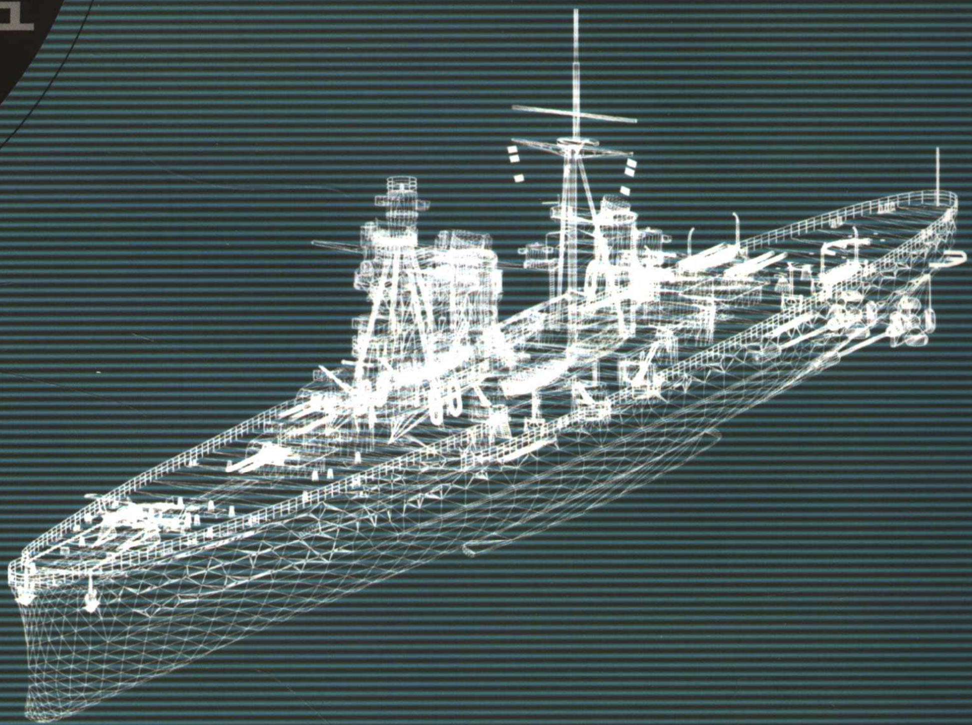
船舶与海洋工程

国防科工委『十五』规划教材

船舶与海洋结构运动的随机理论

●黄祥鹿　范菊　编著



北京航空航天大学出版社
北京理工大学出版社　西北工业大学出版社
哈尔滨工业大学出版社　哈尔滨工程大学出版社

国防科工委"十五"规划教材·船舶与海洋工程

船舶与海洋结构运动的随机理论

黄祥鹿 范 菊 编著

北京航空航天大学出版社
北京理工大学出版社 西北工业大学出版社
哈尔滨工业大学出版社 哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书介绍船舶与海洋结构在波浪上运动时随机问题的处理方法，特别着重于非线性响应的统计分析问题。其中包括二阶响应的统计分析和应用马尔科夫过程理论对非线性响应的分析等当前较新的理论进展。

本书可供船舶及海洋工程相关专业的科研人员、高等院校研究生及有关工程力学研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

船舶与海洋结构运动的随机理论/黄祥鹿等编著.
—北京：北京航空航天大学出版社，2005.5
ISBN 7-81077-518-9

Ⅰ.船… Ⅱ.黄… Ⅲ.①船舶运动—随机②海洋工程—工程结构 Ⅳ.U661.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 031435 号

船舶与海洋结构运动的随机理论

黄祥鹿 范 菊 编著
责任编辑 王 实
北京航空航天大学出版社出版发行
北京市海淀区学院路 37 号(100083)
发行部电话：010-82317024 传真：010-82328026
http://www.buaapress.com.cn
E-mail:bhpress@263.net
北京市松源印刷有限公司印装 各地书店经销
开本：787×960 1/16
印张：11.25 字数：252 千字
2005 年 5 月第 1 版 2005 年 5 月第 1 次印刷
印数：2 000 册
ISBN 7-81077-518-9 定价：15.00 元

国防科工委“十五”规划教材编委会

总 序

国防科技工业是国家战略性产业，是国防现代化的重要工业和技术基础，也是国民经济发展和科学技术现代化的重要推动力量。半个多世纪以来，在党中央、国务院的正确领导和亲切关怀下，国防科技工业广大干部职工在知识的传承、科技的攀登与时代的洗礼中，取得了举世瞩目的辉煌成就；研制、生产了大量武器装备，满足了我军由单一陆军，发展成为包括空军、海军、第二炮兵和其他技术兵种在内的合成军队的需要，特别是在尖端技术方面，成功地掌握了原子弹、氢弹、洲际导弹、人造卫星和核潜艇技术，使我军拥有了一批克敌制胜的高技术武器装备，使我国成为世界上少数几个独立掌握核技术和外层空间技术的国家之一。国防科技工业沿着独立自主、自力更生的发展道路，建立了专业门类基本齐全，科研、试验、生产手段基本配套的国防科技工业体系，奠定了进行国防现代化建设最重要的物质基础；掌握了大量新技术、新工艺，研制了许多新设备、新材料，以“两弹一星”、“神舟”号载人航天为代表的国防尖端技术，大大提高了国家的科技水平和竞争力，使中国在世界高科技领域占有了一席之地。十一届三中全会以来，伴随着改革开放的伟大实践，国防科技工业适时地实行战略转移，大量军工技术转向民用，为发展国民经济作出了重要贡献。

国防科技工业是知识密集型产业，国防科技工业发展中的一切问题归根到底都是人才问题。50多年来，国防科技工业培养和造就了一支以“两弹一星”元勋为代表的优秀的科技人才队伍，他们具有强烈的爱国主义思想和艰苦奋斗、无私奉献的精神，勇挑重担，敢于攻关，为攀登国防科技高峰进行了创造性劳动，成为推动我国科技进步的重要力量。面向新世纪的机遇与挑战，高等院校在培养国防科技人才，生产和传播国防科技新知识、新思想，攻克国防基础科研和高技术研究难题当中，具有不可替代的作用。国防科工委高度重视，

积极探索，锐意改革，大力推进国防科技教育特别是高等教育事业的发展。

高等院校国防特色专业教材及专著是国防科技人才培养当中重要的知识载体和教学工具，但受种种客观因素的影响，现有的教材与专著整体上已落后于当今国防科技的发展水平，不适应国防现代化的形势要求，对国防科技高层次人才的培养造成了相当不利的影响。为尽快改变这种状况，建立起质量上乘、品种齐全、特点突出、适应当代国防科技发展的国防特色专业教材体系，国防科工委全额资助编写、出版200种国防特色专业重点教材和专著。为保证教材及专著的质量，在广泛动员全国相关专业领域的专家、学者竞投编著工作的基础上，以陈懋章、王泽山、陈一坚院士为代表的100多位专家、学者，对经各单位精选的近550种教材和专著进行了严格的评审，评选出近200种教材和学术专著，覆盖航空宇航科学与技术、控制科学与工程、仪器科学与技术、信息与通信技术、电子科学与技术、力学、材料科学与工程、机械工程、电气工程、兵器科学与技术、船舶与海洋工程、动力机械及工程热物理、光学工程、化学工程与技术及核科学与技术等学科领域。一批长期从事国防特色学科教学和科研工作的两院院士、资深专家和一线教师成为编著者，他们分别来自清华大学、北京航空航天大学、北京理工大学、华北工学院、沈阳航空工业学院、哈尔滨工业大学、哈尔滨工程大学、上海交通大学、南京航空航天大学、南京理工大学、苏州大学、华东船舶工业学院、东华理工学院、电子科技大学、西南交通大学、西北工业大学和西安交通大学等，具有较为广泛的代表性。在全面振兴国防科技工业的伟大事业中，国防特色专业重点教材和专著的出版，将为国防科技创新人才的培养起到积极的促进作用。

党的十六大提出，进入21世纪，我国进入了全面建设小康社会、加快推进社会主义现代化的新的发展阶段。全面建设小康社会的宏伟目标，对国防科技工业发展提出了新的更高的要求。推动经济与社会发展，提升国防实力，需要造就宏大的人才队伍，而教育是奠基的柱石。全面振兴国防科技工业必须始终把发展作为第一要务，落实科教兴国和人才强国战略，推动国防科技工业

走新型工业化道路，加快国防科技工业科技创新步伐。国防科技工业为有志青年展示才华，实现志向，提供了缤纷的舞台，希望广大青年学子刻苦学习科学文化知识，树立正确的世界观、人生观、价值观，努力担当起振兴国防科技工业、振兴中华的历史重任，创造出无愧于祖国和人民的业绩。祖国的未来无限美好，国防科技工业的明天将再创辉煌。

张华祝

前　言

本书曾是作者本人在上海交通大学船舶流体力学专业研究生讲课时的讲稿，在校内使用过多次。1994年由中国船舶工业总公司教材编审室组织出版。这次纳入“国防科工委‘十五’规划教材”进行再版，作了部分修改和补充，主要是适应学科在近年来的发展，同时也吸收了教学中的一些经验，并使其对相关学科的研究生在随机问题的研究上有一定的参考价值。船舶和海洋结构在海浪上的运动问题，包括两个重要方面：一方面是它的力学或确定性问题，即应用力学原理研究计算船舶的运动问题；另一方面，则是由于海洋波浪的随机性所带来的随机问题。前者目前已有不少著作出版，但后者比较少。因此，本书试图填补这一方面的空缺。

船舶耐波性中随机理论的发展是从20世纪50年代开始的。由于它对耐波性理论实际应用的巨大促进，使得船舶耐波性这门学科的面貌发生了重大改观，即从过去纯学院式理论研究发展成与船舶工程实际设计工作紧密结合的工程学科。近50年来，这一理论方法有了长足的进步。不论是基础理论还是工程应用都有新成果出现。总结下来，大致有以下几点：

① 在基础理论方面，一个重大的进展是非线性系统的随机响应理论。非线性系统响应是船舶和海洋结构运动近代理论发展的核心，具有相当的难度。而船舶耐波性作为研究船舶在波浪上运动的学科，涉及到流体力学、刚体力学以及海洋随机波理论的各个方面，并最终会归结为非线性系统的随机响应问题。这方面的理论进展可以说与相应的理论发展是同步的。一个最明显的例子是关于系泊船舶在波浪上运动的预测问题。而近代关于船舶在极限海况中倾覆问题的研究，从另一方面展现了有关非线性系统随机响应以及强非线性问题研究的进程。

② 近50年来发展起来的舰船在随机波浪中运动的极短期预报技术与工程控制技术紧密结合，有着非常广泛的应用领域。

③ 在舰船结构的可靠性分析中，作为一个十分重要的因素，其波浪外载荷的确定问题直接牵涉到随机估算问题，此项研究也得到了相应的发展。

本书的主要目的是将近代有关船舶与海洋结构运动随机理论发展的大致轮廓介绍给读者。但由于篇幅有限，同时也限于本人水平，只能将其中一部分与舰船波浪上运动有关的部分作简单的介绍。本书中的错误和疏漏之处，望读者指正。

编　者

2004年5月

目　　录

第1章 概 述

1.1 船舶及海洋结构运动的随机性及处理方法

海洋环境条件，即风、浪、流等均具有随机性。以海浪为例，其随机性十分明显。即使是在实验室内人工产生的规则波，也很少有两个是完全相同的。因此，在自然界中，波浪的出现是无法准确预测的，海洋中的海浪就是典型的随机事件。而船舶及海洋结构在这一随机波激励下产生的各种响应，如结构的运动、作用在结构上的载荷以及结构的弹性振动等，也具有随机特点。从工程实际出发，研究并掌握这一随机现象将是十分必要的。

自从20世纪50年代，St. Danis和Jr. Pierson首先将随机过程理论方法引入船舶耐波性的研究以来，船舶在波浪上的运动理论就向实际应用大大推进了一步。随后的数值计算方法的发展和计算机的应用等，使得船舶耐波性以及海洋工程流体力学这两个与工程设计有密切关系的学科，成为20世纪后半叶最活跃的工程学科之一。所以，可以这样说，随机理论是使船舶耐波性理论和海洋工程流体动力学理论方法真正走向应用的主要推动力。

但是，船舶和浮式海洋结构的运动问题是一个十分复杂的问题。50年前发展起来的船舶耐波性随机理论方法，主要还是建立在线性假设的基础上，而且是以频率域方法为主。近几十年有关工程设计以及相应理论的深入发展，已将非线性问题提到日程上来，并且已经找出一些解决的方法和方案。但是，介绍有关这些进展的书籍资料很少。本书的目的就是从这一现状出发，力图能对这一空缺作一些填补，以开阔研究生和研究人员的眼界。

1.2 随机海浪及随机响应的研究方法

研究随机现象的方法也就是概率论的方法。作为本课程的前置课程，要求读者具有工科本科数学中的概率论的知识。但为了阅读方便，也为了使概率论中的内容与本教程更好地衔接，在这里简单地回顾一下有关理论。限于篇幅，此处不重述有关内容的细节。

在概率论中，随机变量和相应的概率分布是问题的核心。概率论的主要任务就是根据所掌握的资料来求得概率分布函数。在早期，人们为寻求概率分布提出了多种概率模型。其中最有名的就是二项分布，而由二项分布可以进一步导出有名的正态分布及泊松分布。这两个分布分别属于性质不同的两种现象。在本节中将对二项分布以及两种极限分布作一简单介绍。首先提一下有关随机变量的基本定义。

1.2.1 随机变量概念及概率分布函数

一个事件组成的集合 A 包含所有事件$\{X\leqslant x\}$的元素。当 x 取不同值时,事件$\{X\leqslant x\}$的概率 $P\{X\leqslant x\}$为与 x 有关的数值,换句话说,为 x 的函数,用 $F(x)$表示,称为随机变量 X 的(累积)概率分布函数。

$$F(x) = P\{X \leqslant x\}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{1-1}$$

分布函数具有如下特性:

① $F(\infty)=1,\ F(-\infty)=0$; (1-2)

② $F(x)$为一个 x 的非降函数;

③ 如 $F(x_0)=0$,则对所有的 $x\leqslant x_0$,有 $F(x)=0$;

④ $P\{X>x\}=1-F(x)$;

⑤ $P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$。

这些特性均可由累积概率分布函数的定义导出。

随机变量根据其变量的特征可分为连续型、间断型和混合型三种。连续型的随机变量,其分布函数为连续。显然,对每一个 x,都有

$$P\{X = x\} = 0$$

如果 $F(x)$为阶梯型函数,则称其为间断型的随机变量。设 x_i 为 $F(x)$的间断点,则

$$F(x_i) - F(x_i^-) = P(X = x_i) = p_i$$

这里 x_i^- 代表左极限值。如果 $F(x)$为间断型的,且非阶梯型的,则称为混合型的随机变量。

如果 U 具有有限个元素,则任一定义在 U 上的随机变量均为离散型的随机变量。但是,即使 U 具有无穷多个元素也不一定是连续的。对于连续型的随机变量,定义概率密度分布函数为累积概率分布函数的导数

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1-3}$$

如果随机变量为取值 x_i 及相应概率为 p_i 的离散型随机变量,则定义

$$f(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i)$$

式中,$p_i=P\{X=x_i\}$,$\delta(x)$为狄拉克 δ 函数。

由概率密度分布函数的定义,可以得到如下特性:

① 单调性即 $f(x)\geqslant 0$;

② $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x = 1$。

1.2.2　几种重要概率分布

1. 二项分布

进行 N 次互相独立的试验。每次出现的结果只有两种可能，而且其出现和不出现的概率分别为 p 和 $q=1-p$。第一种可能出现 n_1 次，第二种可能出现 $n_2=N-n_1$ 次的概率由相互独立事件的乘法定理应为 $p^{n_1}q^{n_2}$。又由互不相容事件的加法定理，则在 N 次试验中，所有 n_1 个第一种可能的不同次序的组合的总概率为

$$P_N(n_1)=\frac{N!}{n_1!n_2!}p^{n_1}q^{n_2} \tag{1-4}$$

这就是二项分布。

在二项分布中，令 $N\to\infty$，$p\to 0$，$Np=a$ 为有限值。对式(1-4)中的阶乘项应用斯特林公式

$$N!=\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N$$

$$(N-n_1)=\sqrt{2\pi(N-n_1)}\left(\frac{N-n_1}{\mathrm{e}}\right)^{N-n_1}$$

由此可以得出

$$\frac{N!}{(N-n_1)!}\approx\frac{\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N}{\sqrt{2\pi(N-n_1)}\left(\frac{N-n_1}{\mathrm{e}}\right)^{N-n_1}}\sim N^{n_1}$$

由于

$$q^{n_2}=(1-p)^{N-n_2}\approx(1-p)^N=(1-p)^{\frac{a}{p}}\approx\mathrm{e}^{-a}$$

则式(1-4)可化为

$$P_N(n_1)=a^{n_2}\mathrm{e}^{-a}/n_1! \tag{1-5}$$

这就是泊松分布。

2. 拉普拉斯极限定理

如果 p,q 是某一介于 0 和 1 之间的数(不接近 0 或 1)，则对三个阶乘 $N!$，$(N-n_1)!$，$n_1!$ 应用斯特林公式

$$P_N(n_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi N}}\exp\left[-\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n_1}{N}\right)-\left(N-n_1+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{N-n_1}{N}\right)+\right.$$
$$\left.n_1\ln p+(N-n_1)\ln(1-p)\right]$$

此一分布在 $n_1=\langle n_1\rangle=Np$ 处为极大。由于 $\langle n_1\rangle$ 大于 1，n_1 可以当作连续变量处理。将指数在 $\langle n_1\rangle$ 处作泰勒(Taylor)展开，取到二阶项得到

$$P_N(n_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_N}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(n_1-\langle n_1\rangle)^2}{\sigma_N}\right\} \tag{1-6}$$

这就是正态分布,或称为高斯分布。

以上关系即从离散的二项分布推出连续的正态分布的过程,又称为拉普拉斯极限定理。

1.2.3 随机变量的数字表征

为了表征一个随机变量,除了概率分布函数之外,常采用其统计平均值来表示。从概率分布函数来看,这一类平均值就是分布函数的矩。不同的统计平均值对应不同的矩。例如,一般的平均值即为概率分布函数对其原点的矩

$$m_i = \int_0^\infty x^i p(x)\mathrm{d}x \qquad i = 1,2,\cdots \tag{1-7}$$

除去对原点的矩之外,为表征分布相对其一阶平均值的分散程度,还有中心矩。显然,中心矩只从二阶开始

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (x - m_1)^2 p(x)\mathrm{d}x \tag{1-8}$$

式中,σ^2 称为随机变量的方差,σ 又称标准差。它与随机变量为同一物理尺度,可以形象地表征随机变量的离散程度。这一求平均的运算通常又称为求期望,其符号表示为

$$\mathrm{E}[f(x)] = \int_0^\infty f(x)p(x)\mathrm{d}x \tag{1-9}$$

期望中的函数并不要求一定是幂函数。如果令这一函数为变量 x 的复指数函数 $\exp(\mathrm{i}sx)$,则这时的期望值为一参数 s 或频率与 x 的函数,即

$$\overline{M}(\mathrm{i}s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}sx} p(x)\mathrm{d}x \tag{1-10}$$

这一函数称为特征函数。它实际上是随机变量的概率密度分布函数的傅里叶(Fourier)变换,与分布函数的矩有着密切的关系。将积分号内的指数函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}$ 展开为无穷级数

$$\overline{M}(\mathrm{i}s) = \int_0^\infty \left(1 + \mathrm{i}sx + \frac{1}{2!}(\mathrm{i}sx)^2 + \frac{1}{3!}(\mathrm{i}sx)^3 + \cdots\right)p(x)\mathrm{d}x =$$

$$1 + \mathrm{i}sm_1 + \frac{1}{2!}(\mathrm{i}s)^2 m_2 + \frac{1}{3!}(\mathrm{i}s)^3 m_3 + \cdots$$

另一方面,特征函数对变量 s 求导,并令 $s=0$,得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}^n\overline{M}(\mathrm{i}s)}{\mathrm{d}s^n}\right|_{s=0} = (\mathrm{i}s)^n \int_0^\infty x^n p(x)\mathrm{d}x = (\mathrm{i}s)^n m_n$$

式中

$$m_n = \frac{1}{(\mathrm{i}s)^n}\left.\frac{\mathrm{d}\overline{M}(\mathrm{i}s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \tag{1-11}$$

由这些关系式可见,如果确定了特征函数,可以很容易地求出任意阶的矩。反之,如果有

足够多的矩的知识，也可以形成特征函数。由于特征函数的定义实际上是概率分布函数的傅里叶变换，因此应用反变换就可以由特征函数算出概率分布函数。

1. 半不变量或累积量系数

虽然矩的概念比较直观，但在某些情况下有一定的缺点。这表现在对大多数概率分布来说，矩常常是不可截断的，也就是说，如用矩来构成特征函数，必须要用到无限阶的矩；而采用另一种累积量系数时，有些分布可以大大简化。累积量系数的定义如下，定义特征函数 $\overline{M}(\mathrm{i}s)$ 的对数为

$$K(\mathrm{i}s) = \log M(\mathrm{i}s) = \log(1+z) \tag{1-12}$$

式中：z 为 $\overline{M}(\mathrm{i}s)$ 的数值。将 $K(\mathrm{i}s)$ 中 $\log(1+z)$ 展开成无穷级数，得到

$$K(\mathrm{i}s) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{j!}(\mathrm{i}s)^j$$

另一方面，根据定义

$$\overline{M}(\mathrm{i}s) = \exp(\log \overline{M}(\mathrm{i}s)) = \exp(K(\mathrm{i}s))$$

将右边指数函数对 $K(\mathrm{i}s)$ 展开为无穷级数，得到

$$\overline{M}(\mathrm{i}s) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{j!}(\mathrm{i}s)^j + \frac{1}{2!}\left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{j!}(\mathrm{i}s)^j\right]^2 + \frac{1}{3!}\left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{j!}(\mathrm{i}s)^j\right]^3 + \cdots$$

将此式与用矩表示的特征函数相对比，相同的 $(\mathrm{i}s)^j$ 项前的系数应相等，从而得出了确定矩与累积量系数间的关系

$$\left.\begin{aligned}
k_1 &= m_1 \\
k_2 &= m_2 - m_1^2 = \sigma^2 \\
k_3 &= m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 \\
k_4 &= m_4 - 3m_2^2 - 4m_1m_3 + 12m_1^2m_2 - 6m_1^4 \\
&\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{1-13}$$

也可以得出用累积量系数表示矩的关系式

$$\left.\begin{aligned}
m_1 &= k_1 \\
m_2 &= k_2 + k_1^2 \\
m_3 &= k_3 + 3k_1k_2 + k_1^3 \\
m_4 &= k_4 + 3k_2^2 + 4k_1k_3 + 6k_1^2 + k_1^4 \\
&\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

系数 k_j 即为累积量系数，又称为半不变量。这是因为对分布作平移时，除 k_1 之外所有高阶 k_j 皆保持不变。

2. 应用累积量系数表示正态分布

考虑一个随机变量，其一阶累积量系数为零，并只存在二阶累积量系数 k_2。可以根据累

积量系数的定义写出其特征函数的形式为

$$\overline{M}(s) = \exp\left(-\frac{1}{2}k_2 s^2\right) \tag{1-15}$$

概率密度分布函数 $p(x)$ 可以由对特征函数进行傅里叶变换求得

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} M(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{k_2 s}+\mathrm{i}\frac{x}{\sqrt{k_2}}\right)^2\right]\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{i}x}{\sqrt{k_2}}\right)^2\right]\mathrm{d}s =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2k_2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{1}{2}\left[-\left(\sqrt{k_2}s+\frac{\mathrm{i}x}{\sqrt{k_2}}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{1-16}$$

这就是正态(高斯)随机变量的概率密度分布函数。可以看出,虽然正态随机变量具有无限阶的矩,但它只包含到二阶的累积量系数,也就是说,其累积量系数在二阶截断。既然分布函数的矩和累积量之间具有一定的关系,即式(1-13)和式(1-14),那么正态随机变量应反映出这一关系。在式(1-13)中,令高于二阶的累积量系数为零,可以得到正态随机变量的用低阶矩求取高阶矩的公式。实际上,所有的正态随机变量的高于二阶的矩,均可用其二阶中心矩(方差)表示。

显然,如果一个正态随机变量的平均值为零,那么根据其分布的对称性质,所有的奇次矩都应为零,可以通过对分布函数式(1-16)进行相应的积分运算求其矩。对于$(n+1)$阶的矩,如果 n 为奇数,也就是$(n+1)$为偶数时,则

$$\mathrm{E}[x^{n+1}] = \sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi}}\sigma_x^{n+1}\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \tag{1-17}$$

而当 n 为偶数时,即奇次矩时,则

$$\mathrm{E}[x^{n+1}] = 0 \tag{1-18}$$

应用式(1-13)可以容易地推导出正态随机变量高于二阶的矩的表达式。在此读者可以自行推出这些关系式。

3. 多维随机变量的概率密度分布函数

一个多元的随机变量表示该随机变量的出现值是多元的,那么其相应的概率密度分布函数也将是多元分布。设多元随机变量 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_r$ 由 r 维联合概率密度分布函数 $p_{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r}(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 表征。这一多维联合概率密度分布函数的定义与一维的分布函数类似,具有正定性,且其概率密度分布函数下的体积(或在高于三阶时类似定义)为 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = 1$$

并且

$$p_{\xi_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{1-19}$$