根据教育部最新教学大纲编写

GAOZHONG SHUXUE
ERNIANJI KAOSHI
JIAOCHENG

数学
高中二年级考试教程

编写 高考命题研究组
主编 温玉蕴
总策划 胡东华

科学技术文献出版社

高中二年级考试教程
数　学

编　写　高考命题研究组

主　编　温玉蕴

副主编　张平平

编　委　缑小锋　张平平　温玉蕴

总策划　胡东华

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北　京

前　　言

本书是《考试教程》丛书中的一册，可供高中二年级学生学习数学的升学指导。本书的主要宗旨是使学生在学习高中数学课本的基本知识的基础上，进行再提高，以适应参加高考的需要，与参加高考接轨，增强对高考的适应性。

1.在内容编排上与课本同步，可以与所学章、节并用，或做高考辅导之用。

2.本书的结构分代数、平面解析几何、分别按课本的章、节依次编排，最后附本书的综合检测题。对每一章又分：本章高考考试内容；本章重点内容；本章知识网络图；高考试题精选及分析（为避免在本丛书可能出现的重复，这一部分题择自 1987、1989、1991、1993、1995、1997、1998、1999 等年的高考试题）；高考模拟训练及详解。对每一节又分高考要求及理解、记忆方法；常考题型举例及方法；常见错误类型及对策。学习效果评估（并附有答案和提示及评分）。

3.本书博采众长，汲取了同类书籍的优点并加以提炼，以争取达到使准备介入高考的学习者，通过演练、提高、再提高，增加入选的把握。限于作者的水平和编写时间的仓促，难以完美的达到这一理想境界。但是本书并不失为一本有益的高考参考资料。读者凡见有其中谬误，请不吝批评指正。

在此顺向引用其结果的各位贤达表示衷心地谢意。

编者

1999.8

目　录

第一部分　代数

第二部分　平面解析几何

第三部分 综合测试题

第 一 部 分

代 数

第五章　不等式

一　本章高考考试内容

高考考试内容			考试层次要求		
单元	高考知识点	包含知识概目	理解	掌握	灵活应用
不等式	5.1 不等式	1.实数的大小顺序和运算的关系，符号法则			✓
		2.实数的符号法则在代数式比较上的运用			✓
	5.2 不等式的性质	1.不等式的基本性质(定理 1——5)			✓
		2.不等式的基本定理的推论			✓
	5.3 不等式的证明	1.常用的证明不等式的方法。(应用不等式的基本性质证明，比较法、综合法、分析法、数学归纳法，等)			✓
		2.利用正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理，求非二次函数的最值。			✓
	5.4 不等式的解法	1.同解不等式和不等式的同解变形		✓	
		2.不等式、不等式组的解集，及在数轴上表示方法		✓	
		3.一元二次不等式的解法			✓
		4.各类不等式的解法(分式不等式，无理不等式，指数，对数不等式)			✓
	5.5 含有绝对值的不等式	1.含有绝对值的不等式的性质			✓
		2.含有绝对值不等式的解法			✓

二　本章重点内容

本章的重点内容是不等式的证明和不等式的解法。

5.1 不等式

5.2 不等式的性质

高考要求及理解记忆方法

高考知识点	不等式及其性质
高考考试内容	理解记忆方法
1. 实数的大小顺序及运算关系，符号法则。 2. 实数的符号法则运算关系在代数式比较上的应用。 3. 不等式的基本性质与推论（五个性质定理及三个推论）及其应用。	1. 实数的运算性质，大小顺序，是不等式的证明和解不等式的主要依据，应予熟练掌握。进行代数式的比较时，也要用到这些知识。 2. 对于不等式的性质，象不等式的传递性、对称性、移项法则，都是容易掌握的，对于不等式运算常常出现的错误（移项法则也属运算），主要是在不等式的两边乘以负实数，不等号要改变方向，容易忽视；不等式两边乘方，开方指数必须是2以上的正整数（也可以推广到正有理数），也容易忽视，都容易造成解答错误。这是应该细心对待的。 3. 关于符号“$\Leftrightarrow$”（等价）“$\Rightarrow$”（推出）的区别，要分清楚，在使用时是很严格的：若 A 则 B，若 B 则 A，才能使用等价符号；一般若 A 则 B 只能用推出符号，这在不等式的证明当中常用。一般用常规描述法，不易出现差错。 不等式若用上述两个符号表示时，只有对称性可以用等价符号，即若 $a>b$，则 $b<a$，即 $a>b \Leftrightarrow b<a$。其他的都是用推出符号。

常考题型举例及方法

【例1】 已知$|a|>|b|(b\neq0)$，试比较$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的大小。

解$\because \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$.　　又$|a|>|b|(b\neq0)$.

①在a,b同号时，若有$a>b>0$，则$ab>0,b-a<0,\frac{b-a}{ab}<0$，　$\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

若有$a<b<0$，则$ab>0,b-a>0,\frac{b-a}{ab}>0$，

$\therefore \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；

②在a,b异号时，若有$a>0,b<0$，则$b-a<0,ab<0$，而$\frac{b-a}{ab}>0$，

$\therefore \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；

若有$a<0,b>0$，则$b-a>0,ab<0,\frac{b-a}{ab}<0,\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

【说明】 由于本题的已知条件给出的是$|a|>|b|$，使问题大大复杂化了，所以对所能出现的四种情况都应给以讨论。不能有所偏废。对于这种情况，一般容易忽视某一方面，因而造成解答错误，请读者(考生)予以注意。

【例2】 已知m为实数，试比较代数式。

$\frac{3}{2m^2+1}$和$\frac{1}{m^2-m+2}$的大小

解　$\because m$为实数　$\therefore 2m^2+1>0$

$m^2-m+2=(m-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0$

$\therefore \frac{3}{2m^2+1}-\frac{1}{m^2-m+2}=\frac{3m^2-3m+6-2m^2-1}{(2m^2+1)(m^2-m+2)}$

$=\frac{m^2-3m+5}{(2m^2+1)(m^2-m+2)}=\frac{(m-\frac{3}{2})^2+\frac{11}{4}}{(2m^2+1)(m^2-m+2)}>0$

$\therefore \frac{3}{2m^2+1}>\frac{1}{m^2-m+2}$

【例3】 设$a>0,b>0,c>0$，试比较下列二个运算结果。

$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$和$(a^2+b^2+c^2)^2$的大小。

解　$\because (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)-(a^2+b^2+c^2)^2=ab^3+ac^3+a^3b+bc^3+$

$a^3c+b^3c-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$

$=ab(a^2-2ab+b^2)+bc(b^2-2bc+c^2)+ac(c^2-2ca+a^2)$

$=ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ac(c-a)^2$

又$\because a>0,b>0,c>0,$

$\therefore ab>0,bc>0,ac>0,(a-b)^2\geqslant 0,(b-c)^2\geqslant 0,(c-a)^2\geqslant 0$。

$\therefore\quad ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ac(c-a)^2\geqslant 0$。

$\therefore (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a^2+b^2+c^2)^2$。

【说明】 比较两个实数或代数式的大小，一般都是用比较法，不易选用综合法。比较法就是确定两个比较对象的差的符号。有些问题比较明显，如例1，有些问题需要进行变形以后才能确定，如例2，例3。在例1中，还要注意，同号的两数(代数式)的顺序关系与其倒数的顺序关系相反；在例2，例3中进行变形时，要注意等效性。

【例4】 试确定 $\lg 9\times\lg 11$ 的取值范围。

解 $\because 0<\lg 9<1$，而 $\lg 11>1$，

但 $\lg 9\neq\lg 11$ $\therefore$不能通过观察得出结论。

$\because\quad \lg 9\times\lg 11<(\frac{\lg 9+\lg 11}{2})^2=(\frac{\lg 99}{2})^2<(\frac{\lg 100}{2})^2=1$

又 $\lg 9\times\lg 11>0$，$\therefore\quad 0<\lg 9\times\lg 11<1$。

【例5】 已知 $f(x)=px^2-q$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，

$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，求 $f(3)$的取值范围。 $f(3)=9p-q$

解 $\because\quad \begin{cases} p-q=f(1) \\ 4p-q=f(2)\end{cases}\quad \therefore\begin{cases} p=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)] \\ q=-\frac{4}{3}f(1)+\frac{1}{3}f(2)\end{cases}$

$\therefore f(3)=9p-q=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$.

$\because -4\leqslant f(1)\leqslant -1,\ -1\leqslant f(2)\leqslant 5,$

$\therefore \frac{5}{3}\leqslant(-\frac{5}{3})f(1)\leqslant\frac{20}{3},\quad -\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}$

$\therefore -1\leqslant\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)\leqslant 20$

$\therefore f(3)$的取值范围是$[-1,20]$。

【例6】 如果 $a,b\in R^+$，且 $a\neq b$，比较 $\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$与$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的大小。

解　$\because \sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$=\dfrac{a-b}{\sqrt{b}}+\dfrac{b-a}{\sqrt{a}}=\dfrac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$,　　$\because a,b\in R^+$ 且 $a\neq b$.

$\therefore |a-b|>0, |\sqrt{a}-\sqrt{b}|>0$,　　$(a-b)$与$(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

同号，　$\therefore$　$(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$,　$\because \sqrt{ab}>0$,　$\therefore \dfrac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}>0$

$\therefore$　$\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})>0$

$\therefore$　$\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$。

【例7】　已知 x,y 同为非负数，且满足 $\lg(x^2+1)+\lg(y^2+4)=\lg 8+\lg x+\lg y$，求 x,y 的值。

解　原方程变形为 $[\lg(x^2+1)-\lg 2x]+[\lg(y^2+4)-\lg 4y]=0$，从而得 $\lg\dfrac{x^2+1}{2x}+\lg\dfrac{y^2+4}{4y}=0$

$\because$　$x^2+1\geqslant 2x>0$,　　$y^2+4\geqslant 4y>0$,

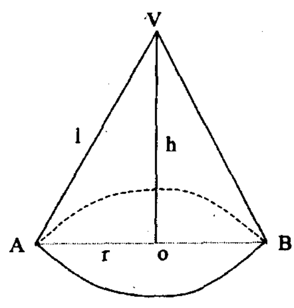
$\therefore$　$\dfrac{x^2+1}{2x}\geqslant 1$,　　$\dfrac{y^2+4}{4y}\geqslant 1$,

$\therefore$　$\lg\dfrac{x^2+1}{2x}\geqslant 0$,　　$\lg\dfrac{y^2+4}{4y}\geqslant 0$,

对于两个非负数，当且仅当同时为零时，其和才能等于零。

$\therefore$在这里只有 $x=1, y=2$

【例8】　已知圆锥侧面积为 S，圆锥的底面半径应取多大时，才能使其体积最大。



解　如图　$\pi r l=S$

$l^2=r^2+h^2$

$\therefore S^2=\pi^2r^2l^2=\pi^2r^2(r^2+h^2)$

$=\pi^2r^4+\pi^2h^2r^2$

$\therefore V_{圆锥}=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{\pi^4r^8h^4}=\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{\dfrac{1}{2\pi^2}\times 2\pi^2r^4\times\pi^2r^2h^2\times\pi^2r^2h^2}$

$$\leqslant \frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2\pi^2r^4+\pi^2r^2h^2+\pi^2r^2h^2}{3}\right)^3}=\frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{8S^6}{54\pi^2}}$$

当圆锥的侧面积 S 一定时，$V_{圆锥}$是一个定值。

此时，S^2 是一个定值，　$\therefore 2\pi^2r^4=\pi^2r^2h^2$，即 $2r^2=h^2$，

$\therefore S^2=\pi^2r^2l^2=\pi^2r^2(r^2+h^2)=\pi^2r^2(r^2+2r^2)=3\pi^2r^4$，

$\therefore r^4=\dfrac{S^2}{3\pi^2}$，　$r=\sqrt[4]{\dfrac{S^2}{3\pi^2}}$。即此时圆锥的体积最大。

$\therefore$ 当 $r=\sqrt[4]{\dfrac{S^2}{3\pi^2}}$ 时，$V_{圆锥最大}=\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{\dfrac{8S^6}{54\pi^2}}$

常见错误类型及对策

【例 1】　已知 $f(x)=px^2-q$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，求 $f(3)$的取值范围。

错误解答　依题意，有 $\begin{cases}-4\leqslant p-q\leqslant -1 & ①\\ -1\leqslant 4p-q\leqslant 5 & ②\end{cases}$

②－①，得 $3\leqslant 3p\leqslant 6$，即 $9\leqslant 9p\leqslant 18$　　③

①×4－②得　$-15\leqslant -3q\leqslant -9$　　$\therefore 3\leqslant q\leqslant 5$，　　④

$\therefore$ ③－④，得　$6\leqslant 9p-q\leqslant 13$

又 $\because$ $f(3)=9p-q$，　$\therefore 6\leqslant f(3)\leqslant 13$

错误在于由①，②求得③，④的过程中，p，q 的值在不同的区域上进行着改变，由于所表示的结果不一样，所以最后得出与正确解答不相同的结果。

正确解答参见前面例 5，在例 5 的解答过程中，始终保持着 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$。

【例 2】　求函数 $y=3\sin x+\cos 2x$ 的值域。

错误解答　$\because -1\leqslant \sin x\leqslant 1$，

$\therefore -3\leqslant 3\sin x\leqslant 3$，　又 $-1\leqslant \cos 2x\leqslant 1$，

$\therefore -4\leqslant 3\sin x+\cos 2x\leqslant 4$．$\therefore$ 函数 y 的值域是$[-4,4]$。

错误在于当 $\sin x=1$ 时，$\cos 2x=-1$

$\therefore$ 当 $3\sin x\leqslant 3$ 时，不能再有 $\cos 2x=1$ 成立，

$\therefore$ 只能有　$3\sin x+\cos 2x<4$

$\therefore$ 在 $3\sin x+\cos 2x\leqslant 4$ 处有错误。

正确解答　$y=3\sin x+\cos 2x$

$$=-2\sin^2x+3\sin x+1$$

$$=-2(\sin^2x-\frac{3}{2}\sin x)+1$$

$$=-2(\sin x-\frac{3}{4})^2+\frac{9}{8}+1$$

$$=-2(\sin x-\frac{3}{4})^2+\frac{17}{8}$$

$\because\ -1\leqslant\sin x\leqslant 1$　　$\therefore$ 当 $\sin x=\frac{3}{4}$ 时，$y_{最大}=\frac{17}{8}$

当　$\sin x=-1$ 时，

$\therefore\ y_{最小}=-4$.　$\therefore$ 函数 y 的值域是 $[-4,2\frac{1}{8}]$。

【例 3】　已知 $a,b\in R$，并且 $e<a<b$，其中 e 是自然对数的底，试比较 a^b 与 b^a 的大小。

错误解答　$\because a,b\in R$，且 $e<a<b$

假定 $a^b>b^a$，两边取自然对数，得

$b\ln a>a\ln b$，①又$\because$　$e<a<b$，

$\therefore b^b>a^b,a^b>a^a$　$\therefore b^b>a^a$.

两边取自然对数，得　$b\ln b>a\ln a$　　②

①+②，得　$b\ln a+b\ln b>a\ln b+a\ln a$.

即　$b\ln ab>a\ln ab$.　　③

$\because a,b\in R,ab>e>1$，　　$\therefore \ln ab>0$，

用 $\ln ab$ 去除③的两边，不等号不变。

显然，可得 $b>a$，上述推理可逆，$\therefore a^b>b^a$ 的假定正确。

错误在于第一，犯了循环论证的错误，在证题过程中，应用了“$b>a>e$”，最后证明了“$b>a$”，这是不允许的。第二，证明过程也并不是每步都可逆，如由③也推不出①，②。在这里错误的逆用不等式的性质是不行的。在不等式的性质中除对称性 $a>b$，则 $b<a$ 是等价的以外，其余的都是用推出符号“$\Rightarrow$”表达的，即“已知”是“结论”的必要条件而非充分条件。如由 $a>b,c>d,\Rightarrow a+c>b+d$；而由 $a+c>b+d\not\Rightarrow a>b,c>d$.

$\therefore$ 上述解答是错误的。

正确解答　$\because b>a>e>0,\therefore a,b\in R^+$，

$\therefore ab>e>0$，为比较方便，取 a^b,b^a 的自然对数，得 $b\ln a,a\ln b$.

$\therefore\quad bln a - aln b = \dfrac{bln a - aln b}{ab} \times ab = (\dfrac{ln a}{a} - \dfrac{ln b}{b})\cdot ab$

$\because$ 函数 $y = \dfrac{lnx}{x}[x \in (0, +\infty)]$中 $lnx < x$,

$\therefore y$ 是$(e, +\infty)$上的减函数,又 $a < b$,

$\therefore \dfrac{lna}{a} > \dfrac{lnb}{b}$,即$\dfrac{lna}{a} - \dfrac{lnb}{b} > 0$,又 $ab > 0$,

$\therefore (\dfrac{lna}{a} - \dfrac{lnb}{b})\cdot ab > 0$, $\therefore blna - alnb > 0$,

即 $blna > alnb$ $lna^b > lnb^a$,

又 $e > 1, b > a > e, y = lnx$ 是$(e, +\infty)$上的增函数, $\therefore a^b > b^a$。

学习效果评估

(满分 100 分,时间 100 分钟)

一、选择题(每题 6 分,满分 36 分)

1. 若 $-1 < \alpha < \beta < 1$,则在下列不等式中恒成立的是(　　)

A. $-2 < \alpha - \beta < 0$　　B. $-2 < \alpha - \beta < -1$

C. $-1 < \alpha - \beta < 0$　　D. $-1 < \alpha - \beta < 1$

2. 若 $a > b > c$,则$\dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a}$的值为(　　)

A. 正数　　B. 负数　　C. 非正数　　D. 非负数

3. 若 $0 < a < b < 1$,在下列不等式中正确的是(　　)

A. $a^a < b^b$　　B. $b^a < b^b$　　C. $a^a < b^a$　　D. $b^b < a^b$

4. 设 $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$,则 $2\alpha - \beta$ 的取值范围是(　　)

A. $-\pi < 2\alpha - \beta < 0$　　B. $-\pi < 2\alpha - \beta < \pi$

C. $-\dfrac{3\pi}{2} < 2\alpha - \beta < \dfrac{\pi}{2}$　　D. $0 < 2\alpha - \beta < \pi$

5. 已知 $a^2 < x < a$, $M = \log_a x^2$, $N = \log_a(\log_a x)$, $p = (\log_a x)^2$,则(　　)

A. M>N>P　　B. P>M>N　　C. M>P>N　　D. N>M>P

6. 已知 $a = \sqrt{5} - 2$; $b = 5 - 2\sqrt{5}$; $c = 2 - \sqrt{5}$,那么(　　)

A. $b < c < a$　　B. $c < a < b$

C. $c < b < a$　　B. $a < b < c$

二、填空题(每空 4 分,满分 24 分)

1. $a > b$ 与$\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$同时成立的条件是________;

2. 若 $a + b > 0, b < 0$,则 $a, b, -a, -b$ 的大小关系是________;

3. 若 $10<a<24$, $14<b<40$, 那么 $a+b$, $a-b$, $\frac{a}{b}$ 的范围是________;________;________;

4. 若 $\alpha\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$, 则 $\sin^2\alpha$ 的取值范围是________。

三、解答题(每题10分,满分40分)

1. 已知 a,b,c 为不全相等的正数,比较 $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$ 与 $6abc$ 的大小.

2. 若 $0<a<\frac{1}{2}$, $A=1-a^2$, $B=1+a^2$, $C=\frac{1}{1-a}$ 试确定 A,B,C 由小到大的顺序.

3. 已知 $a,b>0$, 比较 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 与 $\frac{a+b}{2}$ 的大小.

4. 已知函数 $f(x)=px^2+q$, 且 $-2\leqslant f(1)\leqslant -1$, $-1\leqslant f(2)\leqslant 4$, 求 $f(3)$ 的取值范围.

参考答案

一、1. $\because -1<\alpha<\beta<1$, $\therefore -\alpha>-\beta>-1$

$\therefore 0>\alpha-\beta>-1$, ∴恒成立的是 $-2<\alpha-\beta<0$, 选 A.

2. $\because a>b>c$, $\therefore b-c>0$, $\frac{1}{b-c}>0$ ①

$c-a<0$, $\frac{1}{c-a}<0$ 又 $-\frac{1}{a-c}>0$ ②

①+②, 得 $\frac{1}{b-c}-\frac{1}{a-c}>0$ $\therefore \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0$

∴ 选 A.

3. $\because 0<a<b<1$, 根据不等式的性质有 $a^s<b^s$ (s 为有理数).

∴有 $a^a<b^a$, 选 C

4. $\because -\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, 即 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$, $-\pi<2\alpha<\pi$.

$\therefore -\frac{3\pi}{2}<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$, 选 C.

5. $\because a^2<x<a$, 即 $a^2<a$ $\therefore |a|<1$, 函数 $y=\log_a x$ 为减函数, 又可用特殊值法, 令 $x=a$, 则 $M=2$, $N=0$, $P=1$, $\therefore M>P>N$,

应选 C.

6. $\because c=2-\sqrt{5}<0$, ∴ 只需比较 a,b.

$\because b-a=5-2\sqrt{5}-\sqrt{5}+2=7-3\sqrt{5}>0$, $\therefore b>a$,

$\therefore b>a>c$ 应选 B.

二、1. ∵ 正数的倒数为正数, 负数的倒数为负数,