

MCE
09

土木工程专业研究生系列教材

薄壁杆件结构力学

包世华 周 坚 编著



中国建筑工业出版社
CHINA ARCHITECTURE & BUILDING PRESS

Master of Civil Engineering

土木工程专业研究生系列教材

薄壁杆件结构力学

包世华 周 坚 编著

中国建筑工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

薄壁杆件结构力学/包世华, 周坚编著. —北京: 中国建筑工业出版社, 2006

(土木工程专业研究生系列教材)

ISBN 7-112-08093-2

I. 薄... II. ①包...②周... III. 薄壁结构—杆件—结构力学—研究生—教材 IV. TU323

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 010771 号

土木工程专业研究生系列教材

薄壁杆件结构力学

包世华 周 坚 编著

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)

新华书店总店科技发行所发行

北京嘉泰利德公司制版

北京市彩桥印刷有限责任公司印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 40% 字数: 990 千字

2006 年 6 月第一版 2006 年 6 月第一次印刷

印数: 1—2 500 册 定价: 75.00 元

ISBN 7-112-08093-2

(14047)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

本社网址: <http://www.cabp.com.cn>

网上书店: <http://www.china-building.com.cn>

本书前版于 1991 年出版，这次作为“土木工程专业研究生系列教材”之一重新修订，增加了许多新的内容。

本书系统地介绍了符拉索夫开口截面薄壁杆件理论、乌曼斯基闭口截面薄壁杆件理论，以及考虑周边发生畸变的闭口截面杆件的广义坐标原理解法，并针对高层建筑结构和桥梁结构等计算的需要介绍了采用横向联系加强的开口截面薄壁杆件的计算；同时还包括有用力法和位移法计算薄壁杆件结构、薄壁杆件的稳定计算、薄壁杆件的能量原理和有限元方法等内容；增加了薄壁曲杆、薄壁连续曲梁和高层建筑筒体结构的计算，以及薄壁杆件结构半解析常微分方程求解器方法等内容。

本书可供建筑结构、建筑机械、道路桥梁等专业的工程技术人员以及高等院校高年级学生和研究生作为教材和参考用书。

* * *

责任编辑：赵梦梅

责任设计：董建平

责任校对：张景秋 关 健

前 言

本书第一版曾于1991年出版。此次作为“土木工程专业研究生系列教材”之一重新修订。

本书第一版曾系统地介绍了薄壁杆和薄壁杆结构的计算理论和分析方法,内容包括:符拉索夫开口截面薄壁杆件理论、乌曼斯基闭口截面薄壁杆件理论;考虑周边发生畸变的闭口截面杆件的广义坐标原理解法、以及用横向联系加强的开口截面薄壁杆件的计算;和薄壁杆件结构、薄壁杆件的稳定、薄壁杆件结构的能量原理和有限元方法等。它们全是薄壁杆和薄壁杆结构的基础理论和常用算法,故全部内容均保留,仅作了一些文字和顺序上的修改。能量原理一章中增加了势能原理在矩形筒体结构中的应用举例,薄壁杆结构的计算一章中增加了薄壁连续梁和平板架在扭矩荷载作用下的双力矩分配法等。

由于高层建筑筒体结构和曲线箱梁桥跨结构这十多年来在我国的迅猛发展,它们是薄壁杆结构在土木工程中的两大应用方面,本书新增加了这两方面的有关内容。考虑到本书的特点,介绍着重于计算理论和分析方法。新增的章节有:

第6章薄壁曲杆的计算,较为系统地介绍了符拉索夫薄壁曲杆的基本理论和实用算法。

第10章高层建筑筒体结构的计算,介绍了筒中筒结构、多边形筒体结构和多孔束筒结构等按薄壁筒计算的理论和方法,它们多是能量原理在薄壁筒方面的延伸。涉及的问题除了静力分析外,还有动力分析、整体稳定和二阶分析等方面的问题。

第11章薄壁连续曲梁的计算,介绍了连续曲梁纯扭转和约束扭转以及带点支承连续曲梁的计算,给出了曲梁单元的刚度矩阵和等效结点荷载。

第12章薄壁杆件结构半解析常微分方程求解器方法,讨论了变截面筒、变截面筒中筒、半无限弹性地基上的筒体结构的静力、动力(自由振动及动力作用下的稳态反应)、稳定、二阶分析和弹性时程分析,以及大型箱形截面桥跨结构的影响场等问题。计算方法是多维结构,沿一方向(截面的环向)离散化,沿另一方向(轴向)用解析函数表示的半解析方法,将问题归结为微分方程组,运用常微分方程求解器求解。这是高层筒体结构和箱形截面桥跨结构的一个新的解法系列,内容全部是我们自己近年的研究成果。

全书共12章。周坚负责第1、2、3、4、5、6和11章的编写和修订,包世华负责第7、8、9、10和12章的编写和修订。

能力所限,本书难免存在不足之外,欢迎读者批评指正。

清华大学 包世华
北京建筑工程学院 周 坚
2005年5月

目 录

第 1 章 薄壁杆件的弯曲和自由扭转	1
1.1 概述	1
1.2 薄壁杆件的弯曲	2
1.3 闭口截面薄壁杆件的自由扭转	20
1.4 开口截面薄壁杆件的自由扭转	29
习题	36
第 2 章 开口截面薄壁杆件的约束扭转	38
2.1 概述	38
2.2 基本假定, 约束扭转正应力	40
2.3 主扇性极点、主扇性零点与主扇性几何特征	42
2.4 约束扭转剪应力, 薄壁杆件的广义内力——双力矩与弯扭力矩	55
2.5 扭转角的微分方程及其解, 薄壁杆件约束扭转时的广义位移与内力	58
2.6 薄壁杆件约束扭转的初参数解法	62
2.7 薄壁杆件约束扭转的边界条件	68
2.8 集中扭矩与横向荷载作用下的杆件	69
2.9 纵向荷载作用下的杆件	79
2.10 简单梁的弯曲理论比拟	86
习题	88
第 3 章 闭口截面薄壁杆件的约束扭转	91
3.1 概述	91
3.2 乌曼斯基的闭口截面薄壁杆件约束扭转理论	93
3.3 多室闭口截面杆件的约束扭转	112
3.4 广义坐标法原理	132
3.5 考虑截面外形轮廓线变形的箱形梁的约束扭转	139
3.6 考虑截面外形轮廓线变形, 但忽略剪切变形影响的箱形梁的约束扭转	155
3.7 乌曼斯基理论——广义坐标法的特例	158
习题	161
第 4 章 用横向联系加强的开口截面薄壁杆件的约束扭转	163
4.1 概述	163
4.2 多支座薄壁杆件的约束扭转	163
4.3 用窄缀板加强的开口截面薄壁杆件约束扭转的结构力学解法	169
4.4 用缀板或缀条加强的开口截面薄壁杆件约束扭转的连续化解法 I	174
4.5 用缀板或缀条加强的开口截面薄壁杆件约束扭转的连续化解法 II	179
4.6 用隔板加强的槽形截面薄壁杆件的约束扭转	190
4.7 在弹性介质中薄壁杆的约束扭转	193

习题	201
第5章 薄壁杆件的稳定	203
5.1 概述	203
5.2 杆端偏心压力作用下开口薄壁杆件的稳定	204
5.3 杆端偏心压力作用下开口薄壁杆稳定问题的几个特例	213
5.4 杆端偏心受拉时开口薄壁杆的稳定	222
5.5 杆端偏心压力作用下开口截面薄壁杆空间形态的稳定	223
5.6 开口截面薄壁杆件平面形态稳定的一般理论	224
5.7 开口薄壁杆平面形态稳定问题的几个特例	231
5.8 用虚位移原理求临界荷载的近似值	239
5.9 闭口截面薄壁杆件的稳定	245
习题	247
第6章 薄壁曲杆的计算	249
6.1 概述	249
6.2 薄壁曲杆静力计算弯扭耦联微分方程及其解	249
6.3 有限差分法分析薄壁曲杆	259
6.4 薄壁曲杆的约束扭转分析	262
6.5 简支曲杆在集中荷载作用下的计算	272
6.6 均布力 p 和均布扭矩 m_x 作用下的计算	281
6.7 弯矩 M_{i-1} , M_i 作用于简支梁端的计算	282
6.8 双力矩 B_{i-1} , B_i 作用于基本体系两端的计算	284
6.9 薄壁曲杆实用计算公式汇总	285
6.10 算例	290
第7章 薄壁杆件结构的计算	294
7.1 概述	294
7.2 力法原理及其在薄壁杆件结构中的应用	295
7.3 薄壁杆件位移计算的一般公式及其简化	297
7.4 力法计算示例	306
7.5 位移法原理及其在薄壁杆件结构中的应用	311
7.6 薄壁杆件的反力系数计算	313
7.7 位移法计算示例	319
7.8 薄壁连续梁在扭矩荷载作用下的双力矩分配法	323
7.9 薄壁平面板架在扭矩荷载作用下的双力矩分配法	329
7.10 矩阵位移法的基本原理和计算过程——薄壁连续梁的扭转计算	332
7.11 矩阵位移法计算薄壁平面板架	343
7.12 矩阵位移法计算薄壁空间刚架	359
习题	363
第8章 薄壁杆件结构的能量原理	364
8.1 概述	364
8.2 薄壁杆件的弯扭势能	364
8.3 势能原理和位移法	370
8.4 里兹法	373
8.5 势能驻值原理应用举例一——箱形梁的剪力滞后效应	382
8.6 势能驻值原理应用举例二——矩形筒体结构的受力和变形分析	388

8.7	余能原理和力法	394
8.8	余能驻值原理应用举例一——矩形筒体结构受水平荷载作用时的计算	400
8.9	余能驻值原理应用举例二——框筒结构在扭转荷载下的计算	411
	习题	415
第9章	薄壁杆件分析的有限元法	417
9.1	概述	417
9.2	形函数	417
9.3	薄壁杆单元分析	421
9.4	整体分析及计算示例	427
9.5	按广义坐标法原理进行薄壁杆单元分析	432
9.6	广义坐标法计算示例	437
9.7	薄壁杆稳定问题的弯扭总势能	443
9.8	薄壁杆稳定问题的单元分析	447
9.9	稳定问题的整体分析及计算示例	450
	习题	454
第10章	高层建筑筒体结构的计算	455
10.1	筒中筒结构在水平荷载下的连续体—微分方程法	455
10.2	筒中筒结构的连续体—力法计算	467
10.3	多边形筒体结构的余能驻值原理计算法	482
10.4	多孔束筒结构的余能驻值原理计算	496
10.5	筒体结构的自由振动计算	505
10.6	高层筒体结构的整体稳定和二阶分析	516
第11章	薄壁连续曲梁的计算	528
11.1	基本概念	528
11.2	曲线连续梁的纯扭转分析	529
11.3	曲线连续梁的翘曲扭转分析	531
11.4	独柱点支承的连续曲梁纯扭转分析	534
11.5	用能量法分析连续曲线梁的纯扭转问题	539
11.6	连续薄壁曲梁的有限杆元法	546
11.7	空间曲梁的纯扭转有限元分析	557
第12章	薄壁杆件结构半解析常微分方程求解器方法	568
12.1	概述	568
12.2	阶形变截面筒和筒中筒结构的静力计算——半解析能量法	569
12.3	阶形变截面筒体结构的静力计算——有限元线法	575
12.4	阶形变截面筒和筒中筒结构的自由振动计算——半解析能量法	580
12.5	阶形变截面筒体结构的自由振动计算——有限元线法	585
12.6	高层建筑筒体结构的整体稳定和二阶分析	590
12.7	Winkler 弹性地基上高层筒体结构的计算	596
12.8	半无限弹性地基上高层筒体结构的静力计算	598
12.9	半无限弹性地基上高层筒体结构的自由振动计算	610
12.10	半无限弹性地基上高层筒体结构对确定性动力作用的稳态反应	618
12.11	筒体结构连续化模型的弹性动力时程分析	628
12.12	大型箱形截面桥跨结构的影响场	633
	参考文献	643

第 1 章 薄壁杆件的弯曲和自由扭转

1.1 概 述

薄壁杆件一般是指截面厚度较薄的等截面直杆，其三个尺度 δ 、 b 和 l (图 1-1) 通常满足下列关系：

$$\left. \begin{array}{l} \delta/b \leq 0.1 \\ b/l \leq 0.1 \sim 0.2 \end{array} \right\} \quad (1-1)$$

式中 $\delta(s)$ ——壁厚，只是截面轮廓曲线 s 的函数；

b ——截面的最大宽度或高度；

l ——杆长。

薄壁截面视其轮廓线是否封闭而分为开口薄壁截面与闭口截面两大类 (图 1-2a、b)。

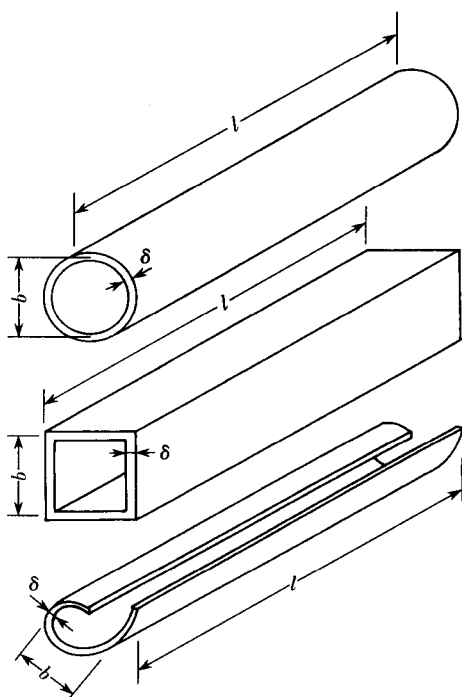


图 1-1

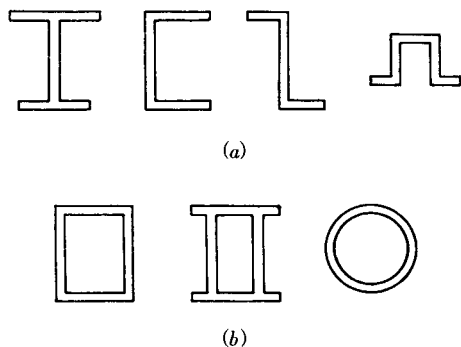


图 1-2

(a) 开口薄壁截面；(b) 闭口薄壁截面

薄壁杆件在实际工程中应用很广，如桥梁工程和海洋工程中的箱形、工字形和槽形梁（柱），土木工程中的各种型钢，高层建筑中的钢筋混凝土核心墙，以及航空工业中的机翼构件和造船工业中的船体构件等。

薄壁杆件计算理论是在 20 世纪 40 年代以后逐步发展起来的一个力学分支。

符拉索夫的薄壁杆件理论，已被世界各国普遍接受。它抓住了薄壁杆件受力变形的特点，采用了一些基本假定，从而合理地简化了计算，建立了满足工程需要的实用理论体系，并为更深入的研究奠定了基础。本书将系统地介绍这一理论，并尽可能地反映近年来的一些研究成果。

1.2 薄壁杆件的弯曲

1.2.1 弯曲正应力

薄壁杆件的弯曲一般是非对称弯曲问题，即没有对称平面的梁的弯曲问题。实体杆的弯曲计算是建立在平面假定的基础上的，对于薄壁杆件的弯曲问题仍采用这一假定来计算。

图 1-3 为一具有任意横截面的薄壁杆件， o 为形心， $o-xyz$ 为过形心的一组任意直角坐标。设沿 ox 、 oy 轴分别有弯矩 M_x 、 M_y 作用，以双箭矢量表示。弯矩以符合右手螺旋法则为正。设中性轴为 oo' ，截面上任意点 A 处微面积 dF 的坐标是 x 、 y ，它到中性轴的距离为 ξ ，则

$$\xi = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

根据平面假定， A 点处的正应变为

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\rho} \xi$$

式中 ρ ——中性层的曲率半径；

α ——中性轴与 x 轴的夹角。

因而正应力为

$$\sigma_z = E \frac{\xi}{\rho}$$

因为沿 z 轴方向无外力作用，故

$$\int_F \sigma_z dF = 0$$

即

$$\int_F \xi dF = 0 \quad (d)$$

将式 (a) 代入式 (c)，得

$$\sigma_z = \frac{Ey}{\rho} \cos \alpha - \frac{Ex}{\rho} \sin \alpha \quad (e)$$

由绕 x 、 y 轴的力矩平衡方程得

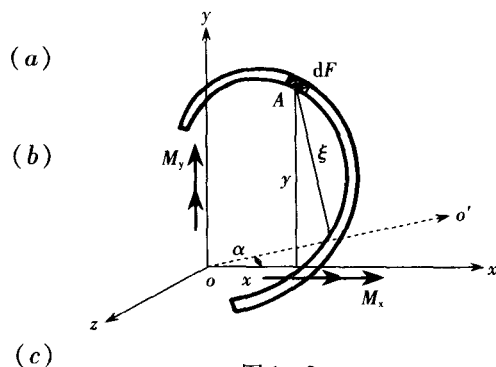


图 1-3

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_F \sigma_z y dF = \int_F \frac{E y^2}{\rho} \cos \alpha dF - \int_F \frac{E x y}{\rho} \sin \alpha dF \\ &= \frac{E \cos \alpha}{\rho} I_x - \frac{E \sin \alpha}{\rho} I_{xy} \\ M_y &= - \int_F \sigma_z x dF = \frac{E \sin \alpha}{\rho} I_y - \frac{E \cos \alpha}{\rho} I_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

式中 I_x 、 I_y 为关于两个形心轴的惯性矩， I_{xy} 为惯性积。

由上两式解出 $\frac{E \sin \alpha}{\rho}$ 与 $\frac{E \cos \alpha}{\rho}$ ，代入式 (e)，得

$$\sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{I_x} y - \frac{\bar{M}_y}{I_y} x \quad (1-2)$$

式中 $\bar{M}_x$ 、 $\bar{M}_y$ 称为“有效弯矩”，它们分别为

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_x &= \frac{M_x + M_y I_{xy} / I_y}{1 - I_{xy}^2 / (I_x I_y)} \\ \bar{M}_y &= \frac{M_y + M_x I_{xy} / I_x}{1 - I_{xy}^2 / (I_x I_y)} \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

式 (1-2) 和式 (1-3) 就是薄壁杆件的弯曲正应力公式。当已知 M_x 、 M_y 时，由此可以求得杆中弯曲正应力。

当 x 、 y 轴为主轴时， $I_{xy} = 0$ ，则

$$\begin{aligned} \bar{M}_x &= M_x \\ \bar{M}_y &= M_y \end{aligned}$$

此时，式 (1-2) 可以写为通常的形式

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \quad (1-4)$$

应当指出，在上述推导中，只利用了几何条件式 (b)、物理条件式 (c) 和平衡条件式 (f)，而与杆件截面的几何形状和尺寸无关。所以以上的结果适用于任意截面，包括开口截面与闭口截面的薄壁杆件。

【例 1-1】求图 1-4 所示 Z 形截面薄壁杆件在弯矩 M_x 作用下的正应力分布。

【解】

(1) 截面几何特征

此截面为反对称的，其形心在腹板中点 O 。

$$I_x = 2 \times \frac{h\delta}{2} \times \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{\delta h^3}{12} = \frac{1}{3} \delta h^3$$

$$I_y = 2 \times \frac{\delta}{3} \times \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} \delta h^3$$

$$I_{xy} = \frac{\delta h}{2} \times \left(-\frac{h}{4}\right) \times \left(\frac{h}{2}\right) + \frac{\delta h}{2} \times \frac{h}{4} \times \left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{1}{8} \delta h^3$$

(2) 应力计算

$$\sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{I_x} y - \frac{\bar{M}_y}{I_y} x$$

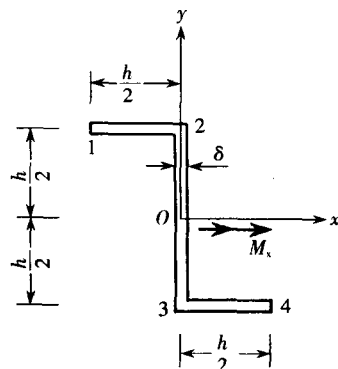


图 1-4

其中

$$\bar{M}_x = \frac{M_x}{1 - I_{xy}^2 / (I_x I_y)} = 2.29 M_x$$

$$\bar{M}_y = \frac{M_x I_{xy} / I_x}{1 - I_{xy}^2 / (I_x I_y)} = -0.86 M_x$$

所以

$$\sigma_z = \frac{M_x}{\delta h^3} (6.87y + 10.32x)$$

在上翼缘板上: $y = \frac{h}{2}$, $-\frac{h}{2} \leq x \leq 0$ 。

$$\sigma_z = \frac{M_x}{\delta h^3} \times (3.43h + 10.32x) \quad (\text{直线变化})$$

$$(\sigma_z)_1 = \frac{1.73M_x}{\delta h^2}, \quad (\sigma_z)_2 = \frac{3.43M_x}{\delta h^2}$$

在腹板上: $x = 0$, $-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{\delta h^3} \times 6.87y \quad (\text{直线变化})$$

$$(\sigma_z)_2 = \frac{3.43M_x}{\delta h^2}, \quad (\sigma_z)_3 = -\frac{3.43M_x}{\delta h^2}$$

在下翼缘板上: $y = -\frac{h}{2}$, $0 \leq x \leq \frac{h}{2}$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{\delta h^3} \times (-3.43h + 10.32x) \quad (\text{直线变化})$$

$$(\sigma_z)_3 = -\frac{3.43M_x}{\delta h^2}, \quad (\sigma_z)_4 = \frac{1.73M_x}{\delta h^2}$$

下翼缘板的正应力也可利用反对称性得到。正应力分布图如图 1-5。

(3) 讨论

如略去斜弯曲的影响, 正应力为

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$(\sigma_z)_2 = \frac{M_x}{\frac{1}{3}\delta h^3} \times \frac{h}{2} = \frac{1.5M_x}{\delta h^2}$$

仅为正确结果的 42.7%。可见非对称截面的薄壁杆件不能忽略斜弯曲的影响。

1.2.2 开口截面薄壁杆件中的剪应力

现在讨论在过截面剪切中心的横向力作用下薄壁杆件的弯曲问题。

通常, 横向荷载使薄壁杆件既发生弯曲, 又产生扭转, 只有当它们的合力通过杆件横截面上某一特定点 O_1 时, 杆件才没有扭转而只发生弯曲。这一特定点称为截面的剪切中

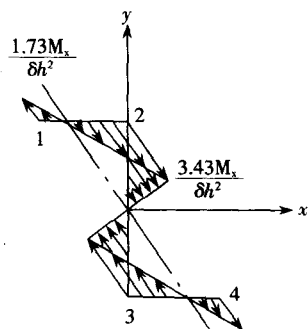


图 1-5

心或弯曲中心。确定截面剪切中心的位置是大家所关心的，也是薄壁杆件理论的重要内容。这将在第二章详细讨论。

在过剪切中心 O_1 的横向力作用下，杆件任意截面处将产生弯矩 M 和剪力 Q 。截面上的正应力将由弯矩 M 来确定 [见式 (1-2) 和式 (1-3)]。下面讨论剪应力的计算。

图 1-6 表示一薄壁杆件（开口或闭口）微段 dz ， s 为截面轮廓线的曲线坐标，以逆时针方向为正， A 点为曲线坐标 s 的起始点。假定壁厚 $\delta(s)$ 与坐标 z 无关，只是曲线坐标 s 的函数。

首先，建立该微段的平衡方程，求截面上的剪力与弯矩的关系。图 1-6 标出了 dz 段上所受的各种内力，图中所示均为正方向。

$$\left. \begin{array}{l} \text{由} \quad \Sigma M_x = 0, Q_y = \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial z} \\ \text{由} \quad \Sigma M_y = 0, Q_x = -\frac{\partial \bar{M}_y}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (1-5)$$

由式 (1-3) 和式 (1-5) 可知，“有效剪力”与“有效弯矩”和剪力的关系为

$$\left. \begin{array}{l} \bar{Q}_y = \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial z} = \frac{Q_y - Q_x I_{xy}/I_y}{1 - I_{xy}^2/(I_x I_y)} \\ \bar{Q}_x = -\frac{\partial \bar{M}_y}{\partial z} = \frac{Q_x - Q_y I_{xy}/I_x}{1 - I_{xy}^2/(I_x I_y)} \end{array} \right\} \quad (1-6)$$

其次，讨论杆件中的剪应力。在杆件上任一点 $P(z, s)$ 处取一单元 $ds \times dz$ (图 1-7)，考虑它的平衡来建立平衡微分方程式。

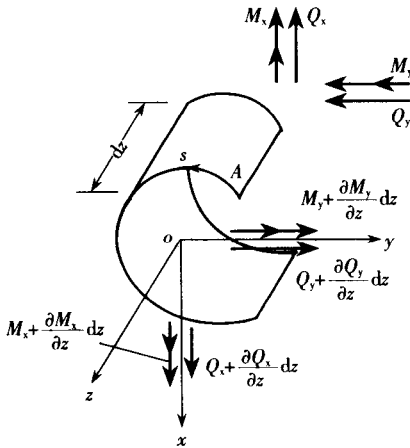


图 1-6

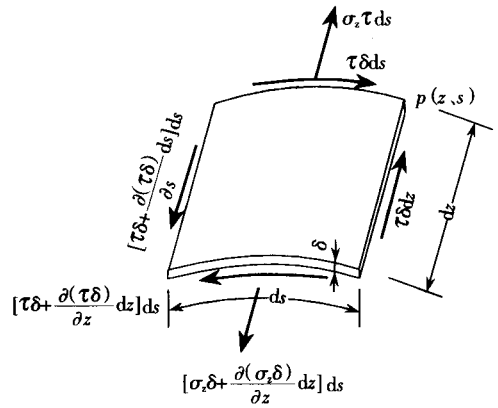


图 1-7

$$\Sigma z = 0, \frac{\partial(\sigma_z \delta)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau \delta)}{\partial s} = 0 \quad (g)$$

由于 $\delta = \delta(s)$ ，与 z 无关，故上式可写成

$$\delta \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial (\tau \delta)}{\partial s} = 0 \quad (1-7)$$

由此可解得

$$\tau \delta = - \int_0^s \delta \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} ds + C_1(z) \quad (h)$$

上式中的任意积分函数 $C_1(z)$ 为截面曲线坐标起始点 A 处的剪力流 $(\tau \delta)_A$ 。这里采用了一个假定，即由于壁厚很小，弯曲剪应力沿壁厚均匀分布并沿轮廓线的切线方向作用，构成剪力流。下面为了简便，直接计算剪力流，记作 $q = \tau \delta$ 。

由式 (1-2)，有

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial z} \cdot \frac{y}{I_x} - \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial z} \cdot \frac{x}{I_y}$$

将上式代入式 (h)，并注意到式 (1-6) 的关系，得

$$q = \tau \delta = - \frac{\bar{Q}_y}{I_x} \int_0^s \delta y ds - \frac{\bar{Q}_x}{I_y} \int_0^s \delta x ds + (\tau \delta)_A \quad (1-8)$$

由于

$$\delta ds = dF$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^s \delta y ds &= \int_0^s y dF = S_x \\ \int_0^s \delta x ds &= \int_0^s x dF = S_y \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

其中 S_x 、 S_y 分别为截面上 s 点关于 x 轴与 y 轴的静面矩。由式 (1-8) 可求得截面上的剪力流为

$$q = \tau \delta = - \left(\frac{\bar{Q}_y}{I_x} S_x + \frac{\bar{Q}_x}{I_y} S_y \right) + (\tau \delta)_A \quad (1-10)$$

当 x 、 y 轴为截面主轴时， $I_{xy} = 0$ ，式 (1-10) 简化为

$$q = \tau \delta = - \left(\frac{Q_y}{I_x} S_x + \frac{Q_x}{I_y} S_y \right) + (\tau \delta)_A \quad (1-11)$$

对于开口截面，可把参考点 A 选在开口处，由剪应力互等定理知 $\tau_A = 0$ ，从而消除了 $(\tau \delta)_A$ 一项。

【例 1-2】图 1-4 所示的 Z 形截面薄壁杆件，在腹板平面内受横向剪力 Q_y ，如图 1-8 (a) 所示。求剪力流的分布图。

【解】

由于截面是反对称的，坐标原点 O 即为剪切中心， Q_y 通过剪切中心，故截面不发生扭转。

有效剪力为

$$\begin{aligned} \bar{Q}_x &= - \frac{Q_y I_{xy} / I_x}{1 - I_{xy}^2 / (I_x I_y)} = 0.86 Q_y \\ \bar{Q}_y &= \frac{Q_y}{1 - I_{xy}^2 / (I_x I_y)} = 2.29 Q_y \end{aligned}$$

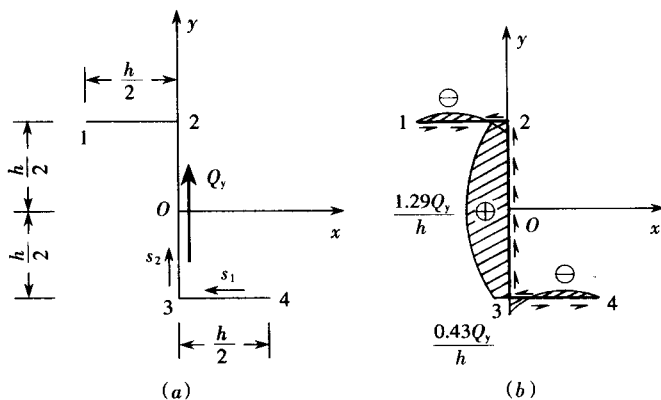


图 1-8

由式 (1-8) 得

$$q(s) = -\frac{Q_y}{h^3} \int_0^s (6.87y + 10.32x) ds$$

在下翼缘板上: $y = -\frac{h}{2}$, $x = \frac{h}{2} - s_1$ 。因此

$$\begin{aligned} q(s_1) &= \frac{Q_y}{h^3} \int_0^{s_1} (10.32s_1 - 1.73h) ds_1 \\ &= \frac{Q_y}{h^3} \times (5.16s_1^2 - 1.73hs_1), \quad (\text{抛物线分布}) \end{aligned}$$

在点 4, $s_1 = 0$, $(q)_4 = 0$;

在点 3, $s_1 = \frac{h}{2}$, $(q)_3 = 0.43 \frac{Q_y}{h}$ 。

再看点 3、4 之间剪力流有无零点。由 $q(s_1) = 0$, 可解得 $s_1 = 0.334h$, 说明在该点的剪力流为零, 剪力流经过此点时改变符号。既然 $(q)_3 = q(s_1 = \frac{h}{2})$ 为正, 则当 $s_1 < 0.334h$ 时 $q(s_1)$ 必为负, 这时 $q(s_1)$ 的方向与 s_1 的方向相反。

在腹板上: $x = 0$, $y = -\frac{h}{2} + s_2$,

$$\begin{aligned} q(s_2) &= -\frac{Q_y}{h^3} \int_0^{s_2} (6.87s_2 - 3.43h) ds_2 + (q)_3 \\ &= -\frac{Q_y}{h^3} \times (3.43s_2^2 - 3.43hs_2 - 0.43h^2) \end{aligned}$$

也是抛物线分布。

当 $s_2 = 0$ 时, $(q)_3 = 0.43Q_y/h$

当 $s_2 = \frac{h}{2}$ 时, $(q)_0 = 1.29Q_y/h$

另一半的剪力流, 可按反对称关系得到。整个剪力流分布如图 1-8 (b) 所示。

【例 1-3】求图 1-9 (a) 所示工字形截面在 Q_y 作用下截面中的剪力流分布。

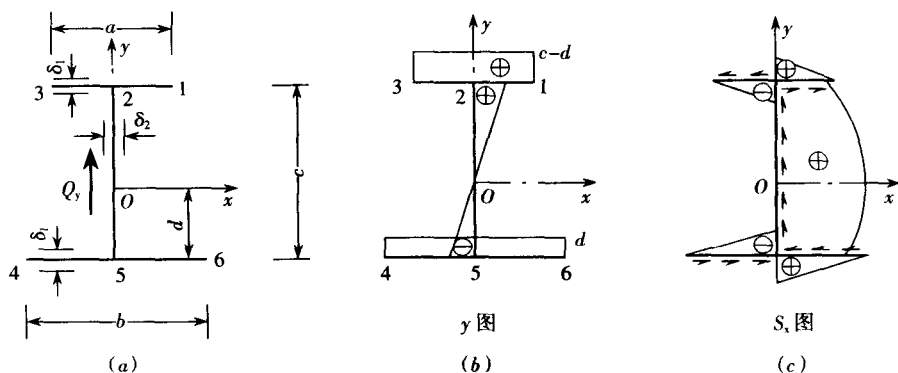


图 1-9

【解】

本题中由于 $Q_x = 0$ ，把 s 的起算点选在开口处，由式 (1-11) 得

$$q = -\frac{Q_y}{I_x} S_x(s)$$

可见，欲求 q 的分布，只要求得 $S_x(s)$ 图，然后再乘以 $(-Q_y/I_x)$ 即可。

对于壁厚分段相等、截面轮廓线由直线组成的杆件，在计算 $S_x(s)$ 时可不必进行复杂的积分运算。由于

$$S_x(s) = \int_0^s y dF = \int_0^s y \delta ds = \sum_i \delta_i \int_0^{s_i} y ds_i$$

$y ds$ 是 y 图在 ds 上的微面积，显然 $S_x(s)$ 即为从 s 的起算点 $s=0$ ，到指定点 s 段内 y 图的面积乘以各自壁厚的代数和。

现用这一方法求解此例。

先求主轴位置。由于 y 轴为对称轴，所以为一主轴。设主轴 ox 到下翼缘的距离为 d 。作出 y 图示于图 1-9 (b)。主轴要求 $S_x = \int_F y dF = 0$ ，即 y 图上各段面积与相应壁厚乘积的代数和为零。

$$a(c-d)\delta_1 + \frac{1}{2}(c-d)^2\delta_2 - \frac{1}{2}d^2\delta_2 - bd\delta_1 = 0$$

由此解得

$$d = \frac{c}{2} \cdot \frac{2a\delta_1 + c\delta_2}{(a+b)\delta_1 + c\delta_2}$$

由于 s 的起算点取在开口处，虽然开口处 1、3、4、6 点的 y 值不为零，但因 $s=0$ ，故

$$S_x(1) = S_x(3) = S_x(4) = S_x(6) = 0$$

现在来看 $S_x(2_{右})$ 。如前所述， $S_x(2_{右})$ 应为从 S 的起算点到 $2_{右}$ 截面 y 图面积与壁厚乘积的代数和。这里从 1 点起算最简便。前面规定， s 以绕剪切中心逆时针方向为正。 s 由

1 点到达 2 点为逆时针运行, 所以 $s(2_{\text{右}}) = \frac{a}{2}$ (为正), 在此段内 y 是一常数, 于是

$$S_x(2_{\text{右}}) = (c-d) \frac{a}{2} \delta_1$$

对于 $S_x(2_{\text{左}})$, 从 3 点起算最简便, s 由 3 点运动到 2 点, 为顺时针方向, 即为负, $s(2_{\text{左}}) = -\frac{a}{2}$,

$$S_x(2_{\text{左}}) = (c-d) \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \delta_1 = -(c-d) \frac{a}{2} \delta_1$$

当然, $S_x(2_{\text{左}})$ 也可由除 23 段以外的部分求得。

再看 $S_x(2_{\text{下}})$, $S_x(2_{\text{下}})$ 应为截面 2_下 以上或以下所有 y 图面积与壁厚乘积的代数和, 以计算上部为简便, s 从 1 点开始到达 3 点, 逆时针, 为正, 即 $s(2_{\text{下}}) = a$, 则

$$S_x(2_{\text{下}}) = (c-d) a \delta_1$$

同理

$$\begin{aligned} S_x(0) &= S_x(2_{\text{下}}) + \frac{1}{2} (c-d)^2 \delta_2 \\ &= (c-d) \delta_1 a + \frac{1}{2} (c-d)^2 \delta_2 \quad (\text{最大值}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x(5_{\text{上}}) &= S_x(7) + \frac{1}{2} \cdot (-d) \cdot d \delta_2 \\ &= (c-d) a \delta_1 + \frac{1}{2} (c-d)^2 \delta_2 - \frac{1}{2} d^2 \delta_2 \end{aligned}$$

$$S_x(5_{\text{右}}) = (-d) \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) \delta_1 = \frac{1}{2} b d \delta_1$$

$$S_x(5_{\text{左}}) = (-d) \cdot \frac{b}{2} \delta_1 = -\frac{1}{2} b d \delta_1$$

当然, $S_x(5_{\text{上}})$ 也可由 5_上 截面以下部分求得。此时 s 由 b 点出发, 顺时针方向到达 4 点, 为负, 即 $s(5_{\text{上}}) = -b$, 所以

$$S_x(5_{\text{上}}) = (-d) \cdot (-b) \delta_2 = b d \delta_2$$

这与前面求得的 $S_x(5_{\text{上}})$ 形式上不一样, 但若把 d 值代入后, 可以验证, 结果是一样的。

由于 $S'_x(s) = \frac{dS_x}{ds} = y(s)$, 即二者之间有简单的微分关系, 可由此作出 $S_x(s)$ 图来。在翼板上由于 y 图为水平直线 (常数), 所以 S_x 图为斜直线 (一次函数), 即只要在所求得各控制点之间连一直线即可。在腹板上 y 图为一斜直线, 故 $S_x(s)$ 图应为二次曲线; 由于 $y(0) = 0$, $S_x(s)$ 图在此点斜率为零, S_x 达到极值。 S_x 图示于图 1-9 (c)。

由于剪力流 q 与 S_x 之间差一负倍数, 求得 S_x 图后不仅可以知道截面上各点剪力流的大小, 还可以知道它的方向; 即凡 S_x 为正的地方, 剪力流均为负 (顺时针方向), 反之则为正 (逆时针方向)。剪力流的方向标于图 1-9 (c)。

在图 1-9 (a) 中, 当 $a=b$ 时, $d = \frac{c}{2}$