

根 据 教 育 部 最 新 教 学 大 纲 编 写

GAOZHONG SHUXUE
ERNIANJI KAOSHI
JIAOCHENG



数 学

高中二年级考试教程

总 策 划
主 编 写
编 写

胡 东 华
温 玉 蕴
高 考 命 题 研 究 组



科学技术文献出版社

高中二年级考试教程

数 学

编 写 高考命题研究组

主 编 温玉蕴

副主编 张平平

编 委 猴小锋 张平平 温玉蕴

总策划 胡东华

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

前 言

本书是《考试教程》丛书中的一册,可供高中二年级学生学习数学的升学指导。本书的主要宗旨是使学生在高中学习数学课本的基本知识的基础上,进行再提高,以适应参加高考的需要,与参加高考接轨,增强对高考的适应性。

1. 在内容编排上与课本同步,可以与所学章、节并用,或做高考辅导之用。

2. 本书的结构分代数、平面解析几何、分别按课本的章、节依次编排,最后附本书的综合检测题。对每一章又分:本章高考考试内容;本章重点内容;本章知识网络图;高考试题精选及分析(为避免在本丛书可能出现的重复,这一部分题择自1987、1989、1991、1993、1995、1997、1998、1999等年的高考试题);高考模拟训练及详解。对每一节又分高考要求及理解、记忆方法;常考题型举例及方法;常见错误类型及对策。学习效果评估(并附有答案和提示及评分)。

3. 本书博采众长,汲取了同类书籍的优点并加以提炼,以争取达到使准备介入高考的学习者,通过演练、提高、再提高,增加入选的把握。限于作者的水平和编写时间的仓促,难以完美的达到这一理想境界。但是本书并不失为一本有益的高考参考资料。读者凡见有其中谬误,请不吝批评指正。

在此顺向引用其结果的各位贤达表示衷心地谢意。

编者

1999.8

目 录

第一部分 代数

第五章	不等式	(2)
一	本章高考考试内容	(2)
二	本章重点内容	(2)
5.1	不等式	(3)
5.2	不等式的性质	(3)
5.3	不等式的证明	(13)
5.4	不等式的解法	(25)
5.5	含有绝对值的不等式	(37)
三	本章知识网络图	(45)
四	高考试题精选及分析	(46)
五	高考模拟训练及详解	(50)
第六章	数列、极限、数学归纳法	(57)
一	本章高考考试内容	(57)
二	本章重点内容	(58)
6.1	数列	(59)
6.2	等差数列	(68)
6.3	等比数列	(78)
6.4	数列的极限	(90)
6.5	数列极限的运算法则	(96)
6.6	数学归纳法	(109)
6.7	数学归纳法应用举例	(109)
三	本章知识网络图	(121)
四	高考试题精选及分析	(122)
五	高考模拟训练及详解	(128)
第七章	复数	(138)
一	本章高考考试内容	(138)

二	本章重点内容	(139)
7.1	数的概念的发展	(140)
7.2	复数的有关概念	(140)
7.3	复数的向量表示	(145)
7.4	复数的加法与减法	(150)
7.5	复数的乘法与除法	(158)
7.6	复数的三角形式	(166)
7.7	复数的三角形式的运算	(173)
三	本章知识网络图	(184)
四	高考试题精选及分析	(185)
五	高考模拟训练及详解	(195)
第八章	排列、组合、二项式定理	(201)
一	本章高考考试内容	(201)
二	本章重点内容	(202)
8.1	基本原理	(203)
8.2	排列	(209)
8.3	排列数公式	(209)
8.4	组合	(216)
8.5	组合数公式	(216)
8.6	组合数的两个性质	(216)
8.7	二项式定理	(224)
8.8	二项式系数的性质	(232)
三	本章知识网络图	(239)
四	高考试题精选及分析	(240)
五	高考模拟训练及详解	(248)

第二部分 平面解析几何

第一章	直线	(255)
一	本章高考考试内容	(255)
二	本章重点内容	(256)
(一)	有向线段、定比分点	(257)
1.1	有向线段、两点的距离	(257)

1.2	线段的定比分点	(263)
(二)	直线方程	(270)
1.3	一次函数的图象与直线方程	(270)
1.4	直线的倾斜角和斜率	(270)
1.5	直线方程的几种形式	(278)
1.6	直线方程的一般形式	(286)
(三)	两条直线的位置关系	(293)
1.7	两条直线的平行与垂直	(293)
1.8	两条直线所成的角	(302)
1.9	两条直线的交点	(310)
1.10	点到直线的距离	(319)
三	本章知识网络图	(328)
四	高考试题精选及分析	(329)
五	高考模拟训练及详解	(334)
第二章	圆锥曲线	(337)
一	本章高考考试内容	(337)
二	本章重点内容	(339)
(一)	曲线和方程	(340)
2.1	曲线和方程	(340)
2.2	求曲线的方程	(340)
2.3	充要条件	(347)
2.4	曲线的交点	(353)
(二)	圆	(360)
2.5	圆的标准方程	(360)
2.6	圆的一般方程	(370)
(三)	椭圆	(379)
2.7	椭圆及其标准方程	(379)
2.8	椭圆的几何性质	(388)
(四)	双曲线	(398)
2.9	双曲线及其标准方程	(398)
2.10	双曲线的几何性质	(406)
(五)	抛物线	(415)
2.11	抛物线及其标准方程	(415)
2.12	抛物线的几何性质	(415)
(六)	坐标变换	(424)

2.13	坐标轴的平移	(424)
2.14	利用坐标轴平移化简二元二次方程	(424)
三	本章知识网络图	(432)
四	高考试题精选及分析	(433)
五	高考模拟训练及详解	(444)
第三章	参数方程、极坐标	(447)
一	本章高考考试内容	(447)
二	本章重点内容	(447)
(一)	参数方程	(448)
3.1	曲线的参数方程	(448)
3.2	参数方程和普通方程的互化	(456)
(二)	极坐标系	(463)
3.3	极坐标系	(463)
3.4	曲线的极坐标方程	(463)
3.5	极坐标与直角坐标的互化	(469)
三	本章知识网络图	(474)
四	高考试题精选及分析	(475)
五	高考模拟训练及详解	(477)

第三部分 综合测试题

综合测试一	(482)
参考答案	(484)
综合测试二	(485)
参考答案	(487)
综合测试三	(488)
参考答案	(490)
综合测试四	(492)
参考答案	(494)
综合测试五	(495)
参考答案	(498)

第 一 部 分

代 数

第五章 不等式

一 本章高考考试内容

高 考 考 试 内 容			考试层次要求			
单元	高考知识点	包含知识概目	理解	掌握	灵活	应用
不 等 式	5.1 不等式	1. 实数的大小顺序和运算的关系, 符号法则				✓
		2. 实数的符号法则在代数式比较上的运用				✓
	5.2 不等式的性质	1. 不等式的基本性质(定理1—5)				✓
		2. 不等式的基本定理的推论				✓
	5.3 不等式的证明	1. 常用的证明不等式的方法。(应用不等式的基本性质证明, 比较法、综合法、分析法、数学归纳法, 等)				✓
		2. 利用正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理, 求非二次函数的最值。				✓
	5.4 不等式的解法	1. 同解不等式和不等式的同解变形		✓		
		2. 不等式、不等式组的解集, 及在数轴上表示方法		✓		
		3. 一元二次不等式的解法				✓
		4. 各类不等式的解法(分式不等式, 无理不等式, 指数, 对数不等式)				✓
	5.5 含有绝对值的不等式	1. 含有绝对值的不等式的性质				✓
		2. 含有绝对值不等式的解法				✓

二 本章重点内容

本章的重点内容是不等式的证明和不等式的解法。

5.1 不等式

5.2 不等式的性质

高考要求及理解记忆方法

高考知识点	不等式及其性质
高考考试内容	理解记忆方法
1. 实数的大小顺序及运算关系, 符号法则。 2. 实数的符号法则运算关系在代数式比较上的应用。 3. 不等式的基本性质与推论(五个性质定理及三个推论)及其应用。	1. 实数的运算性质, 大小顺序, 是不等式的证明和解不等式的主要依据, 应予熟练掌握。进行代数式的比较时, 也要用到这些知识。 2. 对于不等式的性质, 象不等式的传递性、对称性、移项法则, 都是容易掌握的, 对于不等式运算常常出现的错误(移项法则也属运算), 主要是在不等式的两边乘以负实数, 不等号要改变方向, 容易忽视; 不等式两边乘方, 开方指数必须是2以上的正整数(也可以推广到正有理数), 也容易忽视, 都容易造成解答错误。这是应该细心对待的。 3. 关于符号“$\Leftrightarrow$”(等价)“$\Rightarrow$”(推出)的区别, 要分清楚, 在使用时是很严格的: 若 A 则 B, 若 B 则 A, 才能使用等价符号; 一般若 A 则 B 只能用推出符号, 这在不等式的证明当中常用。一般用常规描述法, 不易出现差错。 不等式若用上述两个符号表示时, 只有对称性可以用等价符号, 即若 $a > b$, 则 $b < a$, 即 $a > b \Leftrightarrow b < a$。其他的都是用推出符号。

常考题型举例及方法

【例1】 已知 $|a| > |b|$ ($b \neq 0$), 试比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小.

解: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$. 又 $|a| > |b|$ ($b \neq 0$).

①在 a, b 同号时, 若有 $a > b > 0$, 则 $ab > 0, b-a < 0, \frac{b-a}{ab} < 0, \therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

若有 $a < b < 0$, 则 $ab > 0, b-a > 0, \frac{b-a}{ab} > 0$,

$$\therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{b};$$

②在 a, b 异号时, 若有 $a > 0, b < 0$, 则 $b-a < 0, ab < 0$, 而 $\frac{b-a}{ab} > 0$,

$$\therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{b};$$

若有 $a < 0, b > 0$, 则 $b-a > 0, ab < 0, \frac{b-a}{ab} < 0, \therefore \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

【说明】 由于本题的已知条件给出的是 $|a| > |b|$, 使问题大大复杂化了, 所以对所能出现的四种情况都应给以讨论. 不能有所偏废. 对于这种情况, 一般容易忽视某一方面, 因而造成解答错误, 请读者(考生)予以注意.

【例2】 已知 m 为实数, 试比较代数式.

$\frac{3}{2m^2+1}$ 和 $\frac{1}{m^2-m+2}$ 的大小

解: $\because m$ 为实数 $\therefore 2m^2+1 > 0$

$$m^2-m+2 = (m-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0$$

$$\therefore \frac{3}{2m^2+1} - \frac{1}{m^2-m+2} = \frac{3m^2-3m+6-2m^2-1}{(2m^2+1)(m^2-m+2)}$$

$$= \frac{m^2-3m+5}{(2m^2+1)(m^2-m+2)} = \frac{(m-\frac{3}{2})^2 + \frac{11}{4}}{(2m^2+1)(m^2-m+2)} > 0$$

$$\therefore \frac{3}{2m^2+1} > \frac{1}{m^2-m+2}$$

【例3】 设 $a > 0, b > 0, c > 0$, 试比较下列二个运算结果.

$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$ 和 $(a^2+b^2+c^2)^2$ 的大小.

解: $\because (a+b+c)(a^3+b^3+c^3) - (a^2+b^2+c^2)^2 = ab^3+ac^3+a^3b+bc^3+$

$$a^3c + b^3c - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$$

$$= ab(a^2 - 2ab + b^2) + bc(b^2 - 2bc + c^2) + ac(c^2 - 2ca + a^2)$$

$$= ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ac(c-a)^2$$

$$\text{又} \because a > 0, b > 0, c > 0,$$

$$\therefore ab > 0, bc > 0, ac > 0, (a-b)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0.$$

$$\therefore ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ac(c-a)^2 \geq 0.$$

$$\therefore (a+b+c)(a^3+b^3+c^3) \geq (a^2+b^2+c^2)^2.$$

【说明】 比较两个实数或代数式的大小，一般都是用比较法，不易选用综合法。比较法就是确定两个比较对象的差的符号。有些问题比较明显，如例1，有些问题需要进行变形以后才能确定，如例2，例3。在例1中，还要注意，同号的两数（代数式）的顺序关系与其倒数的顺序关系相反；在例2，例3中进行变形时，要注意等效性。

【例4】 试确定 $\lg 9 \times \lg 11$ 的取值范围。

解 $\because 0 < \lg 9 < 1$ ，而 $\lg 11 > 1$ ，

但 $\lg 9 \neq \lg 11 \therefore$ 不能通过观察得出结论。

$$\therefore \lg 9 \times \lg 11 < \left(\frac{\lg 9 + \lg 11}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lg 99}{2}\right)^2 < \left(\frac{\lg 100}{2}\right)^2 = 1$$

$$\text{又 } \lg 9 \times \lg 11 > 0, \therefore 0 < \lg 9 \times \lg 11 < 1.$$

【例5】 已知 $f(x) = px^2 - q$ ，且 $-4 \leq f(1) \leq -1$ ，

$-1 \leq f(2) \leq 5$ ，求 $f(3)$ 的取值范围。

$$f(3) = 9p - q$$

$$\text{解 } \therefore \begin{cases} p - q = f(1) \\ 4p - q = f(2) \end{cases} \therefore \begin{cases} p = \frac{1}{3}[f(2) - f(1)] \\ q = -\frac{4}{3}f(1) + \frac{1}{3}f(2) \end{cases}$$

$$\therefore f(3) = 9p - q = \frac{8}{3}f(2) - \frac{5}{3}f(1).$$

$$\therefore -4 \leq f(1) \leq -1, -1 \leq f(2) \leq 5,$$

$$\therefore \frac{5}{3} \leq \left(-\frac{5}{3}\right)f(1) \leq \frac{20}{3}, \quad -\frac{8}{3} \leq \frac{8}{3}f(2) \leq \frac{40}{3}$$

$$\therefore -1 \leq \frac{8}{3}f(2) - \frac{5}{3}f(1) \leq 20$$

$$\therefore f(3) \text{ 的取值范围是 } [-1, 20].$$

【例6】 如果 $a, b \in \mathbb{R}^+$ ，且 $a \neq b$ ，比较 $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$ 与 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的大小。

$$\begin{aligned}\text{解 } \because \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) &= \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} - \sqrt{b} \\ &= \frac{a-b}{\sqrt{b}} + \frac{b-a}{\sqrt{a}} = \frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}, \quad \because a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ 且 } a \neq b.\end{aligned}$$

$$\therefore |a-b| > 0, |\sqrt{a}-\sqrt{b}| > 0, \quad (a-b) \text{ 与 } (\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

$$\text{同号, } \therefore (a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b}) > 0, \quad \because \sqrt{ab} > 0, \quad \therefore \frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}} > 0$$

$$\therefore \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) > 0$$

$$\therefore \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} > \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

【例7】已知 x, y 同为非负数, 且满足 $\lg(x^2+1) + \lg(y^2+4) = \lg 8 + \lg x + \lg y$, 求 x, y 的值。

解 原方程变形为 $[\lg(x^2+1) - \lg 2x] + [\lg(y^2+4) - \lg 4y] = 0$, 从而得 $\lg \frac{x^2+1}{2x} + \lg \frac{y^2+4}{4y} = 0$

$$\therefore x^2+1 \geq 2x > 0, \quad y^2+4 \geq 4y > 0,$$

$$\therefore \frac{x^2+1}{2x} \geq 1, \quad \frac{y^2+4}{4y} \geq 1,$$

$$\therefore \lg \frac{x^2+1}{2x} \geq 0, \quad \lg \frac{y^2+4}{4y} \geq 0,$$

对于两个非负数, 当且仅当同时为零时, 其和才能等于零。

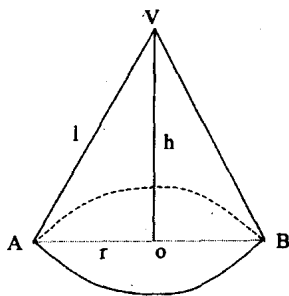
$$\therefore \text{在这里只有 } x=1, y=2$$

【例8】已知圆锥侧面积为 S , 圆锥的底面半径应取多大时, 才能使其体积最大。

解 如图 $\pi r l = S$

$$l^2 = r^2 + h^2$$

$$\begin{aligned}\therefore S^2 &= \pi^2 r^2 l^2 = \pi^2 r^2 (r^2 + h^2) \\ &= \pi^2 r^4 + \pi^2 h^2 r^2\end{aligned}$$



$$\therefore V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \sqrt[4]{\pi^4 r^8 h^4} = \frac{1}{3} \sqrt[4]{\frac{1}{2\pi^2} \times 2\pi^2 r^4 \times \pi^2 r^2 h^2 \times \pi^2 r^2 h^2}$$

$$\leq \frac{1}{3} \sqrt[4]{\frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2\pi^2 r^4 + \pi^2 r^2 h^2 + \pi^2 r^2 h^2}{3} \right)^3} = \frac{1}{3} \sqrt[4]{\frac{8S^6}{54\pi^2}}$$

当圆锥的侧面积 S 一定时, $V_{\text{圆锥}}$ 是一个定值。

此时, S^2 是一个定值, $\therefore 2\pi^2 r^4 = \pi^2 r^2 h^2$, 即 $2r^2 = h^2$,

$$\therefore S^2 = \pi^2 r^2 l^2 = \pi^2 r^2 (r^2 + h^2) = \pi^2 r^2 (r^2 + 2r^2) = 3\pi^2 r^4,$$

$$\therefore r^4 = \frac{S^2}{3\pi^2}, \quad r = \sqrt[4]{\frac{S^2}{3\pi^2}}. \quad \text{即此时圆锥的体积最大。}$$

$$\therefore \text{当 } r = \sqrt[4]{\frac{S^2}{3\pi^2}} \text{ 时, } V_{\text{圆锥最大}} = \frac{1}{3} \sqrt[4]{\frac{8S^6}{54\pi^2}}$$

常见错误类型及对策

【例1】已知 $f(x) = px^2 - q$, 且 $-4 \leq f(1) \leq -1$, $-1 \leq f(2) \leq 5$, 求 $f(3)$ 的取值范围。

$$\text{错误解答 依题意, 有 } \begin{cases} -4 \leq p - q \leq -1 & \text{①} \\ -1 \leq 4p - q \leq 5 & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{②} - \text{①}, \text{得 } 3 \leq 3p \leq 6, \text{即 } 9 \leq 9p \leq 18 \quad \text{③}$$

$$\text{①} \times 4 - \text{②} \text{得 } -15 \leq -3q \leq -9 \quad \therefore 3 \leq q \leq 5, \quad \text{④}$$

$$\therefore \text{③} - \text{④}, \text{得 } 6 \leq 9p - q \leq 13$$

$$\text{又 } \because f(3) = 9p - q, \quad \therefore 6 \leq f(3) \leq 13$$

错误在于由①, ②求得③, ④的过程中, p, q 的值在不同的区域上进行着改变, 由于所表示的结果不一样, 所以最后得出与正确答案不相同的结果。

正确答案参见前面例5, 在例5的解答过程中, 始终保持着 $-4 \leq f(1) \leq -1$, $-1 \leq f(2) \leq 5$ 。

【例2】求函数 $y = 3\sin x + \cos 2x$ 的值域。

错误解答 $\because -1 \leq \sin x \leq 1$,

$$\therefore -3 \leq 3\sin x \leq 3, \quad \text{又 } -1 \leq \cos 2x \leq 1,$$

$$\therefore -4 \leq 3\sin x + \cos 2x \leq 4. \quad \therefore \text{函数 } y \text{ 的值域是 } [-4, 4].$$

错误在于当 $\sin x = 1$ 时, $\cos 2x = -1$

$\therefore$ 当 $3\sin x \leq 3$ 时, 不能再有 $\cos 2x = 1$ 成立,

$\therefore$ 只能有 $3\sin x + \cos 2x < 4$

$\therefore$ 在 $3\sin x + \cos 2x \leq 4$ 处有错误。

正确解答 $y = 3\sin x + \cos 2x$

$$= -2\sin^2 x + 3\sin x + 1$$

$$= -2\left(\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x\right) + 1$$

$$= -2\left(\sin x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} + 1$$

$$= -2\left(\sin x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{17}{8}$$

$\because -1 \leq \sin x \leq 1 \quad \therefore$ 当 $\sin x = \frac{3}{4}$ 时, $y_{\text{最大}} = \frac{17}{8}$

当 $\sin x = -1$ 时,

$\therefore y_{\text{最小}} = -4. \quad \therefore$ 函数 y 的值域是 $[-4, 2\frac{1}{8}]$ 。

【例3】 已知 $a, b \in R$, 并且 $e < a < b$, 其中 e 是自然对数的底, 试比较 a^b 与 b^a 的大小。

错误解答 $\because a, b \in R$, 且 $e < a < b$

假定 $a^b > b^a$, 两边取自然对数, 得

$b \ln a > a \ln b$, ① 又 $\because e < a < b$,

$\therefore b^b > a^b, a^b > a^a \quad \therefore b^b > a^a$.

两边取自然对数, 得 $b \ln b > a \ln a$ ②

① + ②, 得 $b \ln a + b \ln b > a \ln b + a \ln a$.

即 $b \ln ab > a \ln ab$. ③

$\because a, b \in R, ab > e > 1, \quad \therefore \ln ab > 0$,

用 $\ln ab$ 去除③的两边, 不等号不变。

显然, 可得 $b > a$, 上述推理可逆, $\therefore a^b > b^a$ 的假定正确。

错误在于第一, 犯了循环论证的错误, 在证题过程中, 应用了“ $b > a > e$ ”, 最后证明了“ $b > a$ ”, 这是不允许的。第二, 证明过程也并不是每步都可逆, 如由③也推不出①, ②。在这里错误的逆用不等式的性质是不行的。在不等式的性质中除对称性 $a > b$, 则 $b < a$ 是等价的以外, 其余的都是用推出符号“ $\Rightarrow$ ”表达的, 即“已知”是“结论”的必要条件而非充分条件。如由 $a > b, c > d, \Rightarrow a + c > b + d$; 而由 $a + c > b + d \nRightarrow a > b, c > d$.

$\therefore$ 上述解答是错误的。

正确解答 $\because b > a > e > 0, \therefore a, b \in R^+$,

$\therefore ab > e > 0$, 为比较方便, 取 a^b, b^a 的自然对数, 得 $b \ln a, a \ln b$.

$$\therefore b \ln a - a \ln b = \frac{b \ln a - a \ln b}{ab} \times ab = \left(\frac{\ln a}{a} - \frac{\ln b}{b} \right) \cdot ab$$

$\therefore$ 函数 $y = \frac{\ln x}{x} [x \in (0, +\infty)]$ 中 $\ln x < x$,

$\therefore y$ 是 $(e, +\infty)$ 上的减函数, 又 $a < b$,

$$\therefore \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}, \text{ 即 } \frac{\ln a}{a} - \frac{\ln b}{b} > 0, \text{ 又 } ab > 0,$$

$$\therefore \left(\frac{\ln a}{a} - \frac{\ln b}{b} \right) \cdot ab > 0, \therefore b \ln a - a \ln b > 0,$$

$$\text{即 } b \ln a > a \ln b \quad \ln a^b > \ln b^a,$$

又 $e > 1, b > a > e, y = \ln x$ 是 $(e, +\infty)$ 上的增函数, $\therefore a^b > b^a$.

学习效果评估

(满分 100 分, 时间 100 分钟)

一、选择题(每题 6 分, 满分 36 分)

1. 若 $-1 < \alpha < \beta < 1$, 则在下列不等式中恒成立的是()

A. $-2 < \alpha - \beta < 0$

B. $-2 < \alpha - \beta < -1$

C. $-1 < \alpha - \beta < 0$

D. $-1 < \alpha - \beta < 1$

2. 若 $a > b > c$, 则 $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$ 的值为()

A. 正数

B. 负数

C. 非正数

D. 非负数

3. 若 $0 < a < b < 1$, 在下列不等式中正确的是()

A. $a^a < b^b$

B. $b^a < b^b$

C. $a^a < b^a$

D. $b^b < a^b$

4. 设 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 则 $2\alpha - \beta$ 的取值范围是()

A. $-\pi < 2\alpha - \beta < 0$

B. $-\pi < 2\alpha - \beta < \pi$

C. $-\frac{3\pi}{2} < 2\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$

D. $0 < 2\alpha - \beta < \pi$

5. 已知 $a^2 < x < a, M = \log_x x^2, N = \log_x (\log_x x), p = (\log_x x)^2$, 则()

A. $M > N > P$

B. $P > M > N$

C. $M > P > N$

D. $N > M > P$

6. 已知 $a = \sqrt{5} - 2; b = 5 - 2\sqrt{5}; c = 2 - \sqrt{5}$, 那么()

A. $b < c < a$

B. $c < a < b$

C. $c < b < a$

B. $a < b < c$

二、填空题(每空 4 分, 满分 24 分)

1. $a > b$ 与 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 同时成立的条件是_____;

2. 若 $a + b > 0, b < 0$, 则 $a, b, -a, -b$ 的大小关系是_____;

3. 若 $10 < a < 24$, $14 < b < 40$, 那么 $a+b$, $a-b$, $\frac{a}{b}$ 的范围是 _____; _____; _____;

4. 若 $\alpha \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$, 则 $\sin^2 \alpha$ 的取值范围是 _____。

三、解答题(每题 10 分, 满分 40 分)

1. 已知 a, b, c 为不全相等的正数, 比较 $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$ 与 $6abc$ 的大小。

2. 若 $0 < a < \frac{1}{2}$, $A = 1 - a^2$, $B = 1 + a^2$, $C = \frac{1}{1-a}$ 试确定 A, B, C 由小到大的顺序。

3. 已知 $a, b > 0$, 比较 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 与 $\frac{a+b}{2}$ 的大小。

4. 已知函数 $f(x) = px^2 + q$, 且 $-2 \leq f(1) \leq -1$, $-1 \leq f(2) \leq 4$, 求 $f(3)$ 的取值范围。

参 考 答 案

一、1. $\because -1 < \alpha < \beta < 1, \therefore -\alpha > -\beta > -1$

$\therefore 0 > \alpha - \beta > -1, \therefore$ 恒成立的是 $-2 < \alpha - \beta < 0$, 选 A.

2. $\because a > b > c, \therefore b - c > 0, \frac{1}{b-c} > 0$

①

$c - a < 0, \frac{1}{c-a} < 0$ 又 $-\frac{1}{a-c} > 0$

②

① + ②, 得 $\frac{1}{b-c} - \frac{1}{a-c} > 0 \therefore \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} > 0$

$\therefore$ 选 A.

3. $\because 0 < a < b < 1$, 根据不等式的性质有 $a^s < b^s$ (s 为有理数).

$\therefore$ 有 $a^a < b^a$, 选 C

4. $\because -\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 即 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}, -\pi < 2\alpha < \pi$.

$\therefore -\frac{3\pi}{2} < 2\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, 选 C.

5. $\because a^2 < x < a, \text{ 即 } a^2 < a \therefore |a| < 1$, 函数 $y = \log_{\alpha} x$ 为减函数, 又可用特殊值法, 令 $x = a$, 则 $M = 2, N = 0, P = 1, \therefore M > P > N$,

应选 C.

6. $\because c = 2 - \sqrt{5} < 0, \therefore$ 只需比较 a, b .

$\because b - a = 5 - 2\sqrt{5} - \sqrt{5} + 2 = 7 - 3\sqrt{5} > 0, \therefore b > a$,

$\therefore b > a > c$ 应选 B.

二、1. $\because$ 正数的倒数为正数, 负数的倒数为负数,