新课标

同一堂课

高效全程导学

GAOXIAO QUANCHENG DAOXUE

丛书总主编：薛金星

配套北京师范大学出版社实验教科书

高中数学

必修2

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS
二十一世纪出版社
21st Century Publishing House

新课标

同一堂课

高效全程导学

Gaoxiao Quancheng Daoxue

丛书主编：薛金星

配套北京师范大学出版社实验教科书

高中数学

必修 2

主　编：刘　明
编　委：刘　明　吴兆丰

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS
二十一世纪出版社
21st Century Publishing House

同一堂课·高效全程导学

高中数学·必修②

配套北京师范大学出版社实验教科书

出版:21 世纪出版社

地址:江西省南昌市子安路 75 号　　邮编:330009

发行:北京白鹿苑文化传播有限公司

印刷:北京季蜂印刷有限公司

版次:2005 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

开本:880×1230 毫米　1/16　印张:5

书号:ISBN 7-5391-3076-8

定价:7.50 元

前言

同学们,《高中新课标高效全程导学》丛书和大家见面了,它作为你学习的良师益友,将伴随你度过高中三年宝贵的学习时光。

随着课程改革的不断深化和新教材在全国范围的使用,新的教育理念日益深入人心,新的课程标准也得到认真贯彻。为适应新的学习需要,我们精心组织编写了这套丛书。编写的宗旨是"导学"——激发兴趣,启迪探究,拓展认知,锤炼能力;编写的体例是"全程"——与教材同步,以单元(章)为大单位,以课(节)为小单位,按课前、课中、课后三个学习阶段,设三个模块,每个模块设若干栏目,对同学们应掌握的知识和应具备的能力进行指导和训练。随着这些模块和栏目的日修月炼,教材所包含的丰富内容,将如"好雨知时节"那样,"润物细无声"地化为同学们的"知识与技能,过程与方法,情感态度与价值观"。

第一模块是"预而立之"。中国有古训"凡事预则立,不预则废"。就是说不论做什么事情,预先做好准备,才能成功;不预先做好准备,就会失败。学习当然也如此,课前的预习是一个重要环节。做好课前预习,课堂上才能充分开展师生间的互动和交流,收到好的学习效果。"预而立之"设两个栏目:一是[课标导航]。本栏目将帮助同学们明确学习目标,知道学习精力应往哪儿使;同时在学习目标引导下,收集相关信息,养成关注信息的习惯和处理信息的能力;二是[自学引领]。本栏目将帮助同学们创设自学情景,指导自学方法,培养终身受益的自学能力,同时也为提高课堂学习效率奠定良好基础。

第二模块是"博而学之"。《中庸》中说:"博学之,审问之,慎思之,明辨之,笃行之。"这里论述的是学习过程中必须把握住的几点要领:要广泛地学习知识,详尽地探究原理,慎重地思考得失,明确地辨别正误,切实地进行实践。把握住这几点,课堂学习效果自然会好。本模块设四个栏目:一是[知识窗口]。帮助同学们掌握本课(节)应知应会的基础知识,通过[知识窗口]认识世界;二是[要点探究]。引领同学们深入探究本课(节)的重点和难点,整体把握教材内容;三是[例题精析]。选择有代表性的典型例题,进行解说,指明思路,训练思维;四是[互动平台]。通过提出若干思考题进行师生间、同学间互动交流,总结知识规律和解决方法。本模块需要申明两点:一是每个学科都有各自的特点,因而所设栏目可能因学科不同而有所变动;二是课堂学习是以教师为主导进行的,同学们要在本模块所设栏目引领下,很好地配合教师的教学。

第三模块是“学而习之”。《论语》开篇第一句说：“子曰：学而时习之，不亦说乎！”课后复习，不仅能巩固所学知识，而且能温故而知新，提升学习质量，的确是学习生活中必不可少的一步。因而“学而习之”是本丛书的重点模块，设三个栏目：一是[达标演练]。旨在巩固已学过的知识，同时也是自我评价，测试一下自己是否达到了“预而立之”所提出的学习目标；二是[能力提升]。本栏目所列练习题是[达标演练]题的延伸和深化，培养探究精神，提高灵活运用所学知识的能力；三是[拓展创新]。本栏目所列习题，是在以上两类习题基础上的拓展，有一定难度，思维空间也更为广阔，适于创新意识的培养和创新能力的提高。

在以上三个模块之外，本丛书大部分科目在每个单元(章)之后还配置了[单元评价]，每册书之后配置了[综合评价]。这些练习题更注重上、中、下三个档次题的难度搭配，习题内容也更注重联系同学们的生活经验，联系社会热点问题，联系当代科技发展的前沿知识，其题型、内容、难度都极力向高考题拉近。同学们只要认真做好这些练习题，实质上就是进行一次次高考的实战演习。

同学们，这套丛书由全国各地最富有教学经验的老师们编写，他们了解同学们的实际，熟知学科知识的体系和结构，也洞悉高考改革的趋向。同学们只要随身携带这套丛书，就必将起到你行进中的手杖和指示灯的作用。当你顺利步入高等学府的殿堂时，这套丛书仍会是你学习生活中永远的记忆。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录　同一堂课高效全程导学·数学

CONTENTS

目　录　同一堂课高效全程导学·数学

第一章 立体几何初步

第一节　简单几何体

课标导航

了解简单旋转体和简单多面体的有关概念.

自学引领

1. 什么是旋转体？举例说明.

2. 什么是多面体？举几个简单多面体的例子.

要点探究

1. 简单旋转体

(1)旋转体有关的概念

旋转面：一条平面曲线绕着它所在平面的一条定直线旋转所形成的曲面.

旋转轴：这条定直线叫做旋转轴，简称轴.

母线：这条曲线叫做旋转面的母线.

旋转体：封闭的旋转面所围成的几何体.

(2)球

①球面：一个半圆绕其直径所在直线旋转一周所形成的曲面.球面和圆很类似，实际上我们可类比圆来研究球面的性质.

球体：球面所围成的几何体，简称球.

大圆：球面被经过球心的平面截得的圆叫做大圆，如图1—1(2)所示.

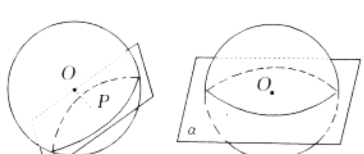


图 1—1

小圆：不经过球心的平面截球面得的圆如图1—1(1)所示.

把地球看作一个球时，经线就是球面上从北极到南极的半个大圆，赤道是一个大圆，其余纬线都是小圆.

球面距离：球面上过两点的大圆在这两点间的劣弧的长度.

②球面的性质

a. 球面被平面所截，其截面是圆面.(如图1—1)

b. 球心与截面圆心的连线与截面垂直，如图1—1(1)中$OP\perp\alpha$.

(3)圆柱、圆锥、圆台

①圆柱、圆锥、圆台可以分别看作以矩形的一边、直角三角形的一直角边、直角梯形中垂直于底边的腰所在直线为旋转轴，将其余各边旋转一周形成的曲面所围成的几何体(如图1—2).

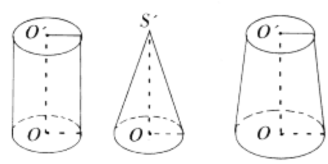


图 1—2

在旋转轴上的这条边的长度叫做这个几何体的高；垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做这个几何体的底面；不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做这个几何体的侧面；无论旋转到什么位置，这条边都叫做侧面的母线.

圆柱、圆锥、圆台过轴的截面分别是矩形、等腰三角形、等腰梯形.

②圆柱、圆锥、圆台之间有何关系？

a. 平行于底面的平面截圆锥可以得到圆台.

b. 圆台的底面扩大或缩小可以得到圆柱或圆锥.

2. 简单多面体

(1)多面体：若干个平面多边形围成的几何体.

棱柱、棱锥、棱台是简单多面体.注：简单多面体是指表面经过连续变形可变为球面的多面体.

(2)棱柱

①棱柱的概念：两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，这些面围成的几何体叫作棱柱.请同学们注意底面、侧面、棱、侧棱、顶点、高等概念.图1—3中棱柱记作：棱柱$ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$.

②棱柱的分类

方法一：按底面多边形的边数分为：三棱柱、四棱柱、五棱柱……

方法二：按侧棱是否与底面垂直分为：

- 斜棱柱(如图 1－4)，
- 直棱柱
  - 正棱柱(如图 1－3)，
  - 其他直棱柱.

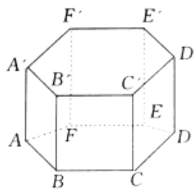


图 1－3

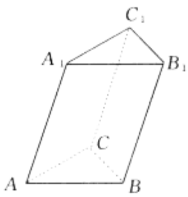


图 1－4

③长方体：长方体是一种重要的四棱柱，它的许多性质和长方形类似.

长方体的对角线性质：长方体的一条对角线的长的平方等于一个顶点上的三条棱长的平方和. 即 $l^2=a^2+b^2+c^2$. 相当于勾股定理在空间的推广.

(3)棱锥

①棱锥的概念

有一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形，这些面围成的几何体叫作棱锥. 请同学们注意底面、侧面、棱、侧棱、顶点、高、斜高等概念. 如图 1－5 中，SO 是棱锥的高，SD 是棱锥的斜高，此棱锥记作棱锥 $S-ABC$.

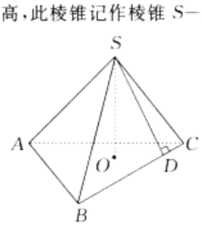


图 1－5

②棱锥的分类

方法一：按底面多边形的边数分为：三棱锥、四棱锥、五棱锥……

方法二：
- 正棱锥(底面为正多边形，各侧面全等)，
- 其他棱锥.

(4)棱台

①棱台的概念

用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面与截面之间的部分叫作棱台. 请同学们弄清底面、侧面、棱、侧棱、顶点、高、斜高等概念. 如图 1－6，注意 AA_1、BB_1、CC_1 交于 P，O_1O 是棱台的高，C_1D 是棱台的斜高.

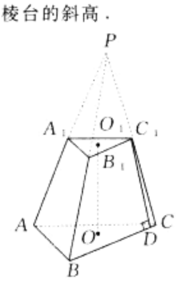


图 1－6

②棱台的分类

方法一：按底面多边形的边数分为：三棱台、四棱台、五棱台……

方法二：
- 正棱台(由正棱锥截的棱台)，
- 其他棱台.

③棱台问题常常采用补成棱锥从而转化为棱锥问题来解决.

④和圆柱、圆锥、圆台类似，棱台的底面扩大或缩小可得到棱柱或棱锥.

(5)生活中的几何体

生活中的几何体，大多由具有柱、锥、台、球等几何结构特征的物体组合而成. 如图 1－7 中墨水瓶表示的几何体是由两个圆柱和一个圆台组合而成.

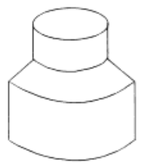


图 1－7

例题精析

例 1 画出下图 1－8 的 L 围绕直线 m 旋转一周形成的旋转面围成的几何体.

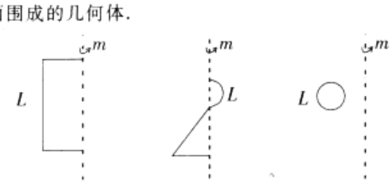


图 1－8

思路点拨 按照旋转体的产生方法进行推理，进而画出图形.

规范解答

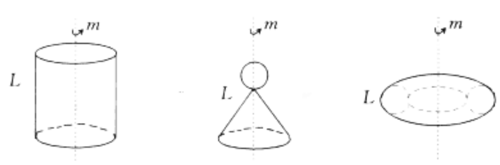


图 1－9

解题回顾 日常生活中，我们遇到的物体很多是旋转体，你能指出上述 3 种几何体的实际模型吗？制作陶器时，常常是制作一个个旋转面，同学们有机会不妨自己动手制作旋转体模型.

例 2 (1)给你一个正三角形的纸片，你能将它裁剪拼成一个正三棱锥吗？(如图 1－10)

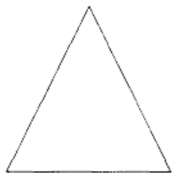
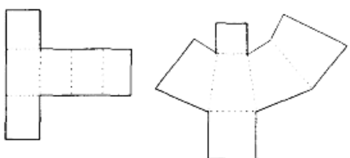


图 1—10

(2)按图 1—11 中的虚线折叠后，分别可拼成怎样的多面体？



①　②

图 1—11

思路点拨　题(1)：正三棱锥有 4 个面，所以要将此纸片分为 4 块，易想到分为全等的 4 块.

题(2)：可从各个面的形状出发进行分析.

规范解答　(1)

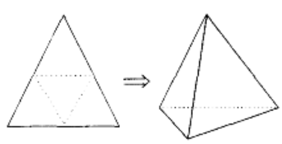


图 1—12

(2)图①可拼成长方体，图②可拼成正四棱台.

解题回顾　平面图形和空间图形的相互转化是培养空间想像能力的重要方法，同学们可多加训练.

互动平台

生活中的物体大多是由柱、锥、台、球构成的，它们之间相互联系，注意它们和长方形、三角形、梯形的类比.

达标演练

1. 直四棱柱是长方体吗？

2. 一长方体长、宽、高分别为 2、3、4，则此长方体的对角线长为多少？

3. 如图 1—13，长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中被截去一部分，其中 $EH\parallel A'D'$，剩下的几何体是什么？

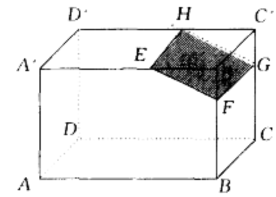


图 1—13

能力提升

4. 如图代表未折叠正方形的展开图，将其折叠起来，变成正方体后，图形应是图中的　（　　）

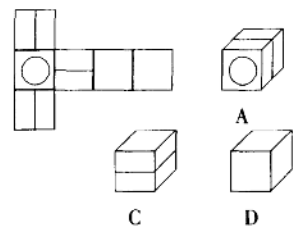


图1—14

5. 一只蚂蚁从一圆柱体表面 A 点处，爬至 B 点处(沿表面爬)，则蚂蚁的最短行程＝________.(圆柱底面半径为 r，高为 h)

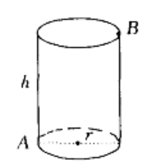


图 1—15

拓展创新

6. 如图 1—16，一正三角形纸片，你能将它裁剪拼成一个正三棱柱吗？

图 1—16

7. 类比圆的性质，试说出球可能有的性质.

第二节　三视图

课标导航

1. 巩固和提高初中有关三视图的学习和理解，运用投影知识，进一步掌握在平面上表示空间图形的方法和技能.

2. 能画出简单空间图形（长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等的简易组合）的三视图，能识别三视图所表示的立体模型，会使用材料（如纸板）制作模型.

自学引领

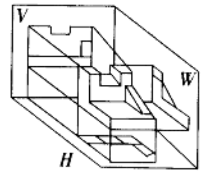
1. 怎样画简单空间图形的三视图？应注意什么？

2. 你能根据三视图想像并画出三视图所表示的立体模型吗？

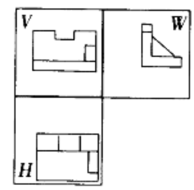
要点探究

1. 多面体正投影图

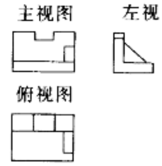
用正投影法绘制的图形称为正投影图. 为了使物体的投影能反映其某一方向的真实形状，通常总是使物体的主要平面平行于投影面. 但物体上垂直于投影面的平面，经投影后将积聚为直线段，所以仅凭物体的一个投影尚不能表达整个物体的完整形状. 为此，可设立多个投影面，并将物体分别向各个投影面进行投影，从而得到一组正投影图，以反映物体的完整形状. 例如，在图 2－1(a)中，取三个互相垂直的投影面 V、H、W，使它们形成一个互为直角的三个投影面. 投影时先使物体的主要平面尽量平行于某个投影面，再将物体分别向三个投影面进行投影，然后固定 V 面，令 H 面和 W 面分别绕它们与 V 面的交线沿图 2－1(a)中箭头所示方向旋转，直至与 V 面重合如图 2－1(b)所示. 这样，按照一定投影关系组合在一起的三个投影就能表达整个物体的形状. 通常，为使图样清晰，投影面的边界线并不画出，如图 2－1(c)所示。这样的投影图叫做视图. 其中将 V 面上的投影称为主视图；H 面上的投影称为俯视图；W 面上的投影称为左视图.



(a)多面投影的形成



(b)多面投影的展开



(c)三视图

图 2—1

2. 三视图的位置关系和投影规律

虽然在画三视图时取消了投影轴和投影间的连线，但三视图间的投影规律和相对位置关系仍应保持. 三视图的位置关系为：俯视图在主视图的下方、左视图在主视图的右方. 对应上图还可以看出：

主视图反映了物体上下、左右的位置关系，即反映了物体的高度和长度；

俯视图反映了物体左右、前后的位置关系，即反映了物体的长度和宽度；

左视图反映了物体上下、前后的位置关系，即反映了物体的高度和宽度.

由此可得出三视图之间的投影规律为

主、俯视图——长对正；主、左视图——高平齐；俯、左视图——宽相等.

3. 球的三视图

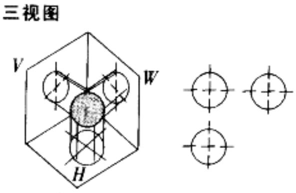


图 2—2

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

4. 圆柱的三视图

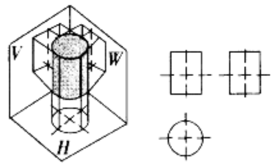


图 2—3

5. 圆锥的三视图

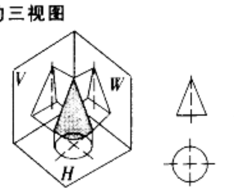


图 2—4

同学们思考棱柱、棱锥、棱台的三视图怎样画？

6. 组合体的三视图

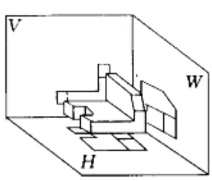


图 2—5

请同学们思考：棱柱、棱锥、棱台的三视图怎样画？

例题精析

例 1　画出下列组合体的三视图：

(1)

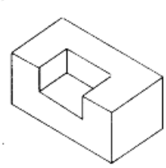


图 2—6

(2)

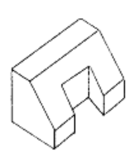


图 2—7

思路点拨　根据三视图作图规则作图.

规范解答

(1)

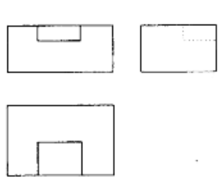


图 2—8

(2)

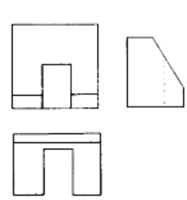
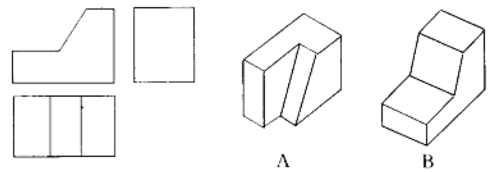


图 2—9

解题回顾　注意虚线和实线的不同含义.

例 2　由下面组合体的三视图，选出对应组合体的图形.



A　　B

图 2—10

思路点拨　方法一：由三视图想像对应的组合体的形状，再与选择一支进行对比.

方法二：由组合体的实物模型画出它们的三视图，再与已知三视图对比.

规范解答　B

解题回顾　三视图和实物之间的相互转化是提高空间想像能力的重要过程.

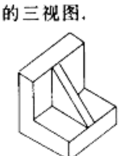
互动平台

空间物体的三视图实质上是物体在三个方向上的投影图，是空间和平面的相互转化的桥梁之一.

达标演练

1. 添线补全下面实物的三视图.

实物



三视图

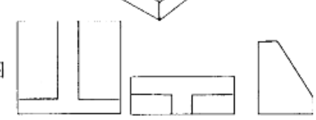


图 2—11

2. 图 2—12 中实物三视图有无错误？有则改之.

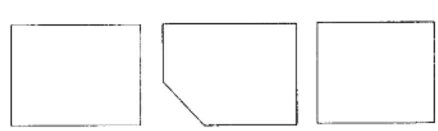
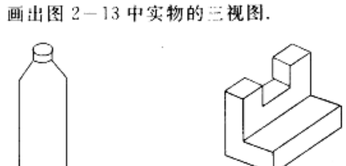


图 2—12

3. 画出图 2—13 中实物的三视图.



(1)　(2)

图 2—13

4. 说出图 2—14 中三视图对应的几何体.

图 2—14

能力提升

5. 图 2—15 是一空间几何体的三视图，尝试作出空间图形.

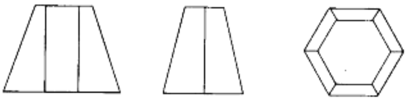


图 2—15

拓展创新

6. 选择一个复杂一点的实物模型，试作出其三视图.

第三节　直观图

课标导航

1. 了解空间图形的不同表现形式，直观地了解空间图形在平面上的表示方法.

2. 会用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图和长方体、正方体的直观图.

3. 会画正棱锥、正棱柱、圆柱的直观图.

自学引领

1. 怎样用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图？

2. 怎样画长方体、正方体、正棱锥、正棱柱、圆柱等空间图形的直观图？

要点探究

1. 直观图的概念

"直观图"是指把空间图形在平面内画得既有立体感，又能表达出图形各主要部分位置关系和度量关系的图形. 这种图虽然不是空间图形的真实状态，但具有较强的立体感和直观性，还能表达出空间物体的长、宽、高三个方向上主要的位置关系和度量关系，所以在生产和实际生活中有广泛的应用. 能否正确地画出水平放置的平面图形的直观图，直接影响到能否正确地表达出空间图形各主要部分的位置及度量关系，进而影响到命题的推理论证及计算的正确性. 因此，正确地画出直观图是十分重要的.

2. 直观图的画法

(1)水平放置的平面图形的直观图

"斜二测画法"是画水平放置的平面图形直观图的重要方法，是我们画空间图形的基础. "斜"是指将原本互相垂直的直线或线段画成相交成 45°或 135°角，"二测"是长度的度量形式，是指在已知图形的直观图中，原来水平的线段(横向)长度不变，原来竖直方向(纵向)的线段长度减半.

例如，如图 3—1 水平放置的正方形 $ABCD$ 的直观图如图 3—2，此平行四边形的锐角是 45°，横边是邻边长的 2 倍.

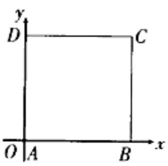


图 3—1

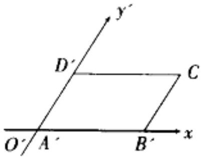


图 3—2

(2)空间图形的直观图的画法

在水平放置的平面图形直观图的基础上，我们可作一些空间图形的直观图.

例如,在图 3－2 的基础上我们可以画出金字塔的模型. 如图 3－3 所示. 注意线段 PD、DA、DC 是被其他面遮住的,应画成虚线.

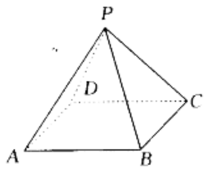


图 3－3

你能借助实例或模型在图 3－2 的基础上画一些空间图形吗? 如:直线和此平面相交、垂直、平行,另一平面和此平面相交、垂直、平行,三个平面两两垂直等,试试看! 同学们在学习中要多运用身边的实物和模型(教室、桌面、笔、手指等),注意从模型到图形,再从图形到模型,不断培养空间想像能力.

3. 注意直观图与其他问题的联系

要注意水平放置的平面图形的直观图与正视图的互化、空间图形的直观图与三视图的互化.

例题精析

例 1　(1)画棱长为 2cm 的正方体的直观图.

(2)如图 3－5(1),$\triangle A'B'C'$ 是水平放置的平面图形的直观图,试画出原平面图形 $\triangle ABC$.

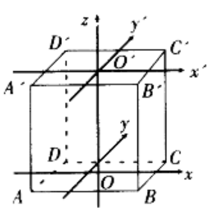


图 3—4

思路点拨　按照水平放置的多边形的直观图的画法步骤,并注意运用.

规范解答　(1)①作水平放置的正方形的直观图 $ABCD$,使 $\angle BAD=45°$,$AB=2\text{cm}$,$AD=1\text{cm}$.

②过 O 作 z 轴,使 z 轴垂直于平面 $ABCD$,分别过点 A、B、C、D 作平面 $ABCD$ 的垂线,沿 z 轴的正方向取 $AA'=BB'=CC'=DD'=2\text{cm}$.

③连结 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'A'$,得到的图形就是所求的正方体直观图. 如图 3－4.

(2)根据斜二测画法可知,先把成 45°角的 x'、y' 轴"复原"为互相垂直的 x 轴、y 轴. 接着"复原"各个顶点,在 x' 轴上或平行于 x' 轴的线段相应地画在 x 轴上或平行于 x 轴,长度不变;在 y' 轴上或平行于 y' 轴的线段相应地画在 y 轴上或平行于 y 轴,但长度"复原"为 2 倍. 即得原平面图形 $\triangle ABC$. 如图 3－5(2).

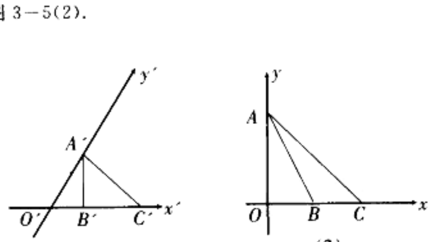


图 3—5

解题回顾　1. 用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图是画出空间图形的直观图的基础. 画图的关键是确定多边形的顶点位置.

圆的直观图,课本上采用了斜二测画法,运用正多边形无限逼近思想,但画出的直观图看起来不正. 所以常用其他画法,例如:正等测画法,画出来的是椭圆. 实际上我们可借助椭圆模板来画图.

2. 已知直观图,也要求能画出原图. 题 2 中画图的重点也是如何在平面 xOy 内定出点 A.

例 2　已知几何体的三视图如图 3－6,用斜二测画法画出它的直观图.

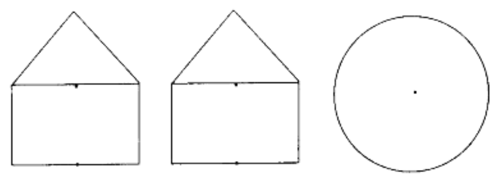


图 3—6

思路点拨　根据几何体的三视图可知,该几何体是由上面一个圆锥和下面一圆柱构成,并且圆锥的底面与圆柱的上底面重合,所以先画出下面的圆柱,再画出上面的圆锥.

规范解答　(1)画圆柱的下底面圆的直观图 $\odot O$(用椭圆模板).

(2)过 O 作 Oz 轴,使 $Oz\perp\odot O$ 所在的平面. 在 OZ 轴上取 O',使 OO' 等于三视图中的相应高度,过 O' 作 $O'x'\parallel Ox$,$O'y'\parallel Oy$,在 $x'O'y'$ 中作圆柱的上底面圆的直观图 $\odot O'$.

(3)在 Oz 轴上取 P,使 PO' 等于三视图中圆锥的高度.

(4)连结 PA'、PB'、AA'、BB',擦去辅助线,遮住的线改成虚线,成图.(图 3－7)

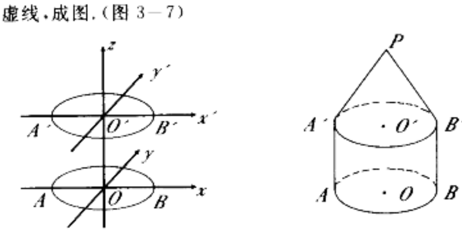


图 3—7

解题回顾　几何体的三视图和直观图之间联系密切,注意两者的相互转化.

互动平台

水平放置的平面图形直观图与正视图,空间图的直观图与三视图之间的关系是什么? 各有什么优点?

达标演练

1. 关于"斜二测"直观图的画法，以下说法不正确的是（　　）

A. 原图形中平行于 x 轴的线段，其对应线段平行于 x' 轴，长度不变

B. 原图形中平行于 y 轴的线段，其对应线段平行于 y' 轴，长度变为原来的 $\frac{1}{2}$

C. 画与直角坐标系 xOy 对应的 $x'O'y'$ 时，$\angle x'O'y'$ 必须是 $45°$

D. 在画直观图时，由于选轴的不同，所得的直观图可能不同

2. 在右图中画出图 3－8 中水平放置的四边形 $OABC$ 的直观图.

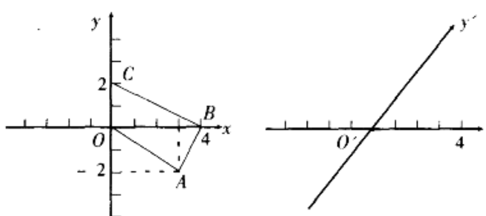


图 3—8

3. 用斜二测画法画出长、宽、高分别为 5cm、4cm、3cm 的长方体的直观图.

能力提升

4. 关于"斜二测"直观图的画法，如下说法正确的是（　　）

A. 等腰三角形的直观图仍为等腰三角形

B. 梯形的直观图可能不是梯形

C. 正方形的直观图为平行四边形

D. 正三角形的直观图一定为等腰三角形

5. 图 3－9 中的直观图所表示的图形是（　　）

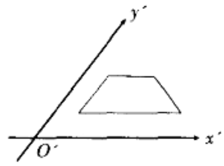


图 3—9

A. 任意梯形　　B. 直角梯形

C. 任意四边形　　D. 等腰梯形

6. 画三个两两垂直的平面构成的空间图形的直观图.

拓展创新

7. 图 3－10 是水平放置的△ABC 的直观图，由图判定原三角形中 AB、BO、BD、OD 由小到大的顺序为________.

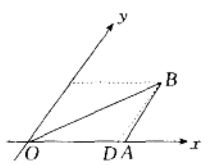


图 3－10

8. 图 3－11 是一个奖杯的三视图，试画出它的直观图.

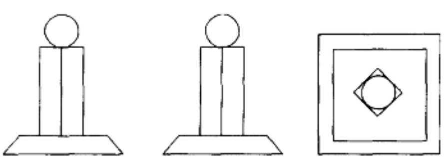


图 3—11

第四节　空间图形的基本关系与公理

课标导航

1. 学会观察长方体模型中的点、线、面之间的关系，并结合长方体模型，掌握五类位置关系及其有关概念.

2. 掌握平面的基本性质（公理 1、2、3）.

3. 掌握公理 4 和等角定理，并会运用它们解决问题.

4. 培养和发展空间想像能力、运用图形语言进行交流的能力、几何直观能力.

5. 通过典型例子的学习和自主探索活动，理解数学概念和结论，体会蕴含其中的数学思想方法.

自学引领

1. 空间中点线、点面、线线、线面、面面分别有哪些关系？举例说明.

2. 公理 1 至公理 4 和等角定理分别是什么？各有什么用？

要点探究

一、空间图形的基本关系

1. 点线关系：$\begin{cases}\text{点在线上（记作：}A\in a\text{），}\\ \text{点在线外（记作：}B\notin a\text{）.}\end{cases}$

2. 点面关系：$\begin{cases}\text{点在面内（记作：}A\in \alpha\text{），}\\ \text{点在面外（记作：}B\notin \alpha\text{）.}\end{cases}$

3. 线线关系：

$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{相交（记作：}a\cap b=P\text{）}\\ \text{平行（记作：}a/\!/ b\text{）}\end{array}\right\}\text{共面，}\\ \text{异面（记作：}a,b\text{ 异面）}\cdots\text{不共面.}\end{cases}$

（图 4－1 是异面直线的三种常见的表示方法）

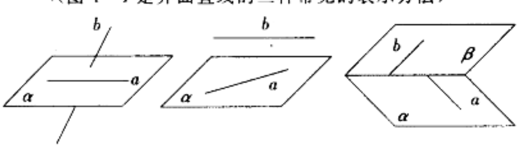


图 4—1

4. 线面关系：

$\begin{cases}\text{线在面内（记作：}a\subsetneqq\alpha\text{），}\\ \left.\begin{array}{l}\text{线面相交（记作：}a\cap\alpha=P\text{）}\\ \text{线面平行（记作：}a/\!/\alpha\text{）}\end{array}\right\}\text{线不在面内.}\end{cases}$

5. 面面关系：$\begin{cases}\text{平行（记作：}\alpha/\!/\beta\text{），}\\ \text{相交（记作：}\alpha\cap\beta=l\text{）.}\end{cases}$

空间图形的基本元素是点、直线、平面. 从运动的观点看，点动成线，线动成面，从而可以把直线、平面看成是点的集合，因此它们之间的关系除了用文字和图形表示外，还可借用集合中的符号语言来表示. 规定直线用两个大写的英文字母或一个小写的英文字母表示，点用一个大写的英文字母表示，而平面则用一个小写的希腊字母表示.

二、空间图形的公理及等角定理及用途

1. 公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

用符号表示为 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，则有 $a\subsetneqq\alpha$.（如图 4－2）

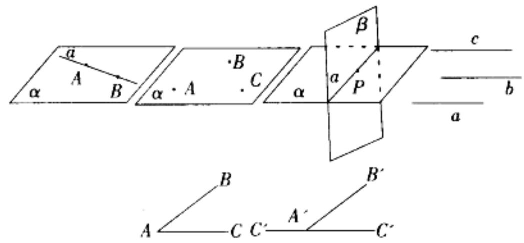


图 4—2

2. 公理 2：经过不在同一条直线上的三个点，有且只有（确定）一个平面.

用符号表示为 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，$C\in\alpha$，则有 A，B，C 三点确定平面 α.（如图 4－2）

公理 2 是确定平面的依据. 由公理 2，易得过直线和直线外一点，或过两条相交（或平行）直线有且只有一个平面.

确定平面是将空间图形问题转化为平面图形问题的重要方法，而将空间图形问题转化为平面图形问题是研究空间图形问题的基本思想.

3. 公理 3：如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

用符号表示为 $P\in\alpha$，$P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=a$，且 $P\in a$.（如图 4－2）

公理 3 是判定两平面相交的依据，也是判定点在直线上的依据，从而可证"点共线"、"线共点".

4. 公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

用符号表示为 $a/\!/b$，$b/\!/c$，则 $a/\!/c$.（如图 4－2）

公理 4 说明空间中直线平行具有传递性.

5. 等角定理：空间中，如果两个角的两边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.

用符号表示为 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB/\!/A'B'$、$AC/\!/A'C'$，则 $\angle BAC=\angle B'A'C'$ 或 $\angle BAC+\angle B'A'C'=180°$.（如图 4－2）

等角定理是判定空间两角相等的依据.

例题精析

例 1 如图 4－3，求证：分别与异面直线 AB 和 CD 同时相交的两条直线 AC、BD 既不平行也不相交.

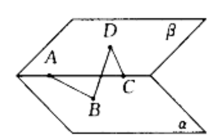


图 4－3

思路点拨 既不平行也不相交的两条直线就是异面直线. 证明两条直线是异面直线常用反证法.

规范解答 证明：假设 AB 和 CD 平行或相交，则 AB 和 CD 可确定一个平面 α，则 $AB\subsetneqq\alpha$，$CD\subsetneqq\alpha$，故 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，$C\in\alpha$，$D\in\alpha$. 这与已知条件矛盾. 所以 AB 和 CD 平行或相交不成立，即 AB 和 CD 既不平行也不相交.

解题回顾 1. 反证法的基本步骤：反设、归谬、结论. 归谬的方式有：与已知条件矛盾、与定理或公理矛盾、自相

矛盾.

2. 若将题改为:"分别与两条异面直线都相交的两条直线是异面直线吗?"表面上看和原题一样,实质并不同. 根据原题中的图可得:与两条异面直线都相交的两条直线的交点不重合,而变题则可以. 所以,变题的答案是:"异面或相交".

例 2 如图 4—4,空间四边形 $ABCD$,E、F、G、H 为所在边上的点,且 $EH\cap FG=P$,求证:点 P 在 BD 所在直线上.

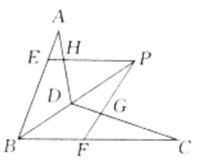


图 4—4

思路点拨 要证 P 在直线 BD 上,而直线 BD 是平面 ABD 和平面 BCD 的交线. 根据公理 3,只要证 P 既在平面 ABD 上又在平面 BCD 上.

规范解答 $\because E\in AB$,

$AB\subsetneq$ 平面 ABD,

$\therefore E\in$ 平面 ABD.

同理 $H\in$ 平面 ABD,

$\therefore EH\subsetneq$ 平面 ABD.

$\because EH\cap FG=P$, $\therefore P\in EH$.

$\therefore P\in$ 平面 ABD,

同理 $P\in$ 平面 BCD,

而平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$,

$\therefore P\in$ 直线 BD.

变题 1 已知部分同例 2,求证:B、D、P 三点共线.

思路点拨 要证点共线,根据公理 3,只要证这些点都在某两个相交平面的交线上,本题 B、D 已在平面 ABD 和平面 BCD 的交线上,只要证 P 在直线 BD 上,即转化为例 2.

变题 2 已知部分同例 2,求证:EH、BD、FG 三线共点.

思路点拨 要证线共点,取其中两条直线,证明它们交于一点(此题已知 $EH\cap FG=P$),再证此点在其他直线上,即转化为例 2.

变题 3 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,A_2、A_3 分别是棱 BB_1 和 BC 上的点(如图 4—5),过 A_1、A_2、A_3 作平面 α,求作平面 α 截正方体所得的截面图形.

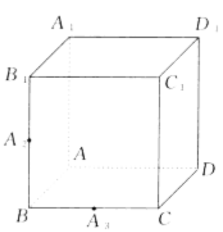


图 4—5

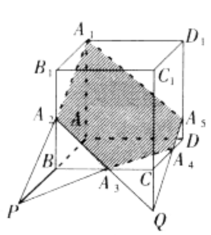


图 4—6

思路点拨 要作出平面 α 截正方体所得截面图形,只要作出平面 α 与正方体各面的交线. 显然,A_1A_2、A_2A_3 分别是平面 α 与平面 A_1B_1BA、平面 B_1C_1CB 的交线. 平面 α 与平面 $ABCD$ 的交线怎样作呢? 它们已有一公共点 A_3,还需第二个公共点. 直线 $A_1A_2\cap$ 直线 $AB=P$,由例 2 知,P 在平面 α 和平面 $ABCD$ 的交线上. 连结 PA_3 延长交 CD 于 A_4,则 A_3A_4 是平面 α 和平面 $ABCD$ 的交线. 同理可作平面 α 和平面 C_1CDD_1 的交线 A_4A_5,连结 A_1A_5,得截面图形为图 4—6 中的五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$.

思考 正方体的截面的形状可能有哪些?(可用正方体的水槽盛水实验辅助思考)

变题 4 交于点 P 的三条直线 a、b、c 与直线 d 都相交,且直线 d 不过 P 点,求证:a、b、c、d 共面.(如图 4—7)

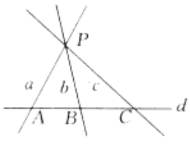


图 4—7

思路点拨 要证线共面,和证点共线方法类似,先设两条直线相交,根据公理 2,可知这两条直线共面,再证其他直线也在此平面内.

规范解答 设 d 与 a、b、c 分别交于 A、B、C,

$\because$ 直线 d 和 a 相交于 A,

$\therefore$ 过 d 和 a 可以确定平面 α,

$\because P\in a, B\in d$,

$\therefore P\in\alpha, B\in\alpha$. $\therefore$ 过 P、B 的直线 b 在平面 α 内,

同理,直线 c 在平面 α 内,

$\therefore$ 直线 a、b、c、d 共面 α.

解题回顾 证点在两平面的交线上,只要证该点是这两个平面的公共点. 证点共线,先取其中两点共线,再证其他点在该线上. 证线共点,先证其中两条线共点,再证该点在其他线上. 证线共面,先证其中两条线共面,再证其他线在该平面内. 证明变题 4 时要防止"$\because a$、b 共面,b、c 共面,c、d 共面,$\therefore a$、b、c、d 共面"的错误,因为 a、b 共的面与 b、c 共的面不一定相同.

例 3 已知正方体中,交于一点的三条棱分别为 PR、PN、PQ,在这三条棱上分别取点 A、B、C(图 4—8),试分析$\triangle ABC$ 的形状并证明你的结论.

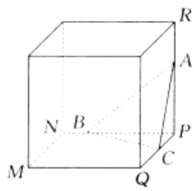


图 4—8

思路点拨 研究三角形的形状,一般是指三角形是否为等边三角形、等腰三角形、直角三角形、锐角三角形、钝角三角形等. 由观察可知,等边或等腰不可能是$\triangle ABC$ 的特点,因为若 $PA=PB=PC$,则$\triangle ABC$ 为等边三角形,若 PA、PB、PC 中有两个相等,则$\triangle ABC$ 为等腰三角形,若 PA、PB、PC 互不相等,则$\triangle ABC$ 为三边互不相等的三角形,由此,猜想$\triangle ABC$ 的形状与角的特征有关. 判断一个角是钝角、直角或锐角,通常用余弦定理.

规范解答 设 $PA=a, PB=b, PC=c$,$a,b,c\in\mathbf{R}^+$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAB$ 中,$AB^2=a^2+b^2$,同理 $BC^2=b^2+c^2$,$CA^2=c^2+a^2$.

$\because AB^2+AC^2-BC^2=2a^2>0$, $\therefore \angle BAC$ 为锐角.

同理,$\angle ABC$、$\angle ACB$ 也是锐角.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com