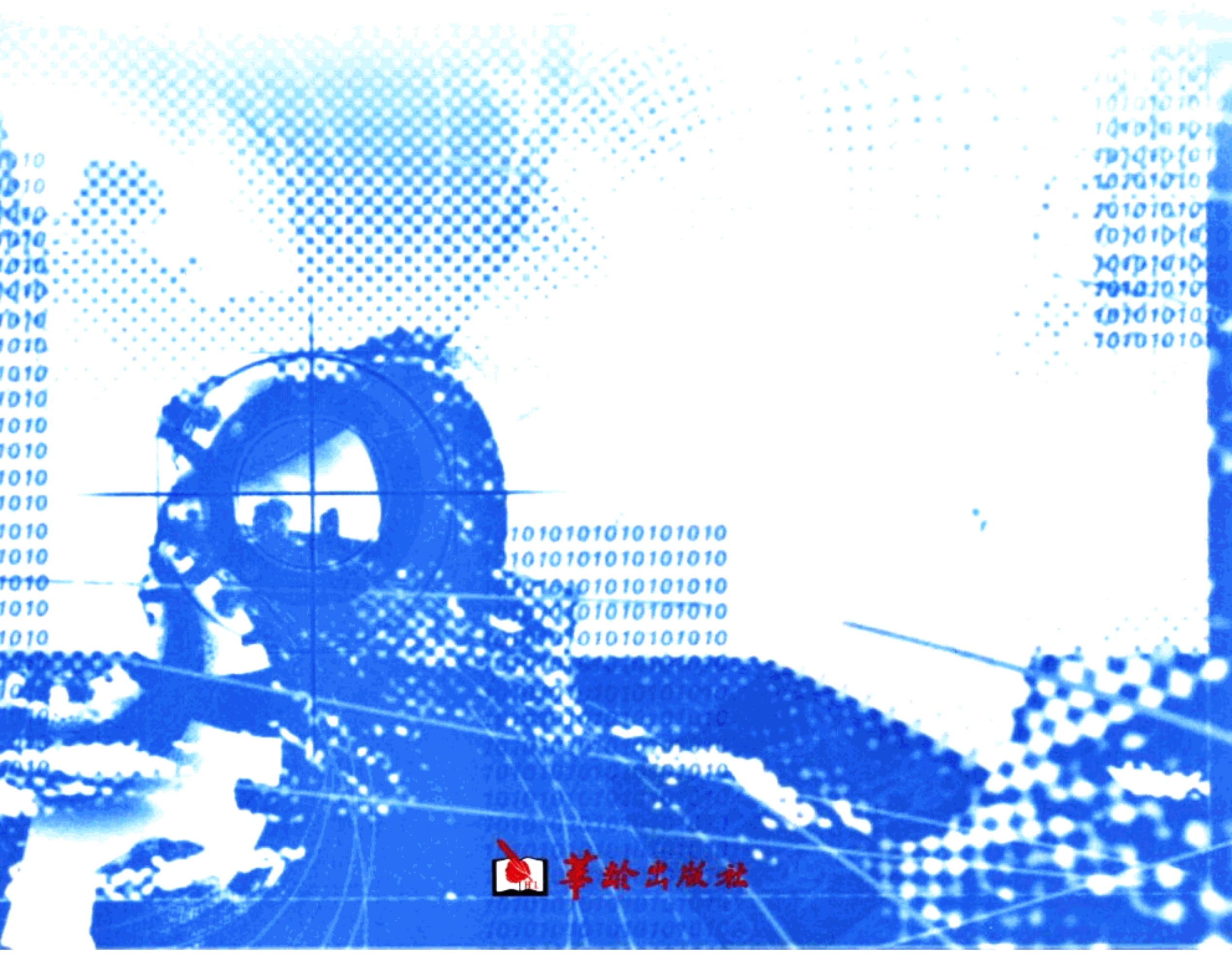
前程无限系列高考总复习用书

主编　朱结根

2006最新版 学生用书

新课堂

数学



華齡出版社

前程无限系列高考总复习用书(第一轮·学生用书)

新 课 堂

数 学

主　编：朱结根
副主编：杨德仁　朱结良　章朝辉
编　者：(按姓氏笔划排名)
王新良　石　炯　朱安乐　朱结良
朱结根　朱结梅　李昭平　罗庆平
杨德仁　郑登旭　章朝辉　喻永祥
蔡向红

华 龄 出 版 社

责任编辑： 高志红
装帧设计： 晓 雯

图书在版编目(CIP)数据

新课堂·数学/朱结根主编. —北京： 华龄出版社， 2005
ISBN 7-80178-260-7

Ⅰ.新... Ⅱ.朱... Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 092654 号

书　　名： 新课堂·数学
作　　者： 朱结根 主编
出版发行： 华龄出版社
印　　刷： 北京柯蓝博泰印务有限公司
版　　次： 2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷
开　　本： 880×1230 1/16 印 张： 15.75
字　　数： 320 千字
定　　价： 24.80 元

地　　址： 北京西城区鼓楼西大街 41 号 邮编： 100009
电　　话： 84044445(发行部) 传真： 84039173

编 写 说 明

本书按高考的重要知识点分章节编写,每节内容划分成四个板块:

(一) 知识再现,正本清源. 在目前的高考复习中,许多学生(包括老师)抛开了课本,视各种复习资料为灵丹妙药,使学生在题海中苦苦挣扎,从根本上违背了教学规律.教材是几代数学家智慧的结晶,如平湖高峡,蕴藏着巨大潜能.每年都有大量的高考试题,来源于课本,是以课本知识为背景进行的再创作,教材是高考复习与命题的源头活水.只有盘活了教材,才能在高考中以不变应万变,立于不败之地,宋代理学大师朱熹诗云:问渠那得清如许? 为有源头活水来.

(二) 思路分析,总结评注. 考试由学生考,试题是学生做,任何人无法包办代替,因此在高考复习中,作为老师追求的应是:通过例题的分析,告诉学生如何寻找解题的突破口,即如何破题,自然地形成解题思路;通过总结评注,完善知识结构,提练解题方法.只有这样,才能真正授学生以渔,使他们学到真功夫,掌握真本领.

(三) 巩固练习,培养能力. 俗话说:师傅领进门,修行在个人.学生学到的解题技术是十分脆弱的,只有在风浪(实战)中,才能得到检验,完善和提高.在雅典奥运会上,刘翔令举世震惊的12.91秒,是长期科学训练的结果.一份耕耘,才会有一份收获.

(四) 探索创新,优化思维.创新是一个民族的灵魂,是一个民族兴旺发达的不竭动力.高考命题也在实践着这一指导思想.精彩纷呈的新题的不断涌现,有利于优化中学数学教学,有利于发挥高考的选拨功能,使真正具有优秀思维品质的学生能够脱颖而出.创新能力的培养,非一日之功,需要长期潜移默化的渗透.

本书的大部分章节的后面附有“轻松阅读”部分,这部分内容选自《通过问题学解题》(朱结根著,中国工人出版社).随着高考中以能力立意的新题不断涌现,许多考生手足无措,导致高考失利,这是没有掌握问题解决的思想与方法.建议同学们反复阅读这部分内容,既夯实自己的数学基础,更重要的是掌握观察问题的视角、分析问题的方法、解决问题的手段,通过对有代表性问题的解题过程反复的操作与思考,吸取营养,促进解题能力有效的提高.

在本书的编写过程中,我们注重基础知识的巩固和提高,注重解题能力的培养,注重思维的优化和创新,全书结构合理,选题精当,给高考复习带来了一股清新的风.

作者
2005 年 7 月

目 录

第一章
集合与简易逻辑

第一节　集合

知识再现，正本清源

1. 确定对象的全体形成一个集合,其中每个对象叫做集合中的元素. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性.

2. 通常用列举法、描述法、图示法来表示集合;一般情况下用列举法表示有限集,描述法表示无限集;图示法表示的集合其元素具有典型明晰的直观特征.

3. 若 x 是集合 A 的元素,则 $x\in A$;否则 $x\notin A$.

4. 若集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作:$A\subseteq B$;否则 $A\nsubseteq B$.

若 A 是 B 的子集,且集合 B 中至少有一个元素不是 A 的元素,则称 A 是 B 的真子集,记作:$A\subsetneqq B$.

若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$. 空集是任何非空集合的真子集.

5. 常用结论:

①$A=A\cap B\Leftrightarrow A\subseteq B$;

②$A=A\cup B\Leftrightarrow B\subseteq A$;

③$Card(A)+Card(B)=Card(A\cup B)+Card(A\cap B)$;

④集合 A 有 n 个元素,则 A 的子集共有 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$ 个;A 的真子集共有 2^n-1 个;A 的非空真子集有 2^n-2 个.

思路分析，总结评注

例 1:设 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{X|\varnothing\subseteq X\subsetneqq A\}$,用列举法表示集合 B.

【分析】 要把集合 B 中的元素一一列举出来,必须明确集合 B 中元素所具有的公共属性.

用列举法表示集合 B 时,要按照 B 中元素的某种特征有次序地列举,防止遗漏.

$B=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$.

【评注】 认识集合,将集合语言等价转化为熟悉的数学语言,是避免错误,正确理解题意的根本方法. 本例中:$\varnothing\subsetneqq B$,$\varnothing\in B$,$\{1,2\}\in B$ 揭示了集合与元素之间的转换.

例 2:设集合 $A=\{x|x^2+2x=0\}$,$B=\{x|x^2+ax+3a=0\}$,求使 $A\cap B=B$ 成立的实数 a 的集合 C.

【分析】 (1)$A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$,那么集合 A 的子集有哪些呢?

(2)当 $B=\varnothing$时,实数 a 应满足什么条件?

答案 :$C=\{a|0\leqslant a<12\}$.

【评注】 两个基本结论:$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$,全集 U,$C_UA\subseteq C_UB\Leftrightarrow B\subseteq A$.

例 3:设 M 是满足下列条件的函数 $f(x)$ 的集合:

(1)$f(x)$ 的定义域是$[-1,1]$;

(2)若 $x_1,x_2\in[-1,1]$,则$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$.

试问:$g(x)=x^2+2x-1(x\in[-1,1])$是否属于集合 M? 为什么?

【分析】 由 $x\in[-1,1]$,只需判断 $g(x)$是否满足(2).

设 $x_1,x_2\in[-1,1]\Rightarrow|x_1|\leqslant 1,|x_2|\leqslant 1$.

$|g(x_1)-g(x_2)|=|(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)|\leqslant|x_1-x_2|\cdot(|x_1|+|x_2|+2)\leqslant 4|x_1-x_2|$.

即 $g(x)\in M$.

【评注】 认清集合中元素的本质属性,分清点集,数集,是审题的第一关.

例 4:设集合 $A=\{x|x=a+b\sqrt{2},\quad a,b\in\mathbf{Z}\}$,对 $m、n\in A$ 有如下结论:

①$m+n\in A$;②$m-n\in A$;③$mn\in A$;④$\dfrac{m}{n}\in A$.

其中正确的序号是__________.

【分析】 设 $m,n\in A$,故存在整数 a_1,b_1,a_2,b_2,使 $m=a_1+b_1\sqrt{2},n=a_2+b_2\sqrt{2}$.

则:$m+n=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}\in A$,

$m-n=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{2}\in A$,

$mn=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\in A$.

但$\frac{m}{n}=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}$,

$a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{Z}$,但$\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$未必是整数.

即$\frac{m}{n}\in A$ 不正确,所以正确的命题是①②③.

【评注】 正确的命题必须给予证明,而判断命题是假命题时,可举反例.如 $m=\sqrt{2}+1,n=2+\sqrt{2}$.$m,n\in A$,但$\frac{m}{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}\notin A$,即④是假命题.

巩固训练,培养能力

1. 已知集合 $M=\{0,1,2\},N=\{x\mid x=2a,a\in M\}$,则 $M\cap N=$(　　).

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{0,2\}$　　D. $\{1,2\}$

2. 设集合 $P=\{m\mid -1<m<0\},Q=\{m\in\mathbf{R}\mid mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 x 恒成立$\}$,则下列关系中成立的是(　　).

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $Q\subsetneqq P$

C. $P=Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

3. 定义 $A-B=\{x\mid x\in A$,且 $x\notin B\}$,若 $M=\{1,2,3,4,5\},N=\{0,2,4\}$,则 $M-(M-N)=$(　　).

A. N　　B. M

C. $\{2,4\}$　　D. $\{1,3,5\}$

4. 零点调查公司随机抽查了 A 市 1000 家住户,有彩电的 819 户,有空调的 621 户,彩电、空调二者都有的 452 户,则彩电、空调至少有一样的______户,还有______户家庭既没有彩电,也没有空调.

5. 已知 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cup\mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$,则实数 p 的取值范围是______.

6. 集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 9\},B=\{(x,y)\mid(x-3)^2+(y+4)^2\leqslant r^2\}$,其中 $r>0$,若 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素,则 r 的值是______.

7. 设 $A=\{x\mid x^2+px+q=0,x\in\mathbf{R}\}\neq\varnothing,M=\{1,3,5,7,9\},N=\{1,4,7,10\}$,若 $A\cap M=\varnothing,A\cap N=A$,求 p,q.

8. 设 S 为满足下列两条件的实数所构成的集合:①$1\notin S$, ②若 $a\in S$,则$\frac{1}{1-a}\in S$.

(1)证明:若 $a\in S$,则 $1-\frac{1}{a}\in S$;

(2)若 $2\in S$,且 S 有且仅有 3 个元素,求 S.

9. 已知 $A=\{x\mid 2x^2+7x-15<0\},B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$,且 $A\cap B=\varnothing,A\cup B=\{x\mid -5<x\leqslant 2\}$,求 a,b.

10. 已知集合 $M=\{(x,y)|2xt+y(1-t^2)-2(1+t^2)=0,t\in\mathbf{R}\}$，全集 $U=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，求 C_UM.

探索创新，优化思维

11. 若集合 A、B 满足 $A\cup B=M$，则称 (A,B) 为集合 M 的一个分拆，并规定：当且仅当 $A=B$ 时，(A,B) 与 (B,A) 为集合 M 的同一种分拆；当 $A\cap B=\varnothing$ 时，(A,B) 为集合 M 的一个正交分拆. 若 $M=\{1,2,3,\cdots,n\}$.

(1) 集合 M 的正交分拆 (A,B) 有多少个?

(2) 集合 M 的分拆 (A,B) 有多少个?

第二节 简易逻辑

知识再现，正本清源

一、逻辑联结词：

1. 可以判断真假的语句叫做命题.

2. “或”、“且”、“非”这些词叫做逻辑联结词.

3. 复合命题的真值表：

P	非 P
真	假
假	真

p	q	p 或 q	p 且 q
真	真	真	真
真	假	真	假
假	真	真	假
假	假	假	假

二、四种命题：

1. 命题的四种形式是：

原命题：$p \Rightarrow q$；逆命题：$q \Rightarrow p$；

否命题：$\neg p \Rightarrow \neg q$；逆否命题：$\neg q \Rightarrow \neg p$.

2. 等价关系：互为逆否的两个命题是等价命题.

三、充要条件：

1. ①$p\Rightarrow q$，$q \not\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件；

②$q\Rightarrow p$，$p \not\Rightarrow q$，则 p 是 q 的必要不充分条件；

③$p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件；

④$p \not\Rightarrow q$，$q \not\Rightarrow p$，则 p 是 q 的既不充分又不必要条件.

2. 若 p,q 分别用集合 A,B 表示，

①$A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；

②$A=B$，则 p 是 q 的充要条件.

思路分析，总结评注

例 1：如果命题“p 或 q”是真命题.

①命题“$\neg p$ 或 $\neg q$”是真命题.

②命题“$\neg p$ 且 $\neg q$”是假命题.

③命题“p 且 q”是真命题.

其中正确的序号是________.

【分析】 “p 或 q”为真 $\Leftrightarrow$ p 为真或 q 为真 $\Leftrightarrow$ $\neg p$ 为假或 $\neg q$ 为假. 正确的是__②__.

【评注】 正确理解逻辑连结词“或”、“且”、“非”的含义. $\neg(p$ 或 $q) \Leftrightarrow \neg p$ 且 $\neg q$；$\neg(p$ 且 $q) \Leftrightarrow \neg p$ 或 $\neg q$. 判断一个命题是真命题必须推理论证，而判断一个命题是假命题只要举出一个反例.

例 2：已知 $P=\{x \mid |x-a|<4\}$，$Q=\{x \mid x^2+2x-3<0\}$，且 $x\in P$ 是 $x\in Q$ 的必要条件，求实数 a 的取值范围.

【分析】 $x\in P$ 是 $x\in Q$ 的必要条件 $\Leftrightarrow Q\subseteq P$.

$P=\{x \mid a-4<x<a+4\}$，$Q=\{x \mid -3<x<1\}$.

$$Q\subseteq P \Leftrightarrow \begin{cases} a-4\leqslant -3 \\ 1\leqslant a+4 \end{cases} \Leftrightarrow -3\leqslant a\leqslant 1.$$

【评注】 处理充要条件的问题时，首先要分清条件与结论，然后才能正确地进行推理和判断. 有时利用“$p\Rightarrow q$”与“$\neg q\Rightarrow \neg p$”的等价关系寻求最优解题方案. 当条件与结论以集合形式出现时，借助集合（数形结合），有利于充要条件的理解和判断.

例 3：求实数 a 的取值范围，使得关于 x 的方程 $x^2+2(a-1)x+2a+6=0$ 至少有一个正实数根.

【分析】 至少有一个正实数根，包含两种情况：两个正实数根和一个正数根、一个非正数根，因此分别求出这两种情况下实数 a 的取值集合，再求并集即可.

【解】 方程 $x^2+2(a-1)x+2a+6=0$ 至少有一个正实根.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\geqslant 0 \\ -2(a-1)>0 \\ 2a+6>0 \end{cases} \text{或 } 2a+6\leqslant 0,$$

$\Leftrightarrow$ $-3<a\leqslant -1$ 或 $a\leqslant -3$ $\Leftrightarrow$ $a\leqslant -1$.

例 4：设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是公比不相等的两个等比数列，$c_n=a_n+b_n$，证明：数列 $\{c_n\}$ 不是等比数列.

【分析】 欲证数列 $\{c_n\}$ 不是等比数列，即证：数列 $\{c_n\}$ 是等比数列是假命题，像这类否定性问题通常采用反证法.

证明请同学们自己完成.

【评注】 直接证明条件较少，关系不明确，问题抽象度高，或者种类较多时，往往其反面较具体，即“正难则反”，这也是转化思想的体现. 通常像否定性问题、唯一性问题用反证法.

从反面考虑问题时，通常极易混淆“否命题”与“命题的否定”，解题中一定要看清要求，作出正确的反设（即否定结论）.

巩固训练，培养能力

1. 对任意实数 a、b、c，在下列命题中，真命题是（　　）.

A. “$ac>bc$”是“$a>b$”的必要条件

B. “$ac=bc$”是“$a=b$”的必要条件

C. “$ac>bc$”是“$a>b$”的充分条件

D. “$ac=bc$”是“$a=b$”的充分条件

2. 命题 p：若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|$

>1 的充分而不必要条件.

命题 q: 函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$, 则(　　).

A. "p 或 q"为假　　B. "p 且 q"为真

C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

3. $y=|x+a|+b$ 是偶函数的充要条件是(　　).

A. $ab=0$　　B. $a\in\mathbf{R}, b=0$

C. $a=0, b\in\mathbf{R}$　　D. $a^2+b^2=0$

4. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为非零的平面向量, 甲: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 乙: $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 则甲是乙的________条件.

5. 在空间, ①若四点不共面, 则这四点中任何三点都不共线; ②若两条直线没有公共点, 则这两条直线异面. 以上两个命题中, 逆命题为真命题的是________.

6. 设 A、B 为两个集合, 下列四个命题:

①$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in A$, 有 $x\in B$;

②$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$;

③$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$;

④$A\not\subseteq B\Leftrightarrow$ 存在 $x\in A$, 使得 $x\notin B$.

其中真命题的序号是________(把符合要求的命题序号都填上).

7. 已知 $A=\{x\,|\,|x-1|>2\}$, $B=\{x\,|\,x^2+(m+1)x+m>0\}$, 且 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充要条件, 求实数 m.

8. 已知 p: $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根.

q: $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根, 若 p 或 q 为真, p 且 q 为假, 求 m 的取值范围.

9. 已知 $P=\{x\,|\,|x-a|<4\}$, $Q=\{x\,|\,x^2-4x+3<0\}$, 若 $x\in P$ 是 $x\in Q$ 的必要条件, 求实数 a 的取值范围.

10. 若整系数一元二次方程：$ax^2+bx+c=0$ 有有理根，那么 a,b,c 中至少有一个是偶数.

拓展创新。优化思维

11. 已知 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的增函数.

(1)若 $a+b>0$，则 $f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$；

(2)上述命题的逆命题成立吗？为什么？

轻松阅读 1

充要条件的判断及应用

问题 已知 $p:(x-3)^2+4y^2\leqslant 4$，$q:(x-2)^2+y^2<1$，$r:y<2ax(a>0)$. 若 p 是 q 或 r 的充分条件，求 a 的范围.

充要条件是中学数学中的一个重要概念，它是我们进行各种等价或非等价变换的主要依据，是逻辑学的基础内容之一，教材在四种命题的基础上定义了充要条件.

1. 逻辑语言定义：

命题关系	条件关系
原命题成立($A\Rightarrow B$)，但逆命题不成立($B\nRightarrow A$)	A 是 B 的充分不必要条件
原命题不成立($A\nRightarrow B$)，但逆命题成立($B\Rightarrow A$)	A 是 B 的必要不充分条件
原命题成立($A\Rightarrow B$)，逆命题也成立($B\Rightarrow A$)	A 是 B 的充要条件
原命题不成立($A\nRightarrow B$)，逆命题也不成立($B\nRightarrow A$)	A 是 B 的既不充分又不必要条件

【注】 由于 $A\Rightarrow B$ 与 $\neg B\Rightarrow\neg A$ 等价；$B\Rightarrow A$ 与 $\neg A\Rightarrow\neg B$ 等价，因此利用逻辑语言推导 A 与 B 之间的关系时，应选择最简捷的解题途径.

2. 集合语言定义：

设 $P=\{x|p(x)\}$，$Q=\{x|q(x)\}$ 为两个条件集合

集合关系	条件关系
$P\subseteq Q$，但 $Q\nsubseteq P$	P 是 Q 的充分不必要条件
$Q\subseteq P$，但 $P\nsubseteq Q$	P 是 Q 的必要不充分条件
$P\subseteq Q$，且 $Q\subseteq P$	P 是 Q 的充要条件
$P\nsubseteq Q$，且 $Q\nsubseteq P$	P 是 Q 的既不充分又不必要条件

【注】 充要条件的集合定义沟通了集合与逻辑之间的联系，实现了充要条件的化归，将充要条件的判断转化为直观的韦恩图间的关系.

例 1：设甲、乙、丙是三个命题，如果甲是乙的必要不充分条件，丙是乙的充分不必要条件，那么(　　).

A. 丙是甲的充分不必要条件

B. 丙是甲的必要不充分条件

C. 丙是甲的充要条件

D. 丙是甲的既不充分又不必要条件

【分析】 甲是乙的必要不充分条件，转化为逻辑关系为：

乙$\Rightarrow$甲 ①　　甲$\nRightarrow$乙 ②

丙是乙的充分不必要条件，转化为逻辑关系为：

丙$\Rightarrow$乙 ③　　乙$\nRightarrow$丙 ④

由③、①可得：　丙$\Rightarrow$甲

由②、④我们不能想当然草率地下结论：甲$\nRightarrow$丙. 假设甲$\Rightarrow$丙

由③知甲$\Rightarrow$丙$\Rightarrow$乙，与②相矛盾，故甲$\nRightarrow$丙

这里有一个反证法的思维过程，这些细微之处，需要读者认真体会. 解题如辩论，要有理有据，以理服人.

例 2：在下列空白处填上适当的数或式，在(　　)内填上 A、B、C、D 之一.

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

解分式方程 $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{1}{3}$…………⑤

时，将它的两边同乘以 $3(x^2-1)$ 得整式方程

__________ $=0$…………⑥

更进一步解得 $x=$______或 $x=$______…　⑦

⑥是⑤成立的(　　)

⑦是⑥成立的(　　)

⑦是⑤成立的(　　)

$x=$______是⑤成立的(　　)，从而 $x=$______是原方程的根.

【分析】 由题意：$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{1}{3}$……⑤

$x^2-3x+2=0$……⑥

$x=1$ 或 $x=2$……⑦

⑤、⑥、⑦间的逻辑关系如图 1.3.1.

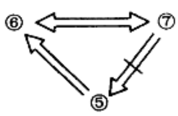


图 1.3.1

因此：⑥是⑤的必要不充分条件，⑦是⑥的充要条件，⑦

是⑤的必要不充分条件，$x=2$ 是⑤成立的充要条件，$x=2$ 是原方程的根.

【注】 由例2，我们认识到充要条件在解方程中的重要作用，事实上对于求函数定义域（值域）、解方程（或不等式）等都是探求充要条件的问题，如果我们能正确运用充要条件指导解题，就会杜绝丢三落四的现象，又能有效防止鱼目混珠，保持解题的严密性与完整性，不增解，不漏解.

例3：已知 $p:|x|+|y|\leqslant 1$，$q:|x+y|\leqslant 1$，问 p 是 q 的什么条件？

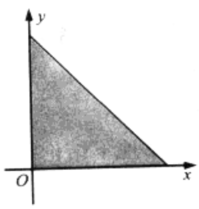


图 1.3.2

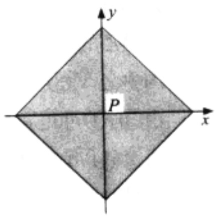


图 1.3.3

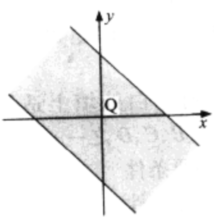


图 1.3.4

【分析】 设 $P=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$，$Q=\{(x,y)\mid |x+y|\leqslant 1\}$.

当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 则：$|x|+|y|=x+y\leqslant 1$.

知 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1\end{cases}$ 对应的平面区域，如图1.3.2.

运用类似分析方法，我们可得集合 P 对应的平面区域——正方形边界及其内部，如图1.3.3.

由 $-1\leqslant x+y\leqslant 1$，可得集合 Q 对应的平面区域，如图1.3.4.

图1.3.3、图1.3.4对照，可得：$P\subsetneqq Q$，

故 P 是 Q 的充分不必要条件.

例4：设 $f(x)=x^4-3x^3+(a+2)x^2-2ax$.

(1)将 $f(x)$ 因式分解；

(2)要使 $x(x-2)>0$ 成为 $f(x)<0$ 的必要条件，试确定 a 的范围.

【分析】 (1)$f(x)=x^4-3x^3+2x^2+ax(x-2)$

$=x(x-2)(x^2-x+a)$

(2)由题意：$f(x)<0\Rightarrow x(x-2)>0$

由于 a 未知，上述思维过程是：由未知领域走向已知领域，显然悖于常理，于是我们考虑其逆否命题，制作结果如下：$x(x-2)\leqslant 0\Rightarrow f(x)\geqslant 0$.

于是问题转化为：$0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$g(x)=x^2-x+a\leqslant 0$ 恒成立，

即 $g(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值恒小于等于0.

注意到 $g(x)=x^2-x+a$ 的对称轴为 $x=\frac{1}{2}$，

$g(x)\leqslant g(2)=a+2\leqslant 0$，　$a\leqslant -2$，

故所求 a 的范围是：$a\leqslant -2$.

例5：已知 $p:|3x-4|>2$，$q:\frac{1}{x^2-3x+2}>0$，则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的什么条件？

【分析】 $|3x-4|>2\Leftrightarrow 3x-4>2$ 或 $3x-4<-2\Leftrightarrow x>2$ 或 $x<\frac{2}{3}$，

$\neg p$ 的解集 $A=[\frac{2}{3},2]$.

$\frac{1}{x^2-3x+2}>0\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow x>2$ 或 $x<1$，故 $\neg q$ 的解集 $B=[1,2]$，

显然 $B\subsetneqq A$，故 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件.

【注】 由 $\neg p:|3x-4|\leqslant 2\Leftrightarrow -2\leqslant 3x-4\leqslant 2\Leftrightarrow \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2$.

由 $\neg q:\frac{1}{x^2-3x+2}\leqslant 0\Leftrightarrow x^2-3x+2<0\Leftrightarrow 1<x<2$，显然，这是错误的. 因为 $q:\frac{1}{x^2-3x+2}>0\Leftrightarrow x^2-3x+2>0$，故 $\neg q:x^2-3x+2\leqslant 0$. 因此对于 $f(x)>g(x)$ 的否定我们不能简单化，一刀切地认为就是 $f(x)\leqslant g(x)$，要根据题目实际，经过认真分析、转化，作出正确判断. 总之，一切从实际出发是解题的一条基本原则.

例6：在 ΔABC 中，$\tan A$，$\tan B$ 是方程 $x^2+\sqrt{3}mx+m+1=0$ 的两根，求 m 的取值范围.

【分析】 这是我们最常见的问题表述方式："已知……成立，求……的范围"，也是暗示我们的工作目标是探求充要条件.

由题意：$\begin{cases}\tan A+\tan B=-\sqrt{3}m\\ \tan A\cdot\tan B=m+1\end{cases}$

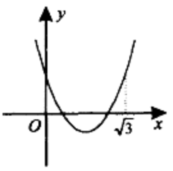
由 $\tan A$ 与 $\tan B$ 的和积关系式，我们自然联想起两角和的正切展开式，于是有：

$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\sqrt{3}$

故 $A+B=60°$，　$0°<A$，　$B<60°$，

$0<\tan A,\quad \tan B<\sqrt{3}.$

因此我们发现$f(x)=x^2+\sqrt{3}mx+m+1=0$在$(0,\sqrt{3})$内有两根,画出$y=f(x)$的示意图,通过分析图像,寻找充要条件.



$$\Rightarrow\begin{cases}f(0)>0\\ f(\sqrt{3})>0\\ \triangle\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow$$

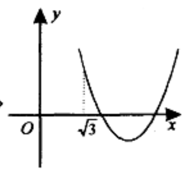


图 1.3.5　　图 1.3.6

这是学生中最普遍的解法,因为同学们都将眼光集中到点的特征上,如$(0,f(0))$,$(\sqrt{3},f(\sqrt{3}))$在x轴上方,顶点在x轴上或x轴下方($\Delta\geqslant 0$),由不等式组我们可画出图 1.3.6,这是与图 1.3.5 相矛盾的,因此它只是必要条件,总结失败的经验教训,我们发现对称轴应穿过区间$(0,\sqrt{3})$,即充要条件为:

$$\begin{cases}f(0)>0\\ f(\sqrt{3})>0\\ \Delta\geqslant 0\\ 0<\dfrac{-\sqrt{3}m}{2}<\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+i>0\\ 3m^2-4m-4\geqslant 0\\ -2<m<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-1<m<0\\ m\geqslant 2 \text{ 或 } m\leqslant -\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow -1<m\leqslant -\frac{2}{3},$$

故所求m的范围是:$-1<m\leqslant -\dfrac{2}{3}$.

【注】 对于例6,挖掘隐含条件是一个难点,在数与形之间建立等价关系又是一个难点,通过本题的学习,我们可以得到解决此类问题的方法是:关注三点(两端点一顶点)一线(对称轴).

☞ 问题解答

【解】 由充要条件的逻辑意义:$p\Rightarrow q$或r,即:

$p\Rightarrow q,p\nRightarrow r$或$p\nRightarrow q,p\Rightarrow r$或$p\Rightarrow q,p\Rightarrow r$.

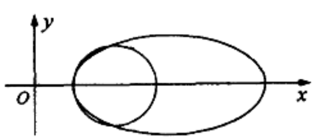


图 1.3.7

令$P=\{(x,y)\mid(x-3)^2+4y^2\leqslant 4\}$,$Q=\{(x,y)\mid(x-2)^2+y^2<1\}$.

P表示中心在$(3,0)$的椭圆及其内部的区域,Q表示圆心在$(2,0)$半径为1的圆的内部区域(不包括圆周)由图 1.3.7 可知$P\not\subseteq Q$,故$p\nRightarrow q$.或者在p中:令$x=5,y=0$,代入$(x-2)^2+y^2=9>1$故$p\nRightarrow q$,只有$p\Rightarrow r$.

像(5,0)这样的特例,我们称为反例,它是否定一个命题的锐利武器,是判断命题真伪的试剂,整个数学就是在构造证明与寻找反例中发展壮大的.

由$p\Rightarrow r$知$\{(x,y)\mid(x-3)^2+4y^2\leqslant 4\}\subseteq\{(x,y)\mid y<2ax\}$

即在x,y满足$(x-3)^2+4y^2\leqslant 4$的条件下,$y<2ax$恒成立.

令$(x-3)^2+4y^2=R^2(0\leqslant R\leqslant 2)$,

则$x-3=R\cos\theta,\quad 2y=R\sin\theta$,

即$x=3+R\cos\theta>0,\quad y=\dfrac{R}{2}\sin\theta$,

故$2a>\dfrac{y}{x}=\dfrac{R\sin\theta}{6+2R\cos\theta}$.

$2a$应大于$t=\dfrac{R\sin\theta}{6+2R\cos\theta}$的最大值,

将$t=\dfrac{R\sin\theta}{6+2R\cos\theta}$通分得:

$R\sin\theta-2Rt\cos\theta=6t$,

$R\sqrt{1+4t^2}\sin(\theta+\varphi)=6t$,

$|6t|=R\sqrt{1+4t^2}|\sin(\theta+\varphi)|\leqslant R\sqrt{1+4t^2}$,

$4t^2\leqslant\dfrac{R^2}{9-R^2}=\dfrac{9}{9-R^2}-1\leqslant\dfrac{4}{5}$,

$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\leqslant t\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{5},\quad 2a>\dfrac{\sqrt{5}}{5},\quad a>\dfrac{\sqrt{5}}{10}$,

故p是q或r的充分条件为$a>\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

第二章 函数

第一节　函数与反函数

知识再现，正本讲课

1. 设 A、B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的每一个元素 a，在集合 B 中都有惟一的一个元素 b 与它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f:A\to B$. 元素 a 叫元素 b 的原像，元素 b 叫元素 a 的像.

2. 设 A，B 是非空数集，从 A 到 B 的映射就是从 A 到 B 的函数，记作：$y=f(x)$，$x\in A$.

3. 函数的三要素：定义域、值域和对应法则. 其中定义域是灵魂，对应法则是核心，值域由定义域和对应法则决定，研究函数必须遵循“定义域优先”原则.

4. $y=f(x)$ 的定义域为 A，值域为 B，当且仅当值域 B 中每个元素在定义域 A 中都有且只有一个原像时，函数 $y=f(x)$ 才有反函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in B$.

求 $y=f(x)(x\in A)$ 的反函数的一般步骤：

(1) 求 $y=f(x)(x\in A)$ 的值域 B；

(2) 解关于 x 的方程 $f(x)=y$ 得出：$x=f^{-1}(y)$；

(3) 互换 x,y 得到：$y=f^{-1}(x)$；

(4) 确认 $y=f(x)(x\in A)$ 的反函数：$y=f^{-1}(x)(x\in B)$.

5. 原函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的关系：

(1) 对应关系：$a \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} b$. 即：$f[f^{-1}(x)]=x(x\in B)$；$f^{-1}[f(x)]=x(x\in A)$；

(2) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域 A、值域 B 对调；

(3) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称；

(4) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 单调性相同.

思路分析，总结评注

例 1：已知 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{-1,0,1\}$.

(1) 从 A 到 B 的映射 $f:A\to B$ 有多少个？

(2) 若映射 $f:A\to B$ 满足：$f(a)+f(b)+f(c)=0$. 这样的映射 $f:A\to B$ 有多少个？

【分析】 (1) 映射 $f:A\to B$ 是一种特殊的对应，它应该满足什么条件？

(2) $f(a)+f(b)+f(c)=0$，或者 $f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 三个都是零，或者三个分别取不同的值.

从 A 到 B 的映射 $f:A\to B$ 有 $3^3=27$ 个，其中满足 $f(a)+f(b)+f(c)=0$ 的映射有 $1+A_3^3=7$ 个.

【评注】 ***A 有 n 个元素，B 有 m 个元素，那么从 A 到 B 的不同映射共有 m^n 个.***

例 2：如图 2.1.1，动点 P 从边长为 a 的正方形 $ABCD$ 的顶点 B 开始，顺次经 C、D 到达点 A，用 x 表示点 P 的行程，y 表示 $\triangle ABP$ 的面积 $y=f(x)$，求 $f(x)$ 的解析式.

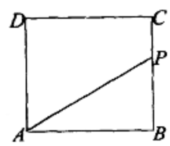


图 2.1.1

【分析】 三角形 $\triangle ABP$ 的面积与点 P 所在的位置有关，用行程 x 表示 y 时应根据点 P 的位置而分类处理.

$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}ax & (0\leqslant x\leqslant a)\\ \dfrac{1}{2}a^2 & (a<x\leqslant 2a)\\ \dfrac{1}{2}a(3a-x) & (2a<x\leqslant 3a)\end{cases}$$