配套参考

普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

经济数学——微积分

学习辅导与习题选解

主编　吴传生　陈盛双

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十五"国家级规划教材配套参考书

经济数学——微积分
学习辅导与习题选解

主编 吴传生 陈盛双

参编 何 朗 陈东红 韩 华

万 源 朱慧颖

高等教育出版社

内容提要

本书是与吴传生主编的《经济数学——微积分》(高等教育出版社出版)配套使用的学习辅导与习题选解,主要面向使用该教材的教师和学生,同时也可供报考研究生的学生作为复习之用。

本书的内容按章编写。每章包括教学基本要求、典型方法与范例、习题选解三个部分,基本与教材同步。典型方法与范例部分是本书的核心内容,它是教师上习题课和学生自学的极好材料。通过对内容和方法进行归纳总结,把基本理论、基本方法、解题技巧、释疑解难、数学应用等多方面的教学要求融于典型方法与范例之中,注重对教材的内容作适当的扩展和延伸,注重数学与经济应用有机结合。习题选解部分选出了教材中一部分习题作出了解法提要,对一些富有启发性的习题,给出了较详细的分析和解答。

本书内容丰富,思路清晰,例题典型,注重分析解题思路,揭示解题规律,引导读者思考问题,对培养和提高学生的学习兴趣以及分析问题和解决问题的能力将起到较大的作用。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学——微积分学习辅导与习题选解/吴传生,陈盛双主编.—北京:高等教育出版社,2006.5
ISBN 7-04-019375-2

Ⅰ.经... Ⅱ.①吴...②陈... Ⅲ.①经济数学-高等学校-教学参考资料②微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 060253 号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 张 志
责任绘图 郝 林 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 金 辉
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	潮河印业有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2006 年 5 月第 1 版
印 张	23.5	印 次	2006 年 5 月第 1 次印刷
字 数	440 000	定 价	24.60 元

物料号 19375-00

前　言

本书是与吴传生主编的普通高等教育“十五”国家级规划教材《经济数学——微积分》(高等教育出版社出版)配套使用的辅导教材,主要面向使用该教材的教师和学生,同时也可供报考研究生的学生作复习之用。

近几年来,我国的高等教育已经完成了从精英教育向大众化教育的转变,教育界和社会各方面对高等教育的质量十分关注。我们编写这本配套教材,主要是为了适应这种变化的形势,一方面满足学生学习微积分课程的需要,期望对保证和提高微积分课程的教学质量,对广大学生掌握微积分的基本思想起到一种辅导作用;另一方面也是为了满足不同层次的学生的学习需要,利用辅导教材这一比较灵活的形式,对教材的内容作适当的扩展和延伸,对在大众化教育的形势下如何培养具有创新精神的优秀人才的问题作出有益的探讨。

根据配套辅导教材的编写要求,本书的内容按章编写,基本与教材同步。每章包括教学基本要求、典型方法与范例、习题选解三个部分。

教学基本要求部分主要是根据教育部数学基础课程教学指导分委员会制定的经济管理类本科微积分课程的教学基本要求确定,同时也根据教学实际作了适当的修改。沿用惯例,按“理解”、“了解”或“掌握”、“会”的次序表示程度上的差异。

典型方法与范例部分是本书的核心内容,它是教师上习题课和学生自学的极好材料。其特色是:对内容和方法进行归纳总结,力图把基本理论、基本方法、解题技巧、释疑解难、数学应用等多方面的教学要求,融于典型方法与范例之中。范例具有典型性、示范性,有助于读者举一反三;范例的选取注重数学与实际应用(尤其是经济应用)相结合,注重对教材的内容作适当的扩展和延伸。范例中注重分析解题思路,揭示解题规律,引导读者思考问题,培养读者的理性思维能力以及分析问题和解决问题的能力。大多数例题后加以评注,以开拓思路。

习题选解部分选出了教材中一部分习题作出了解法提要,每章的总习题是为学有余力或准备考研的学生编写的,它们大多数是一些富有启发性的习题,书中给出了较详细的分析和解答。需要指出的是,我们希望读者认真学习课程的基本内容,先自行思考,自己解题,再与题解进行对照、比较,达到对问题的更深刻和更透彻的理解。如果不动脑筋独立思考,不亲自动手做题,而是照抄,那是绝对无益的。

本书由吴传生、陈盛双主编,参加编写的有:陈盛双(第一、三章),吴传生(第

二、十章)，何朗(第四章)，陈东红(第五、六章)，韩华(第七、八章)，万源(第九章)，朱慧颖(第十一章)。全书由吴传生统稿定稿。

本书的出版得到了高等教育出版社的领导和同志们的支持，得到了武汉理工大学教务处、理学院和数学系的支持与帮助，李艳馥、马丽二位同志为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此一并致谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正！

编者

2006.2

目　　录

第一章

函　　数

Ⅰ. 教学基本要求

1. 理解函数概念，掌握函数的表示法；
2. 理解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；
3. 理解复合函数和分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念；
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念；
5. 会建立简单应用问题中的函数关系；
6. 了解经济学中的常用函数.

Ⅱ. 典型方法与范例

一、求抽象函数的表达式

例 1　(1) 设 $f(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x, 0<x<1$，求 $f(x)$.

(2) 设 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}(x\neq 0, a^2\neq b^2)$，求 $f(x)$.

解　(1)

$$f(\sin^2 x)=1-2\sin^2 x+\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x},$$

令 $\sin^2 x=t$，则 $0<t<\sin^2 1$，

$$f(t)=1-2t+\frac{t}{1-t}=\frac{1}{1-t}-2t,$$

即 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-2x, 0<x<\sin^2 1$.

(2) 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则

$$af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct, \qquad ①$$

令 $x=t$,则

$$af(t)+bf\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{c}{t}, \qquad ②$$

由①,②解得
$$f(t)=\frac{c}{b^2-a^2}\left(bt-\frac{a}{t}\right),$$

故
$$f(x)=\frac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\frac{a}{x}\right).$$

例 2 $f(\ln|x|)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$,$\varphi(x)$的定义域为 $x<0$,且 $f[\varphi(x)]=e^x$,求 $\varphi(x)$.

分析 由 $f(\ln|x|)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$可求出 $f(x)$的表达式,再由方程 $f[\varphi(x)]=e^x$可求出 $\varphi(x)$.

解 令 $u=\ln|x|$,$x^2=e^{2u}$,因此

$$f(u)=\frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}.$$

由于 $f[\varphi(x)]=e^x$,从而得到关于 $\varphi(x)$的方程

$$\frac{e^{2\varphi(x)}-1}{e^{2\varphi(x)}+1}=e^x,$$

令 $t=e^{\varphi(x)}$,得到方程

$$\frac{t^2-1}{t^2+1}=e^x,$$

由此可求得 $t^2=\dfrac{e^x+1}{1-e^x}$,从而 $x<0$,且由 $t=e^{\varphi(x)}>0$ 可得

$$e^{2\varphi(x)}=\frac{e^x+1}{1-e^x},x<0,$$

两边取对数得 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{e^x+1}{1-e^x},x<0.$

例 3 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$,$\varphi(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$求 $f[\varphi(x)]$.

分析 对于分段函数的复合要注意自变量的变化范围,弄清在不同分段内的复合过程.

解 (i) 当 $x<0$ 时,$\varphi(x)=x$,则

$$f[\varphi(x)]=f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)=\frac{1}{2}(x-x)=0;$$

(ii) 当 $x\geqslant 0$ 时,$\varphi(x)=x^2$,则

$$f[\varphi(x)]=f(x^2)=\frac{1}{2}(x^2+x^2)=x^2.$$

故
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

二、讨论函数的基本性态

例 4 设 $f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数,若 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加,证明 $f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

分析 本题只需利用单调性的定义和函数奇偶性的定义即可得证.

证 对于任意的 $x_1,x_2\in(-l,0)$,设 $x_1<x_2$,则 $0<-x_2<-x_1<l$.因为 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加,而 $0<-x_2<-x_1<l$,所以 $f(-x_2)<f(-x_1)$.而 $f(x)$在$(-l,l)$内为奇函数,所以 $-f(x_2)<-f(x_1)$,有 $f(x_2)>f(x_1)$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,故 $f(x)$在$(-l,0)$内单调增加.

例 5 设 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数,$f(1)=a$,且对于任意 $x\in\mathbf{R}$,有
$$f(x+2)-f(x)=f(2),$$

(1) 试用 a 表示$f(2)$与 $f(5)$;

(2) 问 a 取何值时,$f(x)$是以 2 为周期的周期函数.

分析 (1) 充分利用恒等式 $f(x+2)-f(x)=f(2)$对于任意 x 都成立的条件,分别取 $x=-1,1,3$,再利用 $f(x)$是奇函数即可求得 $f(2)$及 $f(5)$.

(2) 利用(1)中的结果,再根据周期函数的定义可求出 a 值.

解 (1) 在
$$f(x+2)-f(x)=f(2) \qquad (※)$$
中,令 $x=-1$,则 $f(1)-f(-1)=f(2)$,而 $f(x)$为奇函数,故
$$f(2)=f(1)-[-f(1)]=2f(1)=2a.$$

在(※)中,令 $x=1$,则 $f(3)-f(1)=f(2)$,故
$$f(3)=f(1)+f(2)=3f(1)=3a.$$

在(※)中,令 $x=3$,则 $f(5)-f(3)=f(2)$,故
$$f(5)=f(3)+f(2)=3a+2a=5a.$$

(2) 令 $f(2)=0$,即 $2a=0$,$a=0$ 时 $f(x+2)=f(x)$,对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立.故当 $a=0$ 时,$f(x)$是以 2 为周期的周期函数.

例 6 求函数 $y=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}-\dfrac{1}{2}$的值域,并说明它是否为有界函数.

分析 由 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$,利用 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 可得
$$x^2+2x+2\geqslant 2(x+1).$$

解 因为
$$\left|\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}\right|=\frac{2|x+1|}{(x+1)^2+1}\leqslant 1,$$
所以
$$-\frac{3}{2}\leqslant\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2},$$

故$\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right]$为所给函数的值域,由此知 $y=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}-\dfrac{1}{2}$为有界函数.

三、函数关系的建立

例 7　按照银行规定,某种外币一年期存款的年利率为 4.2%,半年期存款的年利率为 4.0%,每笔存款到期后,银行自动将其转存为同样期限的存款,设将总数为 A 单位货币的该种外币存入银行,两年后取出,问存何种期限的存款能有较多的收益,多多少?

分析　这是一个固定存款利滚利问题,即复利问题,只需弄清这笔存款经历了多少个存款周期即可.

解　(i) 设货币存一年期,则一年后货币总数为 $A(1+4.2\%)$,

两年后货币总数: $A(1+4.2\%)(1+4.2\%)=A(1+4.2\%)^2=1.085\,764A$.

(ii) 设货币存半年期,则半年期存款利率为 2.0%,

半年后货币总数:$A(1+2.0\%)$,

一年后货币总数:$A(1+2.0\%)(1+2.0\%)=A(1+2.0\%)^2$,

一年半后货币总数:$A(1+2.0\%)^2(1+2.0\%)=A(1+2.0\%)^3$,

两年后货币总数: $A(1+2.0\%)^3(1+2.0\%)=A(1+2.0\%)^4=1.082\,432A$,

比较(i),(ii)知货币存一年期有较多收益,多 $0.003\,332A$.

例 8　某厂生产的手掌游戏机每台可卖 110 元,固定成本为 7 500 元,可变成本为每台 60 元.

(1) 要卖多少台手掌机,厂家才可保本(收回投资);

(2) 卖掉 100 台的话,厂家赢利或亏损了多少?

(3) 要获得 1 250 元利润,需要卖多少台?

分析　总成本 = 固定成本 + 可变成本,

总收益 = 总产量 × 价格,

总利润 = 总收益 − 总成本.

解　(1) 设厂家生产的台数为 x,则总成本 $C(x)=7\,500+60x$,总收益 $R(x)=110x$,令 $R(x)=C(x)$,$110x=7\,500+60x$,解得 $x=150$,故要卖 150 台,厂家才可保本.

(2)

$$C(100)=7\,500+60\times100=13\,500,\ R(100)=11\,000,$$
$$C(100)-R(100)=2\,500.$$

故卖掉 100 台的话,厂家亏损 2500 元.

(3) $L(x)=R(x)-C(x)=110x-7\,500-60x=50x-7\,500$,

令 $L(x)=1\ 250$，则 $50x-7\ 500=1\ 250$，解得 $x=175$．故要获得 1 250 元利润，需卖 175 台．

例 9　收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元，厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购 100 台售价就降低 1 元，但最低价为每台 75 元：

(1) 将每台的实际售价 P 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获的利润 L 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 1 000 台，厂方可获利润多少？

分析　因销售价格按不同的订购量而定，故销售收入、销售利润与订购量是分段函数的关系．

解　(1) (i) 当 $0\leqslant x<100$ 时，$P=90$．

(ii) 当 $x\geqslant 100$ 时，由题意，P 是 x 的一次函数．

设 $P(x)=ax+b$，当 $x=100$ 时，$P=90$，当 $x=200$ 时，$P=89$，故

$$\begin{cases}90=100a+b,\\89=200a+b,\end{cases}$$

解得 $a=-0.01$，$b=91$，故 $P(x)=91-0.01x$．但 $P\geqslant 75$，故 $91-0.01x\geqslant 75$，即 $x\leqslant 1\ 600$．故当 $100\leqslant x\leqslant 1\ 600$ 时，

$$P(x)=91-0.01x.$$

(iii) 当 $x>1600$ 时，$P=75$，故

$$P=\begin{cases}90, & 0\leqslant x<100,\\91-0.01x, & 100\leqslant x\leqslant 1\ 600,\\75, & x>1\ 600.\end{cases}$$

(2) (i) 当 $0\leqslant x<100$ 时，$P=90$，收益 $R(x)=P(x)x=90x$，成本 $C(x)=60x$，故利润

$$L(x)=R(x)-C(x)=90x-60x=30x.$$

(ii) 当 $100\leqslant x\leqslant 1\ 600$ 时，$P(x)=91-0.01x$，收益 $R(x)=(91-0.01x)x$，成本 $C(x)=60x$，故利润

$$L(x)=R(x)-C(x)=(91-0.01x)x-60x=(31-0.01x)x.$$

(iii) 当 $x>1600$ 时，$P=75$，收益 $R(x)=75x$，成本 $C(x)=60x$，故利润

$$L(x)=R(x)-C(x)=75x-60x=15x.$$

故利润

$$L=\begin{cases}30x, & 0\leqslant x<100\\(31-0.01x)x, & 100\leqslant x\leqslant 1\ 600.\\15x, & x>1\ 600\end{cases}$$

(3) 当 $x=1\ 000$ 时，