数、指数函数、对数函数</b> ..... | 35  |
| 一、集合 .....                     | 35  |
| 二、映射与函数 .....                  | 40  |
| 三、幂函数 .....                    | 45  |
| 四、函数的单调性和奇偶性 .....             | 49  |
| 五、反函数 .....                    | 57  |
| 六、指数函数与对数函数 .....              | 63  |
| 七、指数方程与对数方程 .....              | 68  |
| 八、复习与小结 .....                  | 76  |
| <b>第三章 三角函数</b> .....          | 88  |
| 一、任意角的三角函数 .....               | 88  |
| 二、同角三角函数的基本关系式和诱导公式 .....      | 96  |
| 三、三角函数线与正(余)弦函数的图象与性质 .....    | 106 |

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| 四、函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象 ..... | 113 |
| 五、正(余)切函数的图象与性质 .....                           | 119 |
| 六、复习与小结 .....                                   | 126 |
| <b>第四章 两角和与差的三角函数</b> .....                     | 140 |
| 一、两角和与差的三角函数 .....                              | 140 |
| 二、两倍角与半角的三角函数 .....                             | 150 |
| 三、三角函数的积化和差与和差化积 .....                          | 162 |
| 四、复习与小结 .....                                   | 173 |
| <b>第五章 反三角函数和简单三角方程</b> .....                   | 191 |
| 一、反三角函数 .....                                   | 191 |
| 二、简单三角方程 .....                                  | 199 |
| 三、复习与小结 .....                                   | 206 |
| <b>第六章 不等式</b> .....                            | 217 |
| 一、不等式及其性质 .....                                 | 217 |
| 二、不等式的证明 .....                                  | 221 |
| 三、不等式的解法 .....                                  | 233 |
| 四、复习与小结 .....                                   | 241 |
| <b>第七章 数列、极限、数学归纳法</b> .....                    | 253 |
| 一、数列 .....                                      | 253 |
| 二、数列的极限 .....                                   | 259 |
| 三、数学归纳法 .....                                   | 265 |
| 四、复习与小结 .....                                   | 272 |
| <b>第八章 复数</b> .....                             | 287 |
| 一、复数的概念 .....                                   | 287 |
| 二、复数的运算 .....                                   | 292 |
| 三、复数的三角形式 .....                                 | 300 |
| 四、复习与小结 .....                                   | 309 |

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| <b>第九章 排列、组合、二项式定理</b> ..... | 321 |
| 一、排列与组合 .....                | 321 |
| 二、二项式定理 .....                | 327 |
| 三、复习与小结 .....                | 336 |

## 立 体 几 何

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| <b>第十章 直线与平面</b> .....    | 349 |
| 一、平面 .....                | 349 |
| 二、空间两条直线 .....            | 354 |
| 三、空间直线与平面(一) .....        | 359 |
| 四、空间直线与平面(二) .....        | 364 |
| 五、空间两个平面(一) .....         | 369 |
| 六、空间两个平面(二) .....         | 373 |
| 七、复习与小结 .....             | 380 |
| <b>第十一章 多面体和旋转体</b> ..... | 391 |
| 一、多面体 .....               | 391 |
| 二、旋转体 .....               | 397 |
| 三、多面体和旋转体的体积 .....        | 401 |
| 四、复习与小结 .....             | 406 |

## 解 析 几 何

|                        |     |
|------------------------|-----|
| <b>第十二章 直线</b> .....   | 417 |
| 一、有向线段、定比分点 .....      | 417 |
| 二、直线方程 .....           | 420 |
| 三、两条直线的位置关系 .....      | 424 |
| 四、复习与小结 .....          | 428 |
| <b>第十三章 圆锥曲线</b> ..... | 437 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 一、曲线和方程、圆 .....            | 437 |
| 二、椭圆 .....                 | 444 |
| 三、双曲线 .....                | 452 |
| 四、抛物线 .....                | 460 |
| 五、平移变换 .....               | 466 |
| 六、复习与小结 .....              | 472 |
| <b>第十四章 参数方程、极坐标</b> ..... | 481 |
| 一、参数方程 .....               | 481 |
| 二、极坐标 .....                | 490 |
| 三、复习与小结 .....              | 498 |

## 第二编 常用的数学思维方法

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| <b>第一章 自然科学中常用的思维方法</b> ..... | 514 |
| 一、归纳思维 .....                  | 514 |
| 二、类比思维 .....                  | 515 |
| 三、直觉思维 .....                  | 517 |
| <b>第二章 推理与证明</b> .....        | 523 |
| 一、推理 .....                    | 523 |
| 二、推理规则 .....                  | 523 |
| 三、证明 .....                    | 528 |
| 四、综合法(顺推法) .....              | 529 |
| 五、分析法(逆推法) .....              | 530 |
| 六、反证法 .....                   | 532 |
| 七、数学归纳法 .....                 | 534 |
| <b>第三章 若干常用的数学思维方法</b> .....  | 539 |
| 一、数学模型方法 .....                | 539 |
| 二、关系映射反演方法 .....              | 543 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 三、递推与迭代 .....              | 545 |
| 四、逐步优化法 .....              | 549 |
| 五、参数法 .....                | 554 |
| <b>第四章 若干常用的策略思想</b> ..... | 561 |
| 一、逻辑划分 .....               | 561 |
| 二、等价与非等价转化 .....           | 570 |
| 三、移植与杂交 .....              | 572 |

# 第一编 基本知识、基本方法

## 代 数

### 第一章 逻辑概念与衔接教材

#### 一、命题、充要条件

##### 知识与方法提要

##### 1. 命题

(1) 命题及其结构: 可以判断真假的语句, 叫做命题. 每个命题都由题设和结论两部分组成, 通常写成“若  $A$ , 则  $B$ ”的形式.

(2) 复合命题: 用“或”(或者)、“且”(并且)、“非”(不是)这三个逻辑联结词中的一个, 把简单命题联合起来, 就构成复合命题. 如用字母  $A$ 、 $B$  表示命题, 常见的三种复合命题就是:

“或命题”——“ $A$  或  $B$ ”(记作“ $A \vee B$ ”);

“且命题”——“ $A$  且  $B$ ”(记作“ $A \wedge B$ ”);

“非命题”——“非  $A$ ”(记作“ $\bar{A}$ ”).

(3) 复合命题的否定:  $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$ ,

$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$ ,  $\overline{(\bar{A})} = A$ .

##### 2. 命题的四种形式

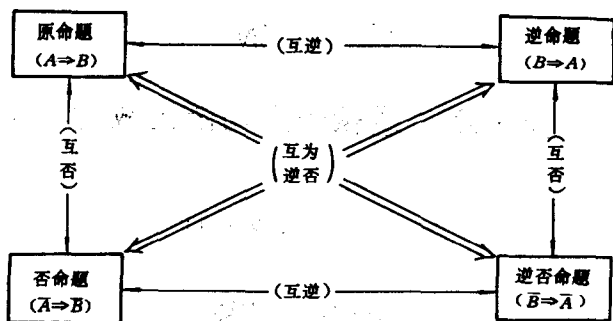
原命题: 若  $A$ , 则  $B$  (即  $A \Rightarrow B$ );

逆命题:若  $B$ , 则  $A$  (即  $B \Rightarrow A$ );

否命题:若非  $A$ , 则非  $B$  (即  $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ );

逆否命题:若非  $B$ , 则非  $A$  (即  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ ).

它们相互间的关系, 如下面的“方形图”所示:



互逆或互否的两个命题, 可以都真, 可以都假, 也可以一真一假; 而互为逆否的两个命题, 真则同真, 假则同假。

两个互为逆否的命题同真同假, 叫做互为逆否的命题的等效性, 它给命题的证明开辟了一条广阔的道路。

### 3. 充分条件, 必要条件, 充要条件

如果有真命题“ $A \Rightarrow B$ ”(即“ $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ ”), 就说

“ $A$  是  $B$  的充分条件”(  $A$  为条件,  $B$  为结论); 或说“ $B$  是  $A$  的必要条件”(  $B$  为条件,  $A$  为结论)。

如果“ $A \Rightarrow B$  并且  $B \Rightarrow A$ ”成立, 就说“ $A$  是  $B$  的充要条件”(同时, “ $B$  是  $A$  的充要条件”)。

## 范 例

例 1 判定下列命题的真假, 并说明理由:

(1) 若  $m^2a = m^2b$ , 则  $a = b$ ;

(2)  $a^2 + b^2 \geq 0$ ;

(3) 凡偶数都是合数;

(4) 对  $\triangle ABC$ , 若  $\sin A = \frac{1}{2}$ , 则  $A = 30^\circ$ .

[解] (1) 是假命题. 当  $m=0$  时, 由  $m^2a=m^2b$  未必有  $a=b$ ;

(2) 是真命题. 当  $a, b$  是实数时,  $a^2 \geq 0, b^2 \geq 0$ , 因此必有  $a^2 + b^2 \geq 0$ ;

(3) 是假命题. 如 2 是偶数, 但不是合数;

(4) 是假命题. 由  $\sin A = \frac{1}{2}$ , 内角  $A$  可为  $30^\circ$  或  $150^\circ$ .

例 2 把下列式子写成复合命题的形式:

(1)  $m = \pm n$ ;

(2)  $m \neq \pm n$ ;

(3)  $MN \underline{\underline{PQ}}$ ;

(4)  $x \geq y$ ;

(5)  $0 < x < 10$ ;

(6)  $\begin{cases} a=10, \\ b=-1. \end{cases}$

[解] (1)  $m=n$  或  $m=-n$ ;

(2)  $m \neq n$  且  $m \neq -n$ ;

(3)  $MN \parallel PQ$  且  $MN=PQ$ ;

(4)  $x > y$  或  $x=y$  (亦即  $x \leq y$ );

(5)  $x > 0$  且  $x < 10$ ;

(6)  $a=10$  且  $b=-1$ .

例 3 写出下列各命题的否命题:

(1)  $a = \pm b$ ;

(2)  $a \neq \pm b$ ;

(3)  $a, b, c$  三数都相等.

[解] (1) “ $a = \pm b$ ”即“ $a=b$  或  $a=-b$ ”, 这是“ $A \vee B$ ”型的复合命题, 它的否定是“ $\bar{A} \wedge \bar{B}$ ”, 即“ $a \neq b$  且  $a \neq -b$ ”.

所以, “ $a = \pm b$ ”的否定是“ $a \neq b$  且  $a \neq -b$ ”.

(2) “ $a \neq \pm b$ ”即“ $a \neq b$  且  $a \neq -b$ ”, 这是“ $A \wedge B$ ”型的复合命题, 它的否定是“ $\bar{A} \vee \bar{B}$ ”, 即“ $a=b$  或  $a=-b$ ”.

所以, “ $a \neq \pm b$ ”的否定是“ $a=b$  或  $a=-b$ ”.

(3) “ $a=b=c$ ”即“ $a=b$  且  $b=c$ ”, 其否定是“ $a \neq b$  或  $b \neq c$ ”, 即“ $a, b, c$  不都相等”, 亦即“ $a, b, c$  中至少有两个不相等”.

例 4 (1) 如果原命题是“ $\bar{A} \Rightarrow D$ ”, 写出相应的逆命题、否命题和逆否命题;

(2) 如果否命题是“ $\bar{A} \Rightarrow D$ ”, 写出相应的原命题、逆命题和逆否命题.

[解] (1) 逆命题是“ $D \Rightarrow \bar{A}$ ”, 否命题是“ $A \Rightarrow \bar{D}$ ”, 逆否命题是“ $\bar{D} \Rightarrow A$ ”.

(2) 原命题是“ $A \Rightarrow \bar{D}$ ”, 逆命题是“ $\bar{D} \Rightarrow A$ ”, 逆否命题是“ $D \Rightarrow \bar{A}$ ”.

例 5 在下列横线上填写“互逆”、“互否”或“互为逆否”:

(1) “ $q \Rightarrow \bar{p}$ ”与“ $\bar{q} \Rightarrow p$ ”是\_\_\_\_\_关系;

(2) “ $\bar{p} \Rightarrow q$ ”与“ $q \Rightarrow \bar{p}$ ”是\_\_\_\_\_关系;

(3) “ $\bar{q} \Rightarrow p$ ”与“ $\bar{p} \Rightarrow q$ ”是\_\_\_\_\_关系.

[解] (1) 互否, (2) 互逆, (3) 互为逆否.

例 6 证明: 对角互补的四边形, 必定内接于一个圆.

[分析] 不易直接证明原命题, 可改证与它等效的逆否命题.

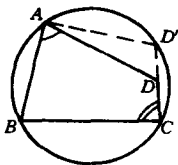


图 1-1

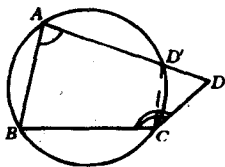


图 1-2

[证明] 与原命题等效的逆否命题是:

“若四边形  $ABCD$  不内接于圆, 则它的对角不互补.”

如图 1-1, 图 1-2 所示, 由于四边形  $ABCD$  不内接于圆, 那么过不共线的三点  $A, B, C$  所作的圆不能通过  $D$  点, 这时,  $D$  点或在圆内或在圆外, 没有其他可能.

(1) 若  $D$  点在圆内 (如图 1-1), 延长  $CD$  至圆上的  $D'$  点, 连  $AD'$ , 则有  $\angle D'AB + \angle C = 180^\circ$ .

而  $\angle D'AB > \angle DAB$ , 所以  $\angle DAB + \angle C < 180^\circ$ , 因而又有  $\angle ADC + \angle B > 180^\circ$ . 可知四边形  $ABCD$  的对角不互补.

(2) 若  $D$  点在圆外 (如图 1-2), 同样可以证明对角不互补. (证明请读者补上)

例 7 在下列横线上填写“充要条件”、“充分而非必要条件”、“必要而非充分条件”或“既非充分又非必要条件”:

- (1)  $a=1$  是  $a^2=1$  的 \_\_\_\_\_;  
 (2)  $|a|=|b|$  是  $a=b$  的 \_\_\_\_\_;  
 (3)  $a<b$  是  $|a-b|>a-b$  的 \_\_\_\_\_;  
 (4)  $a>b$  是  $ac>bc$  的 \_\_\_\_\_.

**[解]** (1) 充分而非必要条件, 因为  $a=1 \Rightarrow a^2=1$ ,  
 但  $a^2=1 \nRightarrow a=1$  (如  $(-1)^2=1$ , 但  $-1 \neq 1$ ).

(2) 必要而非充分条件, 因为  $a=b \Rightarrow |a|=|b|$ ,  
 但  $|a|=|b| \nRightarrow a=b$  (如  $|-2|=|2|$ , 但  $-2 \neq 2$ ).

(3) 充要条件, 因为

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow |a - b| > a - b.$$

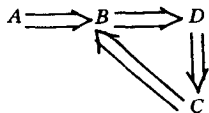
(4) 既非充分又非必要条件, 因为

如  $2 > 1$ , 但  $2 \times (-10) \not> 1 \times (-10)$ ;

又如  $1 \times (-10) > 2 \times (-10)$ , 但  $1 \not> 2$ .

**例 8** 已知  $A$  是  $B$  的充分条件,  $B$  是  $C$  的必要条件,  $C$  是  $D$  的必要条件,  $D$  是  $B$  的必要条件, 则 (1)  $A$  是  $D$  的 \_\_\_\_\_ 条件; (2)  $B$  是  $D$  的 \_\_\_\_\_ 条件.

**[解]** 已知  $A \Rightarrow B, B \Leftarrow C, C \Leftarrow D, D \Leftarrow B$ , 综合起来, 就是



由此可见: (1)  $A \Rightarrow D$  但  $D \nRightarrow A$ , 故  $A$  是  $D$  的充分而非必要条件;

(2)  $B \Leftrightarrow D$ , 故  $B$  是  $D$  的充要条件.

**例 9** 求证: 二次方程  $ax^2+bx+c=0$  有两个异号实根的充要条件是  $a$  与  $c$  异号.

**[证明]** (1) 充分性:

若  $a$  与  $c$  异号, 则  $ac < 0, b^2 - 4ac > 0$ , 可见方程有两个不相等的实根.

又由于

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0,$$

故方程有两个异号实根.

(2) 必要性:

若  $x_1$  与  $x_2$  是方程的异号实根, 即  $x_1 \cdot x_2 < 0$ ,  $\frac{c}{a} < 0$ , 亦即  $a$  与  $c$  异号.

## 二、一元二次不等式

### 知识与方法提要

1. 不等式  $|ax+b| < c (c > 0)$  与  $|ax+b| > c (c > 0)$  的解

$$|ax+b| < c \Leftrightarrow -c < ax+b < c \Leftrightarrow (ax+b)^2 < c^2;$$

$$|ax+b| > c \Leftrightarrow ax+b < -c \text{ 或}$$

$$ax+b > c \Leftrightarrow (ax+b)^2 > c^2;$$

2. 一元二次不等式的解

|                                                                              | $ax^2+bx+c > 0$ 的解                |                 | $ax^2+bx+c < 0$ 的解 |                                   |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|-----------------|--------------------|-----------------------------------|
| $a$ 的符号                                                                      | $a > 0$                           | $a < 0$         | $a > 0$            | $a < 0$                           |
| $\Delta > 0$<br>(两根)<br>$\begin{pmatrix} x_2 > x_1 \end{pmatrix}$            | $x < x_1$ 或 $x > x_2$             | $x_1 < x < x_2$ | $x_1 < x < x_2$    | $x < x_1$<br>或 $x > x_2$          |
| $\Delta = 0$<br>$\begin{pmatrix} x_1 = x_2 \\ = -\frac{b}{2a} \end{pmatrix}$ | 除 $x = -\frac{b}{2a}$ 以外<br>的一切实数 | 无解              | 无解                 | 除 $x = -\frac{b}{2a}$ 以外<br>的一切实数 |
| $\Delta < 0$                                                                 | 一切实数                              | 无解              | 无解                 | 一切实数                              |

### 范 例

例 1 (1) 求不等式  $|x| \leq 2$  的整数解的集合;

(2) 求不等式  $|2-x| > 3$  的解集;

(3) 求不等式  $|2-3x| \leq 4$  的解集.

[解] (1) 原不等式即  $-2 \leq x \leq 2$ , 故所求整数解的集合为  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .

(2) 原不等式即  $2-x < -3$  或  $2-x > 3$ ,

得  $x > 5$  或  $x < -1$ ,

所以原不等式的解集是  $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$ .

(3) 原不等式即  $-4 \leq 2-3x \leq 4$ ,

即  $-6 \leq -3x \leq 2$ , 故  $2 \geq x \geq -\frac{2}{3}$ .

所以原不等式的解集是  $\left\{x \mid -\frac{2}{3} \leq x \leq 2\right\}$ .

**例 2** 解下列不等式:

(1)  $(x-3)(x-7) < 5(x-3)$ ;

(2)  $x^2 - 5x > 3x + 4$ ;

(3)  $(x - \sqrt{2})^2 < 1$ ;

(4)  $(1 + \sqrt{2}x)(1 - \sqrt{2}x) > 4x$ ;

(5)  $-3x^2 + 4x - 10 > 0$ ;

(6)  $|(x+2)(x-3)| \geq (x+2)(x-3)$ .

[解] (1) 原不等式即  $(x-3)(x-12) < 0$ , 得  $3 < x < 12$ , 所求解集为  $\{x | 3 < x < 12\}$ .

(2) 原不等式即  $x^2 - 8x - 4 > 0$ , 解得

$$x < 4 - 2\sqrt{5} \text{ 或 } x > 4 + 2\sqrt{5},$$

所求解集为  $\{x | x < 4 - 2\sqrt{5} \text{ 或 } x > 4 + 2\sqrt{5}\}$ .

(3) 原不等式即  $|x - \sqrt{2}| < 1$ ; 就是  $-1 < x - \sqrt{2} < 1$ , 即

$$\sqrt{2} - 1 < x < \sqrt{2} + 1.$$

所求解集为  $\{x | \sqrt{2} - 1 < x < \sqrt{2} + 1\}$ .

(4) 原不等式即

$$1 - 2x^2 > 4x \Leftrightarrow -2x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 1 < 0.$$

解得  $-1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < x < -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

所求解集为  $\left\{x \mid -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < x < -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$ .