

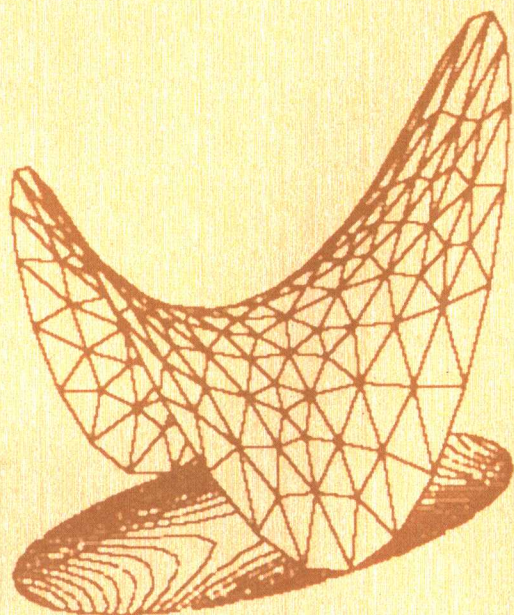
■ 王文波 编著

数学建模

及其基础知识详解



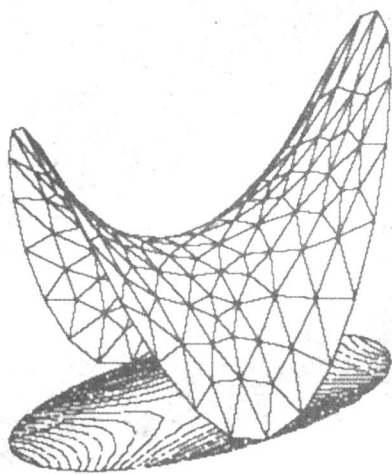
武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS



■ 王文波 编著

数学建模

及其基础知识详解



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学建模及其基础知识详解/王文波编著. —武汉: 武汉大学出版社,
2006. 5

ISBN 7-307-04833-7

I. 数… II. 王… III. 数学模型 IV. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 135822 号

责任编辑:李汉保

责任校对:黄添生

版式设计:支笛

出版发行: 武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: wdp4@whu.edu.cn 网址: www.wdp.com.cn)

印刷: 武汉大学出版社印刷总厂

开本: 720×1000 1/16 印张: 25.75 字数: 472 千字

版次: 2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-04833-7/O · 332 定价: 40.00 元

版权所有, 不得翻印; 凡购我社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请与当地图书销售部门联系调换。

内 容 简 介

本书详细、系统地介绍了数学建模中所用到的微积分、线性代数、常微分方程、概率论与数理统计、最优化和图论等知识,并重点讲解了这些知识在 Matlab 中的编程实现方法,书中给出了大量经典建模实例和模型在 Matlab 中的实现方法。

本书共分四个部分,第一部分是数学建模中所用到的数学知识的系统介绍以及它们在 Matlab 中的实现方法;第二部分是数学模型的实例的分析,精选了大量的经典例题和真题,详细地给出了每个例题的建模过程以及在 Matlab 中的实现方法;第三部分介绍数学软件 Matlab 的用法,包括 Matlab 的基础知识和 Matlab 中的高级图形编程知识;第四部分附录收集了历年全国大学生数学建模竞赛试题。

书中以微积分、线性代数、常微分方程、概率论与数理统计、图论为知识背景,以模型实例为载体,以数学软件 Matlab 为工具,将数学知识、数学建模与数学软件应用三者有机地结合起来。

前 言

全国大学生数模竞赛现在不论是参加的省区、学校的数目,还是参赛的队数、人数,都是目前全国规模最大的课外科技活动。很多不同专业的同学都对数学建模很感兴趣,积极踊跃地报名参加数模竞赛。

参加数模竞赛的同学需要具备下面两方面的能力:第一是数学知识的应用能力;第二是计算机应用能力。可是,很大一部分同学在学习建模的过程中都感到非常困惑和吃力:首先就是要学的数学基础知识这么多,该怎么学?学哪些?学到什么程度为止?其次,众多同学在对模型编程求解时感到很困难,想要学习这方面的知识却又感到无从下手,数学软件包括的内容那么多,哪些是建模中常用的,需要重点学习?哪些只需要了解就可以了?

编写本书的目的就是为了帮助参加数模竞赛的同学解决这两方面的问题。

第一,诚然,数学建模中所涉及的数学知识太多,根据历年比赛的试题可以看出,数模竞赛涉及的数学知识面十分宽广,包括数学分析、线性代数、概率论与数理统计、最优化理论、图论、微分方程求解及稳定性分析等几乎全部的数学基础知识。其中任何一门课如果想要透彻地学习,都需要花一年以上的时间。但对参加数模竞赛的同学来说,不可能有这么多的时间来系统地学习每门知识。在和众多的参赛同学和竞赛辅导老师进行探讨,并对历年竞赛的题目进行研究后,本书对参加数模竞赛需要掌握的知识点进行了归纳总结,对每个知识点给出了相应的理论、概念和计算实例,使读者对每科的知识结构有一个清晰的认识,便于学习和在竞赛中使用,帮助读者分清主次,而不是茫然、毫无头绪地去学习。

第二,在建模过程中,对所建立的模型求解时,用手工计算几乎是不可能的,基本上都要借助计算机来编程实现。当前,最流行的数学软件就是 Matlab 和 Mathmatical。Matlab 是 1984 年由美国 Math Works 公司推出的数学软件,其具有优秀的数值计算能力和数据可视化能力。该软件不但可以解决数学中的数值计算问题,还可以解决符号演算问题,并且能够方便地绘出各种函数图形。Matlab 提供的各种函数可以避免在解决问题中做繁琐的数学推导和计算。

只是 Matlab 本身的内容过于丰富复杂。而求解数学模型时,所需的知识又涉及 Matlab 的很多领域,对于一个利用业余时间参加数模竞赛的同学来说,对

Matlab 的每个领域都从头开始进行详细的学习,那也是不可能的。本书中针对建模中所常用的 Matlab 知识进行了系统的归纳、分类和总结,使得读者能在很短的时间内就可以掌握数学分析、线性代数、最优化、概率论、图论和微分方程等知识在 Matlab 中的求解方法,从而能够在 Matlab 中编程求解模型。

本书具有以下特点:

1. 详尽、清晰的基础知识归纳、分析和讲解。对建模中所有用到的每一科数学基础知识都进行了详尽、清晰的归纳和总结,给出了它们的概念、理论和算法推导。但本书并不能代替专业的数学书籍,在需要对问题进行更深入的探讨时,书中简略给出了探讨的方向及方法。

2. 数学知识与数学软件 Matlab 紧密的结合。对每一个数学知识点都详细地介绍了其在 Matlab 中的求解方法,并给出了大量的例子。书中也对 Matlab 中的符号计算、概率工具箱、优化工具箱、图像处理等进行了详尽的归纳总结,使读者易学易用。

3. 大量真题和经典习题的详细解答。书中选用的例题一部分是非常经典的数学建模例题,还有一部分是历年全国大学生数模竞赛中的真题。对每一个例题都详尽地给出了建模的过程、模型在 Matlab 中求解的分析过程和源代码以及计算结果,使读者更容易掌握模型在数学软件中的求解方法。

本书共分为四部分,第一部分是数学基础知识部分,详细地介绍了数学分析等知识点的理论和算法以及在 Matlab 中的实现方法;第二部分是数学建模和求解实例,精选了大量的真题及经典例题,给出了例题的建模方法以及在 Matlab 中的求解方法;第三部分是数学软件 Matlab 的基础知识和关于图形的高级编程知识;第四部分是附录,介绍了近些年来全国大学生数模竞赛的试题。

由于作者水平有限,书中难免有不足之处,尤其是在一些内容安排上,恐有偏颇之处,恳切希望读者批评指正。

作 者

2005 年 7 月于武汉珞珈山

目 录

第一部分 基础知识

第一章 微积分、线性代数的基础知识及其在 Matlab 中的实现	1
§ 1.1 数学建模中常用的微积分知识在 Matlab 中的实现	1
1.1.1 导数、极值和积分、Taylor 公式及在 Matlab 中的实现	2
1.1.2 数值微分与数值积分在 Matlab 中的实现	6
1.1.3 线性方程和 nonlinear 方程在 Matlab 中的各种求解方法	10
1.1.4 Matlab 中求和及求极值方法	12
1.1.5 函数插值与曲线的拟合	14
习 题 1	19
§ 1.2 数学建模中常用的线性代数基础知识在 Matlab 中的实现	21
1.2.1 Matlab 中向量和矩阵的基本运算	21
1.2.2 矩阵的变换与分解及其在 Matlab 中的实现	24
1.2.3 Matlab 中矩阵特征值和特征向量的求解方法	26
1.2.4 范数、条件数和方程解的精度	29
1.2.5 线性方程组的直接求解法在 Matlab 中的实现	30
1.2.6 线性方程组的迭代求解法在 Matlab 中的实现方法	35
习 题 2	37
*	
第二章 微分方程在 Matlab 中的求解方法	39
§ 2.1 微分方程的数值求解方法	39
2.1.1 欧 拉 方 法	39
2.1.2 龙格—库塔方法	40
§ 2.2 数学建模中常用微分方程基础知识在 Matlab 中的实现	41
2.2.1 Matlab 中常微分方程的符号求解法	41
2.2.2 Matlab 中常微分方程的数值求解法	42

习 题 3	45
第三章 概率论基础知识及其在 Matlab 中的实现	47
§ 3.1 随机时间及其概率	47
3.1.1 古典概率及其模型	47
3.1.2 统计概率及其模型	49
3.1.3 条件概率、全概率公式与伯努利概率	51
§ 3.2 随机变量的分布及其数字特征	55
3.2.1 离散型随机变量的分布及其数字特征	55
3.2.2 连续型随机变量的分布及其数字特征	59
3.2.3 χ^2 分布、 t 分布和 F 分布	63
§ 3.3 参数估计与假设检验	68
3.3.1 样本的数字特征	68
3.3.2 参数估计	73
3.3.3 假设检验	77
§ 3.4 方差分析与回归分析	80
3.4.1 方差分析	80
3.4.2 回归分析	86
习 题 4	88
第四章 最优化方法及其在 Matlab 中的实现	91
§ 4.1 线性规划	91
4.1.1 线性规划	91
4.1.2 线性规划在 Matlab 中的求解方法	92
§ 4.2 非线性规划	95
4.2.1 无约束非线性规划及其在 Matlab 中的求解方法	95
4.2.2 带约束的非线性规划及其在 Matlab 中的求解方法	102
§ 4.3 Matlab 的优化工具箱	107
习 题 5	108

第二部分 建模实例

第五章 初等数学模型在 Matlab 中的求解方法	110
§ 5.1 卸煤台问题的优化	110

5.1.1 问题分析及模型的建立	110
5.1.2 建模所需的知识点在 Matlab 中的实现方法	112
5.1.3 模型在 Matlab 中的实现	112
§ 5.2 工厂选址	117
5.2.1 问题分析及模型的建立	117
5.2.2 建模所需的知识点在 Matlab 中的实现方法	118
5.2.3 模型在 Matlab 中的实现	118
§ 5.3 商品市场占有率问题	119
5.3.1 问题分析及模型的建立	119
5.3.2 建模所需的知识点在 Matlab 中的实现方法	120
5.3.3 模型在 Matlab 中的实现	120
习 题 6	121
第六章 微积分方法模型在 Matlab 中的求解方法	123
§ 6.1 水箱的水流问题	123
6.1.1 问题分析及模型的建立	124
6.1.2 求解模型所需的知识点在 Matlab 中的实现方法	126
6.1.3 模型求解在 Matlab 中的实现	127
§ 6.2 卫星轨道的长度和射击命中概率	133
6.2.1 问题分析及模型的建立	134
6.2.2 建模所需的知识点在 Matlab 中的实现方法	135
6.2.3 模型求解在 Matlab 中的实现	136
6.3 森林救火模型	137
6.3.1 问题分析及模型的建立	137
6.3.2 建模所需的知识点在 Matlab 中的实现方法	139
6.3.3 模型求解在 Matlab 中的实现	140
习 题 7	140
第七章 微分方程模型在 Matlab 中的实现方法	145
§ 7.1 动物种群的相互竞争与相互依存的模型	145
7.1.1 问题分析及模型的建立	146
7.1.2 求解模型所需的知识点在 Matlab 中的实现方法	148
7.1.3 模型求解在 Matlab 中的实现	148
§ 7.2 核废料的妥善处理问题	150

7.2.1 问题分析及模型的建立	151
7.2.2 求解模型所需的知识点及其在 Matlab 中的实现方法	152
7.2.3 模型在 Matlab 中的实现	152
§ 7.3 状态转移方程组模型	154
7.3.1 问题分析及模型的建立	155
7.3.2 求解模型所需的知识点及其在 Matlab 中的实现方法	155
7.3.3 模型求解在 Matlab 中的实现	155
§ 7.4 真题解析:彩票中的数学	158
7.4.1 模型假设与符号说明	161
7.4.2 模型的准备	162
7.4.3 模型的建立与求解	165
习 题 8	168

第八章 概率统计模型在 Matlab 中的求解方法	171
§ 8.1 保险储备策略问题	171
8.1.1 问题分析及模型的建立	171
8.1.2 求解模型所需的知识点及其在 Matlab 中的实现方法	174
8.1.3 模型求解在 Matlab 中的实现	174
§ 8.2 回归分析——火柴消费与各因素之间的关系分析	175
8.2.1 问题分析及模型的建立	176
8.2.2 建模所需的知识点及其在 Matlab 中的实现方法	176
8.2.3 模型求解在 Matlab 中的实现	177
§ 8.3 回归分析——商品销量与价格的关系	178
8.3.1 问题分析及模型的建立	178
8.3.2 求解模型所需的知识及其点在 Matlab 中的实现方法	180
8.3.3 模型求解在 Matlab 中的实现	180
§ 8.4 单因素方差分析——广告宣传对产品销量的影响分析	181
8.4.1 问题分析及模型的建立	181
8.4.2 求解模型所需的知识点及其在 Matlab 中的实现方法	183
8.4.3 模型求解在 Matlab 中的实现	183
§ 8.5 双因素方差分析——影响火箭射程的因素分析	185
8.5.1 问题分析及模型的建立	185
8.5.2 建模所需的知识点及其在 Matlab 中的实现方法	187
8.5.3 模型求解在 Matlab 中的实现	187

§ 8.6 真题解析:车灯线光源的优化设计	188
8.6.1 问题的提出:车灯线光源的优化设计	188
8.6.2 模型的建立	188
8.6.3 模型的求解	191
8.6.4 反射光亮区的计算	191
8.6.5 注记	192
习 题 9	193
 第九章 代数模型在 Matlab 中的求解方法	 196
§ 9.1 植物基因的分佈	196
9.1.1 问题分析及模型的建立	196
9.1.2 求解模型所需的知识点及其在 Matlab 中的实现方法	198
9.1.3 模型求解在 Matlab 中的实现	198
§ 9.2 城市交通流量问题	199
9.2.1 问题分析及模型的建立	199
9.2.2 求解模型所需的知识点及其在 Matlab 中的实现	200
9.2.3 模型求解在 Matlab 中的实现	200
§ 9.3 常染色体的隐性疾病	203
9.3.1 问题分析及模型的建立	204
9.3.2 求解模型所需的知识点及其在 Matlab 中的实现	204
9.3.3 模型求解在 Matlab 中的实现	204
§ 9.4 真题解析:治理环境的投入和收益问题	206
9.4.1 生产部门费用构成	210
9.4.2 消除污染部门费用	210
习 题 10	212
 第十章 图论方法模型在 Matlab 中的求解	 215
§ 10.1 图、最短路径和最小生成树	215
10.1.1 图的基本概念及其矩阵表示法	215
10.1.2 最小生成树算法及其在 Matlab 中的实现	218
10.1.3 最小生成树算法及其在 Matlab 中的应用	219
10.1.4 最短路算法及其在 Matlab 中的实现	223
§ 10.2 截断切割问题	228
10.2.1 问题分析及模型的建立	229

10.2.2	模型求解所需的知识点及其在 Matlab 中的实现方法	230
10.2.3	模型求解在 Matlab 中的实现	230
习 题 11		234
第十一章	最优化方法模型在 Matlab 中的求解	236
§ 11.1	线性规划和非线性规划及其在 Matlab 中的求解方法	236
11.1.1	线性规划及在 Matlab 中的解法	236
11.1.2	非线性规划及在 Matlab 中的求解方法	244
§ 11.2	捕鱼业的持续收获(求函数极值)	249
11.2.1	问题分析及模型的建立	249
11.2.2	求解模型所需的知识点及其在 Matlab 中的实现	251
11.2.3	模型求解在 Matlab 中的实现	251
§ 11.3	化工公司产品生产计划(线性规划)	255
11.3.1	问题分析及模型的建立	256
11.3.2	求解模型所需的知识点及其在 Matlab 中的实现	257
11.3.3	模型求解在 Matlab 中的实现	257
§ 11.4	围墙所围土地的面积(非线性规划)	258
11.4.1	问题分析及模型的建立	258
11.4.2	建模所需的知识点及其在 Matlab 中的实现方法	259
11.4.3	模型求解在 Matlab 中的实现	259
§ 11.5	真题解析:截断切割问题	260
11.5.1	问题分析	261
11.5.2	建立数学模型	261
11.5.3	模型在 Matlab 中的求解	261
习 题 12		266

第三部分 Matlab 基础和高级编程

A Matlab 软件使用简介	269
A1. Matlab 的变量与表达式	269
A1.1 Matlab 的变量	269
A1.2 Matlab 的运算符	269
A1.3 Matlab 的表达式	270
A1.4 Matlab 的数据显示格式	270
A2. Matlab 的常用函数	272
A3. Matlab 的基本对象	273
A3.1 矩阵	273

A3.2 数组	275
A3.3 字符串	276
A4. M 文件与 M 函数	276
A4.1 命令文件	277
A4.2 函数文件	277
A5. 程序结构	279
A5.1 顺序结构	279
A5.2 循环结构	279
A5.3 分支结构	281
A6. 符号计算	284
A6.1 符号变量的创建	284
A6.2 符号表达式的创建	284
A6.3 符号方程的创建	284
A6.4 符号方程的设计	285
A6.5 符号矩阵的创建	285
A7. Matlab 的绘图	286
A7.1 Matlab 的二维曲线绘图	286
A7.2 Matlab 中绘制特殊图形的命令	294
A7.3 Matlab 的空间曲线绘图	295
A7.4 Matlab 的空间曲面绘图	297
 B 高级 Matlab 图形编程——句柄图形	 304
B1. 连续变焦和飞驰图形	304
B2. 实时动画	306
B3. 其他高级绘图程序的例子	313

第四部分 附 录

全国大学生数学建模竞赛试题选编	352
 习 题 答 案	 382
参 考 文 献	397

第一部分 基础知识

第一章 微积分、线性代数的基础知识 及其在 Matlab 中的实现

§ 1.1 数学建模中常用的微积分知识在 Matlab 中的实现

在数学建模问题的计算中,经常要用到极限、导数、微分和积分等基本运算.利用数学软件 Matlab 可以使复杂的微积分运算变得很容易.本节介绍微积分的基本运算在计算机上如何实现,包括:微分、积分、极限、级数求和、方程求根以及 Taylor 展开等功能的实现方法.

下面是 Matlab 中的基本符号运算函数(相关符号运算可以参考附录 A):

1. $x = \text{sym}('x')$

功能:创建一个符号变量 x .

2. $\text{syms } x \ y \ z$

功能:创建多个符号变量 x, y, z .

3. $r = \text{collect}(S, v)$

功能:合并同类项, S 是符号表达式, v 是变量或表达式, r 是合并同类项后的结果.

4. $\text{factor}(S)$

功能:符号计算的因式分解, S 是待分解的符号多项式.

5. $\text{expand}(S)$

功能:对符号多项式或函数 S 进行展开.

6. $r = \text{simple}(S)$ 或 $r = \text{simplify}(S)$

功能:对符号表达式 S 进行化简.

7. $\text{subs}(S, \text{old}, \text{new})$

功能:把符号变量中的变量 old 用 new 代替,new 可以是一个符号,也可以是具体的数.

8. vpa(S)

功能:对符号表达式 S 计算其任意精度的数值.

9. eval(S)

功能:计算符号表达式(或字符串)S.

1.1.1 导数、极值和积分、Taylor 公式及在 Matlab 中的实现

1. 极限运算

在 Matlab 中,计算极限采用如表 1.1 所示的命令.

表 1.1

命 令	功 能
$\text{limit}(f, x, a)$	计算 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
$\text{limit}(f, x, \text{inf})$	计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
$\text{limit}(f, x, a, \text{'right'})}$	计算单侧极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
$\text{limit}(f, x, a, \text{'left'})}$	计算单侧极限 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

注意 在左、右极限不相等或左、右极限有一个不存在时,Matlab 的默认状态是求右极限.

例 1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{\frac{1}{x}}$ 与极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

解 Matlab 命令为

```
syms x;
```

```
y1 = (1 + 4 * x)^(1/x); y2 = (exp(x) - 1)/x;
limit(y1, x, 0)
ans = exp(4)
limit(y2, x, 0)
ans = 1.
```

例 2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} - 2^{-\frac{1}{x}})$.

解 `syms x; y = sqrt(x) - 2^(-1/x);`

```
limit(y, x, 0, 'right')
```

```
ans = 0.
```

2. 求导运算

导数是函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 之比的极限 ($\Delta x \rightarrow 0$), 即 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. 在 Matlab 中求函数的导数及其他一些类似计算均由 diff 命令来完成.

(1) 一元函数的求导

命令形式 1: diff(f)

功能: 求函数 f 的一阶导数, 其中 f 为符号函数.

命令形式 2: diff(f, n)

功能: 求函数 f 的 n 阶导数, 其中 f 为符号函数.

例 3. 求函数 $3x^3 + 5x + 1$ 的二阶导数.

解 Matlab 的命令为

```
syms x ; f = 3 * x^3 + 5 * x + 1 ;
```

```
diff(f, 2) ;
```

```
ans = 18 * x.
```

例 4. 设 $y = 3x^2 - 2x + 1$, 求 $y' \big|_{x=1}$.

解 syms x; y = 3 * x^2 - 2 * x + 1 ;

```
B = diff(y) , x = 1 ;
```

```
eval(B)
```

运行结果为

```
B = 6 * x - 2
```

```
ans = 4.
```

(2) 多元函数的偏导数

将函数 $z = f(x, y)$ 中的变量 y 看成常量而对变量 x 的导数称为二元函数 $f(x, y)$ 对变量 x 的偏导数, 记为 $f_x(x, y)$. 若把 x 当做常量而对 y 求导的结果称为函数对 y 的偏导数, 记为 $f_y(x, y)$. 求偏导数的方法和一元函数的求导方法一样, 只要把另一个变量看成常量即可.

命令形式 1: diff(f, x_i)

功能: 多元函数 f 对变量 x_i 的一阶偏导.

命令形式 2: diff(f, x_i, n)

功能: 多元函数 f 对变量 x_i 的 n 阶偏导.

例 5. 求 $z = x^2 \sin 2y$ 关于 x 的偏导数.

解 syms x y;

```
z = x^2 * sin(2 * y) ; B = diff(z', x').
```

运行结果为 $B = 2 * x * \sin(2 * y)$.

(3) 全微分、参数方程求导及隐函数求导

1) 若函数 $z = f(x, y)$ 在某点 (x_0, y_0) 的两个偏导数存在且连续, 则函数在该点的全微分为

$$dz = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy$$

Matlab 中求函数全微分的命令为: `diff(z, x) + diff(z, y)`.

2) 对参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 所确定的函数 $y = f(x)$, 根据公式 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$, 连续两次利用 `diff(f)` 命令就可以求出结果.

3) 隐函数求导

方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$, 其导数为 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$; 方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数 $z = z(x, y)$, 其导数为 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$. 在 Matlab 中按照上述公式, 分别求出函数的偏导数再相除就可以得到隐函数的导数.

3. 积分运算

(1) 一元函数的不定积分

命令形式 1: `int(f)`

功能: 求函数 f 对默认变量的不定积分, 用于函数中只有一个变量的情况.

命令形式 2: `int(f, v)`

功能: 求符号函数 f 对变量 v 的不定积分.

例 6. 计算 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

解 Matlab 命令为

```
syms x;
```

```
y = 1/(sin(x)^2*cos(x)^2);
```

```
int(y);
```

```
ans = 1/(sin(x)*cos(x)) - 2*cos(x)/sin(x).
```

`pretty(int(y))` % 把 `int(y)` 化简为常用的数学形式的表达式. 结果为

$$\frac{1}{\sin(x) \cos(x)} - \frac{2 \cos x}{\sin x}$$

例 7. 求 $\int \frac{x}{1+z^2} dz$.

解 Matlab 的命令为

```
syms x z; B = int(x/(1+z^2), z);
```