时代教育 · 国外高校优秀教材精选

PEARSON
Addison Wesley

（第7版）

应用数值分析

Applied Numerical Analysis

Curtis F.Gerald
（美）Patrick O.Wheatley 著
吕淑娟 译

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

时代教育·国外高校优秀教材精选

应用数值分析

第7版

(美)柯蒂斯F. 杰拉尔德　帕特里克O. 惠特莱　著
吕淑娟　译
陆启韶　校订

机械工业出版社

本书是为工科、理科、数学系、计算机科学系的大学本科2—3年级学生和工科研究生编写的应用数值分析教材或参考书，也是工程技术人员的一本很好的工具书。因为书中介绍了许多数值方法，所以它也可以作为科技工作者常用的、有价值的参考文献。

本书包括：误差概念，非线性方程和方程组的解法，线性代数组的解法，插值和曲线拟合，函数逼近，数值微分和数值积分，常微分方程的数值解法，优化方法，偏微分方程，有限元方法。

Original English Language title: Applied Numerical Analysis, 7e by Curtis F. Gerald and Patrick O.
Wheatley
ISBN 0-321-13304-8

图书在版编目（CIP）数据

应用数值分析：第7版/（美）杰拉尔德（Gerald, C.F.），（美）惠特莱（Wheatley, P.O.）著.—北京：机械工业出版社，2006.8
（时代教育·国外高校优秀教材精选）
ISBN 7-111-19392-X

Ⅰ.应… Ⅱ.①杰…②惠… Ⅲ.数值计算-高等学校-教材-英文 Ⅳ.O241

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第078328号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：刘小慧
责任编辑：郑 玫 版式设计：张世琴 责任校对：程俊巧 姚培新
封面设计：饶 薇 责任印制：洪汉军
北京京丰印刷厂印刷
2006年9月第1版·第1次印刷
184mm×260mm·31.75印张·786千字
定价：48.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68326294
编辑热线电话（010）88379711
封面无防伪标均为盗版

时代教育·国外高校优秀教材精选节目

数学 & 统计

	书名	作者	书号	定价
1	微积分(英文版·原书第8版)	Rigdon	10705	51.00
2	应用微积分——管理、生命科学及社会科学专业适用(英文版·原书第5版)	S.T.Tan	14011	89.00
3	线性代数引论(英文版·原书第5版)	Johnson, Riess, Arnold	10628	36.00
4	应用数值方法——使用 MATLAB 和 C 语言(英文版)含1CD	Schilling, Harris	15670	69.00
5	实分析引论(英文版·原书第2版)	Manfred Stoll	14747	55.00
6	身边的数学(英文版)	Thomas L. Pirnot	10614	49.00
7	大学生数学专题讲座(中文版)	Serge Lang	10424	9.00
8	统计思想(英文版·原书第2版)含1CD	Utts, Heckard	10946	66.00
9	统计推断(英文版·原书第2版)	Casella, Berger	10945	39.00
10	运筹管理分析——使用 Excel(英文版)	Weida, Richardson, Vazsonyi	14320	36.00
11	应用统计分析——使用 Excel(英文版)含1CD	Gerald Keller	14321	68.00
12	数学物理方程——傅里叶分析及其应用(英文版)	Gerald B. Folland	15670	38.00
13	概率与统计(英文版·原书第11版)	Mendenhall, Beaver, Beaver	15695	72.00
14	概率与统计(理工类)(英文版·原书第6版)	Jay L. Devore	15724	72.00
15	数学模型(英文版)	Thomas Svobodny	15862	46.00
16	编码理论的数学(英文版)	Paul Garrett	15863	38.00
17	傅里叶分析(英文版)	Loukas Grafakos	17085	72.00
18	应用数值分析(中文版·原书第7版)	Gerald, Wleatley	19392	48.00
19	应用数学——经济、金融、生命科学及社会科学专业适用(英文版·原书第8版)	Barnett, Ziegler, Byleen	即将推出	
20	常微分方程基础(英文版·原书第5版)	Edwards, Penney	制作中	
21	时间序列分析:预测与控制(英文版·原书第2版)	Box, Jenkins, Reinsel	制作中	

序　言

在本版中我们保留了前几版特定的风格。引用第6版序言中的话："我们保留了使这本书备受欢迎的特点：易读性使得教师不必向学生对这本书作过多的解释；通过很多使用不同的方法求解同一问题的例子，清楚地阐述了不同方法的特点；教师可以从课后大量的习题中选择适当的问题供学生练习；另外，还有具有重要实际应用背景的、具有挑战性的问题和设计。"

我们在前一版的基础上作了本质的改进，主要有以下几个方面：

在前一版中，理论内容是在每章结束前的单独一节中介绍，而在本版中则是将它们融汇在方法的描述过程中。

由于数值分析不是专门的程序设计课程，在本版中删除了前一版中每章最后实现算法的计算机程序。本版保留了简单易读的算法，学生们可以按照这些算法编写他们需要的计算机程序。

本版着重强调了计算机代数系统的应用；MATLAB是比Maple和*Mathematica*功能更强大的计算机代数系统。我们还介绍了应用电子制表软件求解问题的例子。

优化问题（第7章）是本版新增加的内容，介绍了多变量优化和单变量优化这两种情况。当然，也介绍了线性规划，但是其主要目的是强调对单纯形法的理解，而不是简单地只给出解决问题的方法；对非线性规划的处理和简单的线性情况恰好相反。

本版将常微分方程的边值问题从偏微分方程一章中分离出来，并入常微分方程一章中。偏微分方程的边值问题（椭圆方程）和其他类型的偏微分方程组成了单独的一章。

本版增加和替换了很多习题，使得题目类型更加多样化。许多新增加的习题和应用设计问题比前版中的更具有挑战性。

和前几版一样，本书另一个独特之处是全面地概述了求解偏微分方程的各种数值方法，并且较详细介绍了有限元方法。

许多专家建议我们详细深入地阐明几个专题的内容，我们在本版的编写中采纳了这个意见，这使得本书更加通俗易懂。

我们还引用了第6版序言中的以下内容：

这本书是为工科，理科，数学，计算机科学系的大学2—3年级学生编写的应用数值分析教材或参考书。它也是工程技术工作者的一本很好的工具书。因为书中介绍了许多数值方法，所以它也可以作为科技工作者常用的、有价值的

参考文献。

虽然我们要求学习本书的学生应该具有很好的微积分学基础，但是学习中用到的结论在本书中都适当地作了复习。附录A给出了学习这本书所需要的微积分学的主要概念和结论；我们力求将数学概念叙述得简单直观。另外，在本书的最后给出了各章部分习题的答案和提示。

致谢

很多教师对本书提出了宝贵的建议和有建设性的批评。我们特别要感谢的是下面的这些人，他们中肯的评论使得本教材更加完善：

Todd Arbogast，University of Texas at Austin
Neil Berger，University of Illinois at Chicago
Barrbara Bertram，Michigan Technological Sciences
Herman Gollwitzer，Drexel University
Chenyi Hu，University of Houston-Downtown
Tim Sauer，George Mason University
Daoqi Yang，Wayne State University
Kathie Yerion，Gonzage University

我们还要感谢 Addison-Wesley 公司的工作人员，他们和我们的密切合作确保了本书的质量。他们是：Greg Tobin，Bill Hoffman，RoseAnne Johnson，Cindy Cody，Pam Laskey，Heather Peck 和 Barbara Atkinson。

部分英制单位

长度

1 ft = 0.3048 m

1 in = 0.0254 m

热量

1 Btu = 1055.06 J = 1.05506 kJ

温度

$1\ ^\circ F = \frac{5}{9}\ K$

重量（质量）

1 lb = 0.453 592 37 kg

速度

1 mph = 1 mile/h = 0.447 04 m/s

目　　录

第0章

预备知识

本书主要讲述如何利用计算机来解决一些利用微积分课程中所学技巧可能无法解决的问题。同时，也展示了如何利用不同的方法来解决你以前或许已经解决的问题。我们讨论的重点是现实世界中存在的、尽管有时会被简化的问题。许多被简化的例子可用解析方法来求解，这为将其与计算机求出的解比较创造了可能。

现代数学起始于牛顿发现与开普勒通过观测行星大约 20 年后得到的经验规律相匹配的数学模型。现在，大部分的应用数学都是在重复牛顿处理问题的方法：发展可以用于模拟一些现实世界情形的数学关系，预测在不同外界因素作用下的反应。

数学的美在于它能在简单情形的基础上得到更复杂和更有用的情形。对本书也是如此，我们从简单易懂的数学应用开始，但它们是数值分析中其他更重要应用的基础。

本章内容：

本书每章都以该章所讨论的主题开始。

0.1 解析分析与数值分析的比较

描述了数值分析与解析分析的不同，并说明了它们各自的优势。简要的列出了将在后续章节中讨论的主题。

0.2 计算机与数值分析

解释了为什么说计算机和数值分析是紧密相关的。描述了计算机用于执行算法的几种途径。

0.3 一个例证

给出了用计算机代数系统来解决一个典型问题的实例。

0.4 数值计算中的误差种类

讨论了计算精度和产生误差的不同原因这一重要主题。仔细讨论了由计算机存储数据而引起的误差。

0.5 区间算法

讨论了决定不精确值对针对现实问题建立起来的方程的影响的一种方法。

0.6 并行和分布计算

解释了为什么很多计算机一起工作可以加快数值运算的原因。一些可能碰到的困难也有所提及。

0.7 数值算法有效性的度量

告诉我们如何比较不同方法的精度（这些方法都可以完成某一项给定的任务），以及它们在使用计算机资源时的区别。

0.1 解析分析与数值分析的比较

在数学中，解析分析通常意味着通过方程的方法来解决问题。当然，这个方程必须要通过代数、微积分、微分方程、偏微分方程或其他的方法来给出它的解。问题的数值分析解法与过去解决问题的方法类似，但数值分析仅利用代数的方法：只利用加、减、乘、除运算和比较不同量的大小。因为这些运算恰恰是计算机所能做的，所以计算机和数值分析是密切相关的。

一个解析结果就自身而言并不一直是有意义的，考虑如下简单的三次方程：

$$x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$$

不难从其因式看出$\sqrt{3}$是方程的一个根。除非你想切出一块这个长度的木板，否则从数学上这个结果已经足够了。但是，标尺上无法体现含根号的值，现在你如何办？你可以通过计算器得到值，也可以利用对数，或者在表中找到它。数值分析有多种仅利用纯粹的代数运算得到答案的方法。

这是一个挑战，就如你在一个荒岛上，除了一个可以在沙滩上画画的棍子外没有其他可以借用的东西。除了四则运算和比较值的大小以外你忘记了数学的一切（非常像一个计算机）。同样的原因，或许因为你没有兴趣去求它，仅仅想得到 2 的三次根的一个较好的估计值而已。一个尝试性且有误差的方法是，找一些数看哪个值自乘三次的值是 2：

$$1.2^3 = 1.728 \quad \text{太小}$$

$$1.4^3 = 2.744 \quad \text{太大}$$

$$1.25^3 = 1.9531 \quad \text{比较接近}$$

$$1.26^3 = 2.0004 \quad \text{相当接近}$$

有时可能需要这样做上几次，在最后两个数之间添值时会得到更好的结果。

现在你可以自问，“我真正需要多好的答案，或许 1.26 已经和我需要的很接近了，无论如何，1.26^3 和 2.0000 仅相差一个非常小的数 0.0004”。

本书中，我们将描述能有效解决这个小问题以及其他更困难的问题的方法。例如，下面是计算曲线 $y = \sin x$ 的一段弧长的积分式，它没有闭型解：

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$$

数值分析几乎可以用标准方法来计算任何积分的弧长，根本没必要去作换元和分部积分。而且，仅需加、减、乘、除和比较大小这些最简单的数学运算。

数值结果和解析结果的另一个区别就是前者永远是一种近似。通常，解析方法给出的是在特定情形下可以赋值的函数形式解，这种函数解的特点和性质通常是明显的，数值结果则不同，但是数值结果可以画出来展示解的特点。

尽管数值结果是一种近似，但它可以达到需要的精度，而需要的精度当然是由应用所决定。前面的例子$\sqrt[3]{2}$说明所需精度完全由问题本身决定。（因为计算机仅做代数运算，这就限制了计算结果的精度水平，对此我们后面再作讨论。）为了达到高精度，必须执行非常多的单独运算，而由于计算机可以快速无误的来做到这一点，因此运算不是问题。事实上，对特定应用下的解析结果赋值获取数值结果时，总假定有相同的误差。

对计算机带来的误差和数值方法中其他原因造成的误差进行分析是学习数值分析过程中非常关键和重要的部分，这一内容本书中会经常碰到。

下面是本书中所包含的数值分析中可进行的一些运算：

寻找非线性方程 $f(x)=0$ 或方程组的解。

求解线性方程组，包括大型方程组。

用内插法由数值表求出位于表中值点的函数值，用它拟合实验数据。

用多项式或有理函数逼近函数。

逼近函数的导数值，甚至在仅仅知道一些函数值的情况来逼近。

即使在函数值只能通过试验观测的方法得到的情况下，对任意的被积函数求定积分。

在给定初始值的情况下求解微分方程，这些方程可以具有任意阶和任意的复杂性。在区域边界条件给定后都可以用数值分析的方法来解决它。

求函数的最大值或最小值，包括在某些约束条件下的最大值和最小值。

用几种技巧求解所有类型的偏微分方程。

0.2 计算机和数值分析

在我们有能够非常有效的执行大量单独运算的计算机以前，用数值方法需要进行太多冗长和重复的代数运算。而手工算容易犯太多的错误，以至于结果的可信度会很小。另外，人力费用在通常情况下也很难负担得起。(从前，军事射表是利用桌面计算器进行手工计算的，但那是在无计算机可用前，国家紧急状态下的一个特殊情况。)

当然，计算机本质上是“哑的”，你必须给出执行每一步操作的详细而完备的指令。换句话说，必须写出能使计算机进行数值分析的程序。在学习这本书时，将学到足够的知识来写出很多实用的数值方法的程序去实现它们。具体用哪种计算机语言并不重要，可以用 BASIC，FORTRAN，Pascal，C，C++，Java，甚至是汇编语言来写程序。本书大部分的方法将会充分用伪代码来描述，而将之转换成程序是相当直观的。

实际上，写程序并不总是必要的。由于数值分析的重要性，所以有广泛的商业软件包可用。国际数学和统计实验室（IMSL）有许许多多有效的和经过性能检验的，用 FORTRAN 和 C 编写的用于实现算法的程序。最近，线性代数包（LAPACK）仅用很少的成本就可得到。这个 FORTRAN 程序包合并了原先含在 LINPACK 和 EISPACK 中的子程序包。在本书附录 B 中给出了关于这些和别的一些程序的信息。双月出版的工业和应用数学学会时事通讯（SIAM News）中含有关于最新的软件包的讨论和广告。在 Numerical Recipes 这套书中，罗列并讨论了用 FORTRAN，Pascal 和 C 不同语言编写的数值分析程序。

计算机操作的一个重要趋势是利用多个处理器同时工作，从而以比单个处理器快得多的速度来执行程序。一些数值分析过程就可以利用这种方式来实现。在利用这些快速计算机系统时，特殊的规划技巧是必须的。最近一个进展就是利用闲散的，甚至是个人电脑来完成计算。如果这些单个的电脑被连接到一个网络里，主控计算机就可以将大型计算的一部分发送到这些电脑里，待完成这部分工作后，这些单个的计算机又会将计算结果传回到主控计算机。这种安排称为分布式计算。如同你能想象的那样，调配和控制这种分布式系统是一项困难的工作。

利用一种高级语言来编写程序的另一种选择是利用有时被称为计算机代数系统（CAS）的一类软件。（这个名子不是太标准，也没有完全描述出软件的特征。[⊖]）这类程序模仿人类解决数学问题的方式。它们被设计成能够识别给出的函数类型（多项式，超越函数等），并且对给出的函数或表达式执行所需的数学运算，这是通过在表格中查找由运算产生的新表达式或用内置规则来完成的。比如，一个程序可以利用一般规则来求导数，利用积分表求积分，分解多项式或因式展开。这些仅仅是其能力的一小部分。如果不能给出解析结果，大部分的程序都会允许使用者通过数值的方法来得到一个答案。

与数值分析相关的是，很多这类程序的一个重要特征是它们能够写出大量有用的文件：定义了一系列的内置运算去执行大的或没有包含在程序中的任务。一系列连续的运算，每一步都利用前面的结果——这个过程被称为迭代，也是可能的。许多数值分析的过程都是迭代的过程。

有很多计算机代数系统都可以用，我们只讨论其中的三种：*Mathematica*，MATLAB，Maple。其中 MATLAB 应用最为广泛，它是其他两种的补充并将和它们做比较。本章中，我们将说明如何利用 MATLAB 画函数的图形和求函数的极小值点。可以预期读者将利用一种计算机代数系统作为研究数值过程的工具。

大部分这类程序的一个特殊特征是其精确运算能力，一个有趣的例子就是 π 可以展开到小数点后 100 位。通常情况下，当采用一个正常的计算机程序时，我们要得到满足一定精度的有限位小数。

特别重要的是画函数图形，甚至是画有两个无关变量的函数（需要在三维空间中画）图形的程序也已被内置在软件中，*Mathematica* 的画图功能尤为突出。

由于计算机代数系统进行数学符号演算和执行数值过程时的高度精确性，它们已经变成数值分析学家喜爱的一个工具。然而，对于专业分析学家经常要面对的“大型”现实问题来说，它不具备必要的速度。计算机代数系统非常适用于“小问题”，并且是一个十分优秀的学习工具。但是，在许多实际问题中，例如天气预报或空间飞行器的轨道计算，科学家（工程师）将会采用 FORTRAN 或 C 编写的程序，并且几乎会一直采用经过验证的 IMSL 或 LAPACK 程序。

做数值分析时除了编写计算机程序，另一选择是应用电子制表软件程序。有时也利用可编程的计算机来做。这些先进的计算机的典型代表是来自德州仪器厂的 T1-89 和来自 Hewlett-Packard 的 HP-48G，这些计算机的数学运算能力要比个人电脑强很多。他们的存储器容量有限，但嵌在上面的特定设备是数值分析学家感兴趣的。在它们的只读存储器（ROM）中编码的程序可以在二维和三维空间中画函数的图像，求解非线性方程的根，解线性方程组，处理矩阵，做插值、微分和积分运算（包括数值的和解析的），求解常微分方程以及执行数学和统计运算。表达式中可以含有正弦、余弦和其他的数学函数项。它们不但能处理数值表表达式，也能处理符号运算。在本版中我们不讨论可编程的计算机问题。

0.3 一个例证

我们将通过演示如何用数值方法来解决一个典型问题来介绍数值分析这门课。如果你在

⊖ 这类程序也称为符号代数系统。

一个采矿公司工作的话，或许例题 0-1 就是要你解决的一个问题。

例 0-1 矿井中的梯子：如图0-1a所示，两条矿道以 123°角相交，直道宽 7m，入口道宽 9m。此时能通过两个矿道的交角的梯子的长度最长为多长？忽略梯子的厚度，并假定通过拐角时梯子不倾覆。如果夹角 α 和矿道的宽度可变，那么结果又如何？

解决问题的步骤：

当解决一个科学或工程问题时，一般要遵循 4 个步骤：

1. 将问题表述清楚，包括简化的假设。

2. 找到问题的一个可以给出数值结果的数学表述形式，正如现在这个问题一样，这个过程可能要用到微积分。在另外的情形下，或许要引入其他的数学过程。当这种数学描述是一个微分方程时，必须给出合适的初始条件和（或）边界条件。

3. 求解第 2 步得到的方程（组），有时是用代数的方法，但常常需要更现代的方法，本书中将给出所需的方法。通过这一步将得到一个或一组数值结果。

4. 在理解数值结果的基础上做出判断。这需要经验和对问题所处环境的理解，这种理解是解决问题最困难的部分，必须在工作中逐渐学会。本书将强化步骤 3，并将在一定程度上处理步骤 1 和步骤 2，但是步骤 4 在课堂上不可能有效的进行讲述。

本问题的描述已经完成步骤 1，现在看步骤 2。

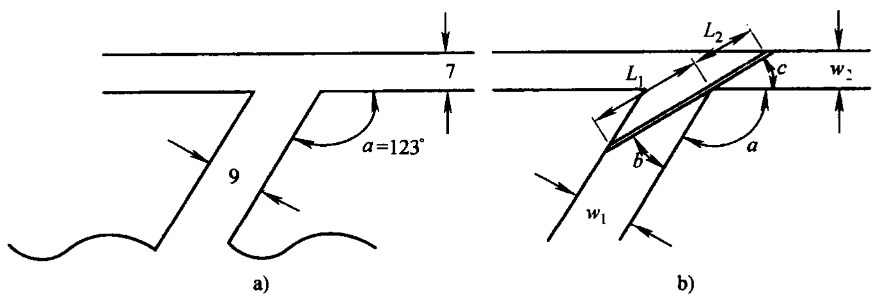

图 0-1

下面是分析梯子问题的一种方法。想象当我们搬着梯子通过拐角时梯子的位置是连续变化的，存在着一个临界位置，此时梯子的两端触及到墙而梯子上有一点触及到两条矿道交叉成的拐角（见图 0-1b）。设 c 是梯子和墙面在临界位置时的夹角。一般情形下，我们更喜爱笼统地解决问题，所以我们将引进变量 a，b，c，w_1，w_2。

考虑在这个临界位置的一连串的线——它们的长度随角 c 变化，并有下述关系成立（角用弧度表示）：

$$L_1 = \frac{w_1}{\sin b}, \quad L_2 = \frac{w_2}{\sin c}$$

$$b = \pi - a - c \tag{0-1}$$

$$L = L_1 + L_2 = \frac{w_1}{\sin(\pi - a - c)} + \frac{w_2}{\sin c}$$

能通过两条矿道交角的梯子的最大长度是作为角 c 的函数 L 的最小值。如果想利用在微积分

中学到的方法来求解 L 关于 c 的最小值，首先需要给出 $\mathrm{d}L/\mathrm{d}c$ 的表示式，然后求出使得它为零的 c 值，我们更喜欢利用 MATLAB 中的一个特定函数来获得答案。

MATLAB 的命令是行启动模式，就是说我们要键入调用运算的命令。它是一个巨大的功能强大的"计算环境"。程序的开发者 Math Works 公司将它称为"技术计算语言"。在后面的章节中我们将探究它的巨大能力，但是现在我们仅仅利用它（1）画相对于 c 的 L 的图形（从中我们可以估计极小值点），（2）利用特定的 MATLAB 函数找出最小值的更精确的解。

我们从定义函数 L 出发，从图 0-1 中可看出 w_1 和 w_2 的值。角 c 是 123°，但是我们想用弧度来表示这个值。可以要求 MATLAB 来做这种转换；π 的值是内嵌在 MATLAB 中的，我们利用 π 来获取它的值：

```
EDU >> a = 123 * 2 * pi/360
a =
  2.1468
```

可以得到有更多位有效数字的结果，但现在的结果已经足够好了。现在定义一个函数 L，有很多方法可以做到这一点，但是下面的方法更简单：

```
EDU >> L = inline('9/sin(pi - 2.1468 - c) + 7/sin(c)')
L =
   Inline function:
L(c) = 9/sin(pi - 2.1468 - c) + 7/sin(c)
```

用 MATLAB 画 L 关于 c 的曲线图形：

```
EDU >> fplot (L, [0.4, 0.5]); grid on
```

得到如图 0-2 的图形。（"grid on" 和分号前面的命令抑制画图直至产生网格。）

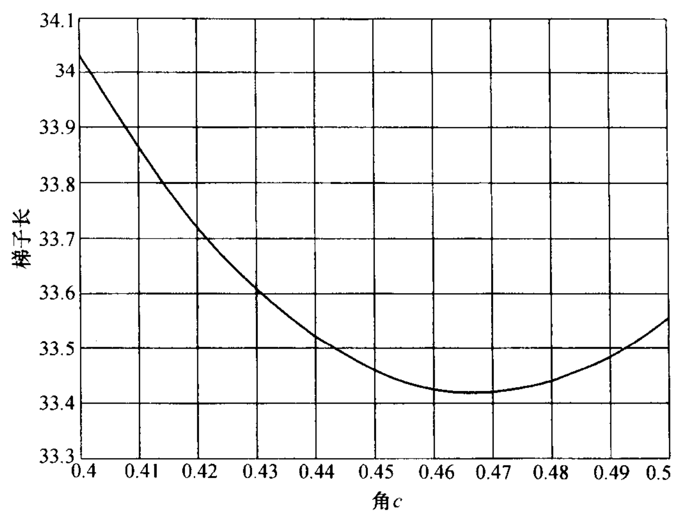

图 0-2

从图形，我们可以估计出最小值点近似为 $L = 34.42$，$c = 0.466$。对这个问题而言，这个答案或许就足够精确了。尽管如此，MATLAB 还可以得到更精确的最小值。利用下面的命令得到一个数值计算结果：

```
EDU >> fminbnd (L, 0.4, 0.5)
ans =
  0.4677
```

这个估计确实很不错。但这是最小值点处 c 的值——实际想求的是 L 的值。因此，还需进行如下操作：

```
EDU >> L (0.4677)
ans =
  33.4186
```

如果想看看 MATLAB 到底是如何在最小值点寻找 c 的值的话，可以这样做：

```
EDU >> fminbnd (L, 0.4, 0.5, optimset ('Display','iter'))
Func-count        x            f(x)          Procedure
     1         0.438197      33.5333          initial
     2         0.461803      33.4231          golden
     3         0.476393      33.4284          golden
     4         0.467721      33.4186          parabolic
     5         0.467688      33.4186          parabolic
     6         0.467654      33.4186          parabolic
optimization terminated successfully:
the current x satisfies the termination criteria using
OPTIONS, Tolx of 1.000000e-004
ans =
  0.4677
```

MATLAB 给出的这个表格给出了求极小值的连续的过程（更多的时候用 x 而不是用 c 来表示自变量）。在后面的章节中，我们将解释用到的不同的“过程”。

从这个例子中，应当学会在用数值方法解决问题时的三件事情：(1) 在处理问题时通常有多种方法；(2) 有预先写好的程序可借用；(3) 问题需要的精度决定了如何得到解。当一幅图已经足够时，或许它就是最快和最好的途径，而且它可以显示答案相对于参数的灵敏度。

Maple 和 *Mathematica* 是可以解决梯子问题的另外两个计算机代数系统。如果手边有这些软件，可以将之和 MATLAB 的结果做些比较。

0.4　数值计算中的误差种类

在前面已经提到，认识在做数值运算时可能产生的误差是非常重要的。一些误差产生于计算机做代数运算时的方法，但还有其他产生误差的原因。

原始数据中的误差

以数学方程为模型的现实问题，它的系数几乎都不太准确。原因就在于问题经常依赖于可疑的测量精度。更进一步说，模型本身或许就没有恰如其分的反映这种行为。用任何方法

都不能克服这种误差，但是我们需要警觉到这种不确定性；特别是，需要检验结果对输入信号变化的敏感性。因为做计算的目的是做出在现实世界中有效的决断，所以敏感性分析是特别重要的。正如哈明（Hamming）所说："计算的目的是洞察，而不是数。"

低级误差

以做数值分析为职业的人，会一直用计算机或者至少用一个可编程的计算器。学习本书时或许也会很大程度上用这些计算工具。这些机器犯错误的机会很罕见，但是因为人卷入了编程、操作、输入的准备和输出的解释，这种低级错误发生的频繁程度已超出了所能容忍的限度。解决的办法就是细心、加上仔细检查结果的合理性。有时试着运行已知的结果是很有价值的，但也不能保证不犯这种低级错误。当手工计算更普遍的时候，校验和是经常要计算的——它们被设计成去揭示和更正错误。

在一次太空飞行中由于一个人在写程序时犯了一个很普通的错误——一个值的位数被颠倒，导致了飞船丢失。人为错误付出的代价可能非常巨大。

截断误差

截断误差是指由方法自身引起的误差（这个词来自于数值方法经常可以和截断泰勒级数相比的事实）。例如，我们可以用三次多项式函数 $p_3(x)$ 来逼近 e^x，其中：

$$p_3(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

然而我们知道，实际计算 e^x 时需要无限长的级数：

$$e^x = p_3(x) + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

用三次函数逼近 e^x 时得到的是不准确的结果。此误差主要是由于截断级数产生的，和计算机或计算器毫无关系。对迭代方法而言，通常可以通过反复迭代来降低这种误差，但是因为生命有限，计算机时间昂贵，必须满足于对精确解析结果的某一个近似。

传播误差

传播误差较其他误差更敏感。这里的传播误差是指由于早期发生的误差而在程序的后续步骤中产生的误差——它是局部的误差补充。它在某种程度上类似于初始条件的误差。在一些求根的方法中，我们通常通过约化函数来消去第一个根，进而寻找另外的根。这种技巧又称为约化降阶法。这时约化方程将含带着前几步误差。当然，这个解用于确认原来方程的稍后的解。

在后续章节要处理的数值方法的例子中，传播误差特别重要。如随算法的进行误差被连续的放大，渐渐地，它将覆盖真实的值，破坏它的有效性；我们称这样的算法是不稳定的。对一个稳定的算法而言，早期产生的误差会随着算法的继续而逐渐消失。这一问题在后续章节中将被彻底的讨论。

尽管各类误差在一定程度上相互影响，这些误差的每一类在别的误差不出现的时候仍可能发生。例如，在解析方法中，在不出现截断误差的情况下，仍可能会出现舍入误差。类似，即使在计算时得到了非常好的精度，截断误差也可以引发不精确性。即便是这种非常好