东方教育 EAST EDUCATION

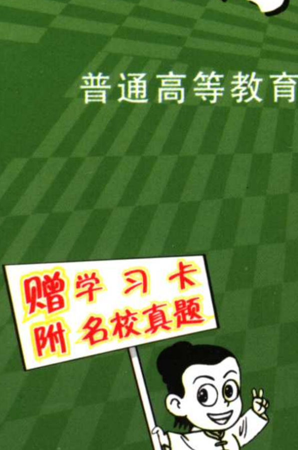
普通高等教育“十五”国家级规划教材经典同步辅导丛书

高等数学

第五版 下册

习题全解

普通高等教育国家规划教材研究中心
东方教育教材研发中心 组编
同济大学 王建福 主编



新华出版社

高等数学

第五版 下册

习题全解

普通高等教育“十五”国家级规划教材经典同步辅导丛书

高等数学

（第五版） 下册

习题全解

普通高等教育国家规划教材研究中心
东方教育教材研发中心 组编

同济大学 王建福 主编

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解/王建福编著.

北京:新华出版社,2006.2

ISBN 7-5011-7408-3

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题

Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 005296 号

东方教育教材研发中心
经典同步辅导丛书编委会

前 言 / Preface

《高等数学》是大学课程中一门重要的基础课，是理工科学生学习其他专业课程的基础，也是硕士入学考试的必考科目．同济大学的《高等数学》（第五版）以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用．为了帮助读者更好地学好这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与教材配套的《高等数学习题全解》．书中对教材中的习题做了详细的解答，对一些概念性较强的题目给出了基本理论和解题方法，并对重点、难点和疑点作了注释．

本书作为一类习题性的辅助教材，旨在使读者掌握更多的知识扩展解题思路．考虑到读者的不同情况，我们在内容上做了以下安排：

1．学习要求：根据考试大纲的要求，总结的各章重要知识点．

2．知识网络图：以图表的形式贯穿各章知识网络，提纲挈领、统领全章，使知识更加系统化．

3．学习卡片：总结各章所有重要的定理、公式简明扼要，使读者一目了然．

4．考研真题链接：精选历年考研真题进行深入分析．

5．同步自测：针对每章的针对性练习．

6．课后习题全解：本书给出了同济大学《高等数学》（第五版）各章习题的答案．我们不仅给出了详细的解题过程，而且还对解题思路和方法作了简要的说明．由于解题方法具有多样性，通常本书只给了一种方法，仅作读者参考．

编写本书时，依据大学本科现行教材及教学大纲的要求，参考了清华大学、北京大学、同济大学、浙江大学、人民大学、复旦大学等高等院校的教材，并结合教学大纲的要求进行编写.

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助.同时，由于编者的水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正.

东方教育教材研发中心

目录 / Contents

第八章

多元函数微分法及其应用

学习要求

本章讨论了多元函数的微分及其应用.

1. 理解多元函数的概念,理解二元函数的几何意义.
2. 了解二元函数的极限与连续性的概念,以及有界闭区域上连续函数的性质.
3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念,会求全微分,了解全微分存在的必要条件和充分条件,了解全微分形式的不变性,了解全微分在近似计算中的应用.
4. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.
5. 掌握多元复合函数偏导数的求法.
6. 会求隐函数(包括由方程组确定的隐函数)的偏导数.
7. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念,会求它们的方程.
8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.
9. 理解多元函数极值和条件极值的概念,掌握多元函数极值存在的必要条件,了解二元函数极值存在的充分条件,会求二元函数的极值,会用拉格朗日乘数法求条件极值,会求简单多元函数的最大和最小值,并会解决一些简单的应用问题.

知识网络图

- 多元函数微分法及其应用
  - 多元函数的极限与连续性
    - 平面点集,n 维空间,多元函数概念,定义域,函数 $z=f(x,y)$ 的图像
    - 极限
      - 极限的定义　二重极限
      - 极限的性质
    - 连续
      - 连续函数的定义,连续与极限的关系
      - 有界闭域上连续函数的若干性质
  - 偏导数与全微分
    - 概念
      - 偏导数
      - 全微分
      - 方向导数,梯度
      - 高阶偏导数
    - 微分法与性质
      - 关系:有连续偏导⇒可微分 ⇒偏导数存在 ⇒连续
      - 求导法
        - 复合函数微分法
        - 隐函数微分法
          - 一个方程的情况
          - 方程组的情况
  - 多元函数微分学的应用
    - 几何应用
      - 空间曲线的切线与法平面
      - 空间曲面的法线与切平面
    - 多元极值
      - 无条件极值,二元函数极值的充分条件和必要条件
      - 条件极值与拉格朗日乘数法

学习卡片

空间两点的距离

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

全微分不变性　$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

隐函数求导定理一　$\frac{dy}{dx}=-\frac{Fx}{Fy}$

隐函数求导定理二　对三元方程 $F(x,y,z)=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{Fx}{Fz}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Fy}{Fz}$$

隐函数求导定理三　对方程组:$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$

雅可比(Jacobi)式 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$

空间曲线的切线、法平面方程

参数式　对曲线 Γ 的方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$

切线方程 $\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

法平面方程 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

特殊式　对曲线 Γ 的方程 $\begin{cases}y=\varphi(x)\\ z=\psi(x)\end{cases}$

切线方程 $\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\dfrac{z-z_0}{\psi'(x_0)}$

法平面方程 $(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0$

一般式　对曲线 Γ 的方程 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$

切线方程 $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ \cdots\cdots & \\ G_y & G_z\end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ \cdots\cdots & \\ G_z & G_x\end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ \cdots\cdots & \\ G_x & G_y\end{vmatrix}}$

法平面方程 $\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ \cdots\cdots & \\ G_y & G_z\end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ \cdots\cdots & \\ G_z & G_x\end{vmatrix}(y-y_0)+$

$\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ \cdots\cdots & \\ G_x & G_y\end{vmatrix}(z-z_0)=0$

曲面的切平面与法线

隐式曲面方程　$F(x,y,z)=0$

切平面方程　$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

法线方程 $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}$

$=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

曲面方程　$z=f(x,y)$

切平面方程　$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

法线方程　$\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

方向导数存在定理　$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$

梯度　$\mathbf{grad} f(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k}$

条件极值的拉格朗日乘数法　$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

二元函数的泰勒公式

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k),\quad(0<\theta<1)$$

二元函数的拉格朗日中值公式

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+hf_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+kf_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

考研真题链接

Ⅰ. 选择题

1.(1997 年,数学一)二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点(0,0)处(　　).

A. 连续、偏导数存在

B. 连续、偏导数不存在

C. 不连续、偏导数存在

D. 不连续、偏导数不存在

解　由于 $\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$

k 的值不同,极限值不同,因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在,从而 $f(x,y)$ 在点(0,0)处不连续.

又当 $x\to 0$ 时,有 $x\neq 0$;当 $y\to 0$ 时,有 $y\neq 0$,则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-0}{y}=0$

即 $f_x(0,0)=0, f_y(0,0)=0$

故选择 C.

2.(2001 年,数学一)设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义,且 $f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=1$,则(　　).

A. $dz\Big|_{(0,0)}=3dx+dy$

B. 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $(3,1,1)$

C. 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$,在点 $(0,0,f(0,0)$ 的切向量为 $(1,0,3)$

D. 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$,在点 $(0,0,f(0,0)$ 的切向量为 $(3,0,1)$

解　曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$ 可以看做以 x 为参数的空间曲线 $\begin{cases}x=x\\ y=0\\ z=f(x,0)\end{cases}$

它在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $(1,0,f_x(0,0))=(1,0,3)$.

故选 C.

3.(2002 年,数学一)考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质:

①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;

②$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续;

③$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;

④$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q,则有(　　).

A. ②⇒③⇒①

B. ③⇒②⇒①

C. ③⇒④⇒①

D. ③⇒①⇒④

解　由教材的定理可知正确答案是 A.

Ⅱ. 填空题

1.(1998 年,数学一)设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$,$f,\varphi$ 具有二阶连续导数,则

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________.

解　由题设知 f,φ 是一元函数,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)y+y\varphi'(x+y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f'(xy)x+\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{y}{x}f''(xy)x+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$$

$$=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y).$$

2.(2001 年,数学一)设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则

$\operatorname{div}(\mathbf{grad}r)\Big|_{(1,-2,2)}=$__________.

解 由于 $\mathbf{grad}r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)$

则有 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}r)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)$

$$=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}+\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}+\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}$$

$$=\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}=\frac{3}{r}-\frac{1}{r}=\frac{2}{r}$$

故有 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}r)\Big|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{r}\Big|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{3}.$

Ⅲ. 解答题

1.(1998 年,数学三)设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan(\frac{y}{x})}$,求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{-\arctan\frac{y}{x}}-(x^2+y^2)\cdot\left[\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\right]\left(-\frac{y}{x^2}\right)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$

$$=(2x+y)\cdot e^{-\arctan\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{-\arctan\frac{y}{x}}-(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\left[\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\right](\frac{1}{x})=(2y-x)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$$

所以 $dz=e^{-\arctan\frac{y}{x}}[(2x+y)dx+(2y-x)dy]$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-\arctan\frac{y}{x}}-(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\left[\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\right]\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{-x^2-xy+y^2}{x^2+y^2}e^{-\arctan\frac{y}{x}}.$$

2.(1996 年,数学四)设 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$,

求 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解　$\dfrac{\partial f}{\partial x}=ye^{-x^2y^2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=xe^{-x^2y^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3e^{-x^2y^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3ye^{-x^2y^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(1-2x^2y^2)e^{-x^2y^2}$

于是$\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}$.

3. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f\left[xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$，求$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解　$\dfrac{\partial g}{\partial x}=y\dfrac{\partial f}{\partial u}+x\dfrac{\partial f}{\partial v}$，

$\dfrac{\partial g}{\partial y}=x\dfrac{\partial f}{\partial u}-y\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

故

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\dfrac{\partial f}{\partial v}$，

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

所以$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=x^2+y^2$.

4.（2002 年，数学四）设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定，求 du.

解　方法一　设 $F(x,y,z)=xe^x-ye^y-ze^z$，则

$F_x=(x+1)e^x$，$F_y=-(y+1)e^y$，$F_z=-(z+1)e^z$.

故$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{x+1}{z+1}e^{x-z}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=-\dfrac{y+1}{z+1}e^{y-z}$.

而

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_x+f_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x+f_z\dfrac{x+1}{z+1}e^{x-z}$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=f_y+f_z\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_y-f_z\dfrac{y+1}{z+1}e^{y-z}$，

所以 $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$

$$=\left(f_x+f_z\frac{x+1}{z+1}e^{x-z}\right)dx+\left(f_y-f_z\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}\right)dy.$$

方法二 在 $xe^x-ye^y=ze^z$ 两边微分，得

$e^x dx+xe^x dx-e^y dy-ye^y dy=e^z dz+ze^z dz$，

故 $dz=\dfrac{(1+x)e^x dx-(1+y)e^y dy}{(1+z)e^z}$.

由 $u=f(x,y,z)$ 得

$du=f_x dx+f_y dy+f_z dz$，

故 $du=\left(f_x+f_z\dfrac{x+1}{z+1}e^{x-z}\right)dx+\left(f_y-f_z\dfrac{y+1}{z+1}e^{y-z}\right)dy$.

同步自测

Ⅰ. 选择题

1. 函数 $\ln(x^2+y^2-r^2)=\sqrt{x^2-2rx+y^2}$ 的定义域是(　　).

A. $\begin{cases}x^2+y^2\geqslant r^2\\(x-r)^2+y^2\geqslant r^2\end{cases}$

B. $\begin{cases}x^2+y^2>r^2\\(x-r)^2+y^2\geqslant r^2\end{cases}$

C. $(x^2+y^2-r^2)\cdot(x^2-2rx+y^2)>0$

D. $\begin{cases}x^2+y^2>r^2\\(x-r)^2+y^2\geqslant r^2\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x^2+y^2<r^2\\(x-r)^2+y^2\leqslant r^2\end{cases}$

2. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的二阶偏导数 $f_{xy}(x,y)$ 及 $f_{yx}(x,y)$ 都存在，则 $f_{xy}(x,y)$ 及 $f_{yx}(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续是 $f_{xy}=f_{yx}$ 的(　　).

A. 充分而非必要条件

B. 必要而非充分条件

C. 充分必要条件

D. 既非充分又非必要条件

3. 函数 $z=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)(a>0,b>0)$ 在点 $P\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在此点的内法线方向的方向导数为(　　).

A. $\sqrt{\dfrac{2(a^2+b^2)}{ab}}$　　B. $\dfrac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{ab}$

C. $\dfrac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}$　　D. $\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}$

Ⅱ. 填空题

1. 由方程 $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的全微分 $dz=$______