一本通

田 英 主编

高考数学

GAOKAO SHUXUE

一本通

最新最全面的考试信息

最及时最经典的应试指导

最根本最有效的能力提高

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高考数学一本通

主　编　田　英

副主编　李正文

参　编　杨静龄　郭树芬　崔兰乾　朱亚丽
于静静　陈清清　杨晓飞　王艳芳
王丽娜　孙成功　赵春燕　薛荣华
史雯莉　吴燕杰

机械工业出版社

本书是2006届高考学生所用新教材、新考纲的配套复习用书。

本书以先进的教育思想和新课程倡导的理念为指导,以采集高考备考研究成果和传递最新高考信息为宗旨,由资深的特、高级教师,一线名师,权威教育教研工作者共同编写。本书在最新高考趋势分析的基础上,讲解科目重点与难点,分析解题规律与方法,传授应试技巧与关键,注重拓展思路、提升能力,最大限度地发挥了一本书对读者在高中数学方面的应试辅导和能力提升作用,是高考备考复习的理想助手。

图书在版编目(CIP)数据

高考数学一本通/田英主编.—北京:机械工业出版社,2005.8
ISBN 7-111-16930-1

Ⅰ.高… Ⅱ.田… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料
Ⅳ.G634.83

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第078851号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
策划编辑:徐曙宁 责任编辑:石晓芬
封面设计:鞠 杨 责任印制:陶 湛

北京金明盛印刷有限公司

2005年8月第1版·第1次印刷
890mm×1240mm A5 12.375印张·386千字
定价:17.50元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
本社购书热线电话(010)68326294

前　言

本书是2006届高考学生所用新教材、新考纲的配套复习用书。

本书以先进的教育思想和新课程倡导的理念为指导，以采集高考备考研究成果和传递最新高考信息为宗旨，由资深的特、高级教师，一线名师，权威教育教研工作者共同编写。本书在最新高考趋势分析的基础上，讲解科目重点与难点，分析解题规律与方法，传授应试技巧与关键，注重拓展思路、提升能力，最大限度地发挥了一本书对读者在高中数学方面的应试辅导和能力提升作用，是高考备考复习的理想助手。

本书具有以下特点：

1.立足于最新颁布使用的《课程标准》的新精神，融合了2006年高考命题的最新动向，对照考纲，认真落实每个考点，深入分析了近年来全国各地高考的命题特征。

2.全面系统地总结命题的趋势和规律，并结合大量的、典型的、新颖的例题分析，拓展解题思路，总结解题技巧和方法，使学生真正做到融会贯通、举一反三。

3.紧紧抓住高考各学科的能力要点和知识点，做到突出重点，解决难点，大胆预测，准确定位，科学合理地帮助学生了解、掌握知识脉络，既便于储存，又便于提取应用；同时还科学有效地提出面对2006年高考的预测，极具参考价值。

4.最大限度地避免复习过程中的盲目性、随意性，以高考复习为主线，渗透方法，做到复习有方向，训练有目的，预测有依据。使学生真正做到有的放矢，在最短时间内扩大知识容量，提高应试技巧。

5.本着精讲精炼的原则，不搞题海战术，不用繁杂的习题充斥内容，本书每章、每节、每题都是编者群体智慧、点滴经验的汇总。

本书共分3篇：

第1篇，阐述了2005年大纲对数学学科的能力要求，2005年大纲在考试范围上所作的较大的调整，2005年大纲关于命题指导思想及其变化、题型和难度，2005年高考数学试题分析，2006年高考数学命题预测，2006年高考备考策略。

第2篇，透视《考试大纲》"纲"、"目"、要点，全面覆盖考点。其中每章内容包括：

【内容概述】点击高考考查要求，搜索命题奥秘，探索命题规律。

【考题示例】旨在帮助考生明确《考试大纲》要求，认真解读考点，做到有的放矢。轻松掌握高考的考查方式，准确把握高考脉搏，凸现高考走向。讲究题眼布局，有利于形成正确的解题思路，把握解题技巧，提高解题效率。

【备考训练】根据《考试大纲》要求和命题走向，为考生提供有针对性的专题练习，热点、重点、难点、薄弱点、易错点，面面俱到，以求事半功倍。

【轻松一刻】使学生在紧张的复习中，开心一笑，调节精神，放松心态，消除疲劳。

第3篇，精选试题，符合高考题型与能力要点，供考生考前训练，从而使考生在考前达到查缺补漏的目的。

我们热切期望同学们能够在高中数学的学习中掌握好的方法，并在2006年高考中取得理想的成绩。如果本书能够在这两个方面对同学们有所帮助，这将是编者们最大的宽慰。

除本册外，理科方面我们还编有《高考生物一本通》、《高考化学一本通》、《高考物理一本通》和《中考数学一本通》、《中学化学一本通》、《中考物理一本通》。齐建华老师在这七本书的编写过程中，承担了主要的组织编写工作，在此，深表谢意。

由于时间仓促，错误之处在所难免，恳请广大师生指正。

编者

2005年7月

目　录

第1篇 走进高考

第1章 命题趋势

2005年高考各套数学试题，贯彻了“在考查基础知识的同时，注重对数学思想方法的考查，注重对数学能力的考查”的命题指导思想，能很好地把握新教材高考的特点与导向，强化应用意识，倡导理性思维，体现创新意识的考查.

总体评价

一、重点内容突出

试卷考查的重点主要集中在高中数学的主干知识上，如函数和导数、数列、三角函数、不等式、解析几何、立体几何、概率与统计等.

二、试卷表现稳定

立足基础、突出能力. 出题严格遵照考纲，保持了整张试卷的稳定. 这一特点具体体现在试卷考查知识点既全面又重点突出；注重知识之间内在的联系与综合，在知识的交汇点设计试题这两个方面. 具体说来，试卷既注意了知识的覆盖面，又不回避知识重点，且重点知识常考常新，比如对数列、三角函数的考查；解析几何仍注重考查二次曲线与直线的位置关系；立体几何侧重于对线面垂直、空间距离、空间角的考查；函数与导数、平面向量与解析几何知识交汇点等.

三、稳中有新、考查能力

考题不仅考查考生对高中数学知识的掌握情况，而且考查他们在运用知识和方法的过程中所表现的数学能力和一般心理能力. 数学能力包括思维能力、运算能力、空间想象能力、实践能力和创新意识. 其中思维能力是数学能力的核心，实践能力和创新意识是一种综合能力，反映出思维的更高层次. 试题加大了对运算能力的考查，多数题目均需经过计算才能求出结果. 考生要正确解答试题不仅要计算准确，而且要运算熟练、合理、简捷. 这体现出对考生思维的敏捷性、灵活性和深刻性的考查.

“稳”体现在题型稳定、题目数量稳定、分值比例稳定等诸多方面，试卷依然是以能力立意命题，做到了重点知识重点考查. 比如函数、概率、数列等近几

年的考查比重都较大,今年这一特点依然体现在了试卷上.又比如解析几何仍是围绕二次曲线与直线的位置关系出题,立体几何同样突出对线面平行与垂直、空间距离和角等知识的考查.

"新"的一个显著体现就是,涉及到新教材中向量、概率与统计、导数这些新知识的题目保持较高比例.

四、试卷做来清新平和

题目表述简洁明快,应用题的背景通俗易懂、贴近生活,考生看后会增强自信心.

五、入口虽宽深入不易

试卷中档难度的题目较多,考题入口宽但深入不易,为考生提供了一个天高任鸟飞的竞争平台.大多数考生做题时"上手"比较容易,都能写上一些答案,但考生的实际能力决定了他能否继续做下去.所以说答题易但答完整、拿满分却难.因此试卷还是呈现出一定的可信区分度.

典型示例

一、紧紧把握新教材高考的动态,重视对新教材中新增内容的考查

教材中新增的简易逻辑、向量、线性规划、概率、统计、导数等方面的内容是现代数学的重要基础,它们蕴涵着极其丰富的数学语言、数学思想和数学方法,为学生提供了应用广泛的数学工具,这些内容在近几年新教材高考命题中得到了重视和充分体现.

【例 1】 (福建·文)已知 p: $a\neq 0$, q: $ab\neq 0$,则 p 是 q 的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

本题考查四种命题的关系,充分条件、必要条件和充要条件的概念以及逻辑推理能力.

答案:B

【例 2】 (吉林、黑龙江、广西——全国卷Ⅱ·文、理)点 P 在平面上做匀速直线运动,速度向量 $\boldsymbol{v}=(4,-3)$(即点 P 的运动方向与 v 相同,且每秒移动的距离为 $|\boldsymbol{v}|$ 个单位).设开始时点 P 的坐标为 $(-10,10)$,5 s后点 P 的坐标为 ( )

A. $(-2,4)$　　B. $(-30,25)$

C. $(10,-5)$　　D. $(5,-10)$

本题考查平面向量的坐标运算，以及向量知识在物理问题中的应用.

答案:C

【例3】 (福建·文、理)非负实数 x、y 满足 $\begin{cases}2x+y-4\leqslant 0\\x+y-3\leqslant 0\end{cases}$，则 $x+3y$ 的最大值为______.

本题考查二元一次不等式组表示的平面区域，求线性目标函数最优解等知识，考查数形结合思想的应用.

答案:9

【例4】 (四川、陕西、贵州、云南、新疆、宁夏、甘肃、内蒙古——全国卷Ⅲ·文、理)设甲、乙、丙三台机器是否需要照顾相互之间没有影响.已知某一小时内，甲、乙都需要照顾的概率为0.05，甲、丙机器都需要照顾的概率为0.1，乙、丙都需要照顾的概率为0.125.

(Ⅰ)求甲、乙、丙每台机器在这个小时内需要照顾的概率；

(Ⅱ)计算这个小时内至少有一台机器需要照顾的概率.

本题考查相互独立事件同时发生或对立事件有一个发生的概率的计算方法，考查运用概率知识解决实际问题的能力.

答案:(Ⅰ)0.2,0.25,0.5 (Ⅱ)0.7

【例5】 (江苏)在一次歌手大赛上，七位评委为歌手打出的分数如下：

9.4 8.4 9.4 9.9 9.6 9.4 9.7

去掉一个最高分和一个最低分后，所剩数据的平均值和方差分别为 ( )

A. 9.4,0.484　　B. 9.4,0.016

C. 9.5,0.04　　D. 9.5,0.016

本题考查总体分布的期望和方差，考查用统计知识解决实际问题的能力.

答案:D

【例6】 (北京·文、理)已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的单调递减区间；

(Ⅱ)若 $f(x)$ 在区间$[-2,2]$上的最大值为20，求它在该区间上的最小值.

本题考查导数在解决函数问题中的应用，考查运算能力和思维能力.

答案:(Ⅰ)$(-\infty,-1)$和$(3,+\infty)$ (Ⅱ)-7

二、突出知识的基础性和综合性，主干知识构成试卷的主体

各套试卷突出数学知识主干，以重点知识构建试题的主体.传统内容的代数部分着重考查函数、数列、不等式、三角函数等内容；立体几何部分着重考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的关系；解析几何部分着重考查直线

和圆锥曲线，特别是它们的位置关系．新增部分则注意结合向量、概率、导数等内容，既突出不同试卷内容考查的重点，又保证了试题的稳定性．试题综合程度提高了不少，很多题目都是在几个知识层面的交汇处命题，其中包括几种情况的综合：传统学习内容与新课程增加内容的综合，数学各分支学科内容之间的综合，解决问题时多种能力的综合．这就要求考生能灵活综合运用所学基础知识进行解答，同时，这样的命题方式也为考生能力的展示提供了空间．

【例 7】（上海·文、理）若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$，则该函数（　　）

A. 单调递减无最小值　　B. 单调递减有最小值

C. 单调递增无最大值　　D. 单调递增有最大值

本题考查函数的性质、指数函数的单调性以及逻辑推理能力．

答案：A

【例 8】（浙江·理）已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图像关于原点对称，且 $f(x)=x^2+2x$．

（Ⅰ）求函数 $g(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）解不等式 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$．

本题考查函数图像的对称性，中点坐标公式，解不等式等基础知识以及运算、推理能力．

答案：（Ⅰ）$g(x)=-x^2+2x$　（Ⅱ）不等式的解集为 $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$

【例 9】（天津·理）已知 $u_n=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n$（$n\in\mathbf{N}^*$，$a>0$，$b>0$）．

（Ⅰ）当 $a=b$ 时，求数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项和；

（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$．

本题考查数列的概念、等差、等比数列的求和思想和方法，数列极限的求法，考查分类与整合的思想以及运算能力和思维能力．

答案：（Ⅰ）当 $a\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{(n+1)a^{n+2}-(n+2)a^{n+1}-a^2+2a}{(a-1)^2}$；当 $a=1$ 时，$S_n=\dfrac{n(n+3)}{2}$

（Ⅱ）当 $a\geqslant b>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n-1}}=a$；当 $b>a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n-1}}=b$

【例 10】（广东）化简 $f(x)=\cos\left(\dfrac{6k+1}{3}\pi+2x\right)+\cos\left(\dfrac{6k-1}{3}\pi-2x\right)+$

$2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)(x\in\mathbf{R},k\in\mathbf{Z})$,并求函数 $f(x)$的值域和最小正周期.

本题考查三角函数式的恒等变形能力和三角函数的性质.

答案:$f(x)=4\cos 2x$,函数 $f(x)$的值域为$[-4,4]$,最小正周期为 π

【例 11】 (山东·文、理)如图 1-1,已知长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$,$AB=2$,$AA_1=1$,直线 BD 与平面AA_1B_1B 所成的角为 30°,AE 垂直BD 于E,F 为A_1B_1的中点.

(Ⅰ)求异面直线 AE 与BF 所成的角;

(Ⅱ)求平面 BDF 与平面AA_1B 所成二面角(锐角)的大小;

(Ⅲ)求点 A 到平面BDF 的距离.

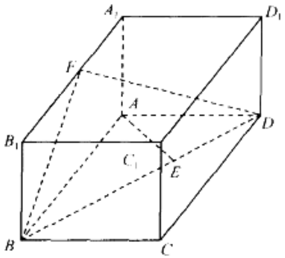

图 1-1

本题依托长方体,考查空间线、面关系,空间距离和角的计算,以及空间想象能力、逻辑推理能力和运算能力.本题既可使用传统方法解答,也可用空间向量方法.本题用空间向量解答的关键是建立适当的空间坐标系.

答案:(Ⅰ)$\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$ (Ⅱ)$\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$ (Ⅲ)$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【例 12】 (湖南·理)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为 F_1、F_2,离心率为 e,直线 $l:y=ex+a$ 与x 轴、y 轴分别交于A、B,M 是直线l 与椭圆C 的一个公共点,P 是点F_1关于直线 l 的对称点.设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

(Ⅰ)证明 $\lambda=1-e^2$;

(Ⅱ)确定 λ 的值,使得$\triangle PF_1F_2$是等腰三角形.

本题考查直线方程、平面向量和椭圆的几何性质等知识,考查运用数学知识解决问题和推理的能力.新教材结构使得平面向量与解析几何成为知识网络交汇点之一,成为高考的一个命题热点.解好本题既要以方程思想为指导,

又要熟练进行平面向量的坐标运算.

答案:(Ⅰ)略 (Ⅱ)$\frac{2}{3}$

【例 13】 (辽宁)某工厂生产甲、乙两种产品,每种产品都是经过第一和第二工序加工而成,两道工序的加工结果相互独立,每道工序的加工结果均有 A、B 两个等级.对每种产品,两道工序加工结果都为 A 级时,产品为一等品,其余均为二等品.

(Ⅰ)已知甲、乙两种产品的每一道工序的加工结果为 A 级品的概率如表 1 所示,分别求生产出的甲、乙产品为一等品的概率 $P_{甲}$、$P_{乙}$;

表 1

产品 \ 概率 \ 工序	第一工序	第二工序
甲	0.8	0.85
乙	0.75	0.8

(Ⅱ)已知一件产品的利润如表 2 所示,用 ξ、η 表示一件甲、乙产品的利润.在(Ⅰ)的条件下,求 ξ、η 的分布列及 $E\xi$、$E\eta$;

表 2

产品 \ 利润 \ 等级	一等	二等
甲	5 万元	2.5 万元
乙	2.5 万元	1.5 万元

(Ⅲ)已知生产一件产品的工人数和资金如表 3 所示.该工厂有工人 40 名,可用资金 60 万元.设 x、y 分别表示生产甲、乙产品的数量.在(Ⅱ)的条件下,x、y 为何值时,$z = xE\xi + yE\eta$ 最大,最大值是多少?(解答时需给出图示)

表 3

产品 \ 用量 \ 项目	工人/名	资金/万元
甲	8	5
乙	2	10

本题考查相互独立事件的概率、随机变量的分布列及期望、线性规划模型的建立与求解等基础知识，考查通过建立简单的数学模型解决实际问题的能力.

答案:(Ⅰ)$P_{甲}=0.68, P_{乙}=0.6$

(Ⅱ)分布列略，$E\xi=4.2, E\eta=2.1$

(Ⅲ)$x=4, y=4$ 时，z 最大，最大值是 25.2

三、突出数学思想方法，灵活考查理性思维

高考数学坚持“以能力立意命题”，深入考查数学思想，考查数学理性思维，试题注重不同思维方法的协调和匹配，使考生的数学理性思维能力得到较全面的考查.

从试题内容可以领略到，理科试题突出考查理性思维和后继学习的潜能；文科试题侧重于具体形象，广泛联系实际，强化应用意识.文理合卷试题则注意到两者的融合，做到起点低，坡度大，难度分散，形象思维与抽象思维并重.试卷则侧重新增内容与传统的中学数学知识及数学应用的融合，如函数的切线方程、向量的数量积与二次曲线的结合、实际问题中的概率统计等，同时，理科卷更强化理性思维和抽象推理的考查.这样的试卷布局体现了数学试卷新的设计理念：尊重不同考生群体思维的差异，贴近考生的实际，体现人文教育的精神.

【例 14】 (河北、山西、河南、安徽、海南——全国卷Ⅰ·文)点 O 是三角形 ABC 所在平面内一点，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，则 O 是 $\triangle ABC$ 的 (　　)

A. 三个内角平分线的交点　　B. 三条边的垂直平分线的交点

C. 三条中线的交点　　D. 三条高的交点

本题考查平面向量的数量积及其几何意义，以及逻辑推理能力.

答案:D

【例 15】 (江西·理)设复数 $z_1=1+i, z_2=x+2i(x\in\mathbf{R})$，若 z_1z_2 为实数，则 $x=$ (　　)

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

本题考查复数的基本运算，是一道基本题.

答案:A

【例 16】 (四川、陕西、贵州、云南、新疆、宁夏、甘肃、内蒙古——全国卷Ⅲ·文、理)

计算机常用的十六进制是逢 16 进 1 的计数制，采用数字 0～9 和字母 A～F共 16 个符号与十进制的数的对应关系如下表：

十六进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
十进制	0	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

例如,用十六进制表示:E+D=1B,则 A×B=　　　　(　　)

A. 6E　　B. 72　　C. 5F　　D. B0

本题紧密联系信息技术,考查对数学语言阅读、理解与转换的能力,考查创新意识.

鉴于我们对十六进制的运算不熟悉,本题可用"翻译"法寻求结果:

分别把十六进制数 A、B 转换为十进制得到 10 和 11,在十进制运算中,$10\times11=110$,而 $110=6\times16+14$.其中十进制数 14 转换为十六进制数为 E,十进制数 16 用十六进制数表示为 10,则 6×16 用十六进制数表示为 60.因此用十六进制表示:A×B=6E.

答案:A

【例 17】 (北京·文、理)已知 n 次多项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

如果在一种算法中,计算 $x_0^k(k=2,3,4,\cdots,n)$ 的值需要 $k-1$ 次乘法,计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 9 次运算(6 次乘法,3 次加法),那么计算 $P_{10}(x_0)$ 的值共需要进行________次运算.

下面给出一种减少运算次数的算法:$P_0(x)=a_0$,$P_{k+1}(x)=xP_k(x)+a_{k+1}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.利用该算法,计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 6 次运算,计算 $P_{10}(x_0)$ 的值共需要进行________次运算.

本题考查阅读理解能力,其背景是算法,它是计算科学的重要基础,是新课标的内容之一.在现代生活中,计算机已经成为人们日常生活和工作中不可缺少的工具,本题通过计算机的一个基本运算原理,考查逻辑表达与思维的能力.

答案:65,20

【例 18】 (重庆·理)数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,且 $a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)a_n+\frac{1}{2^n}$ $(n\geqslant1)$.

(Ⅰ)用数学归纳法证明:当 $a\geqslant2$ 时,$a_n\geqslant2$;

(Ⅱ)已知不等式 $\ln(1+x)<x$ 对 $x>0$ 成立,证明:$a_n<e^2(n\geqslant1)$,其中无理数 $e=2.71828\cdots$.

本题考查数列、不等式等知识,考查综合运用数学知识解决问题的能力.

证明:(Ⅰ)(1)当 $n=2$ 时,$a_2=2\geqslant2$,不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\geqslant 2)$ 时不等式成立，即 $a_k\geqslant 2(k\geqslant 2)$，那么

$a_{k+1}=\left(1+\dfrac{1}{k^2+k}\right)a_k+\dfrac{1}{2^k}\geqslant 2$，这就是说，当 $n=k+1$ 时不等式成立.

根据(1)、(2)可知：$a_n\geqslant 2$ 对所有 $n\geqslant 2$ 成立.

(Ⅱ)**证法1**：由递推公式及(Ⅰ)的结论有

$$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)a_n+\frac{1}{2^n}\leqslant\left(1+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n}\right)a_n\quad(n\geqslant 1).$$

两边取对数并利用已知不等式得

$$\ln a_{n+1}\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n}\right)+\ln c_n\leqslant\ln a_n+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n}(n\geqslant 1).$$

上式从1到 $n-1$ 求和可得

$$\ln a_n-\ln a_1\leqslant\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{n}+1-\frac{1}{2^n}<2.$$

即 $\ln a_n<2$，故 $a_n<e^2\quad(n\geqslant 1)$.

证法2：用数学归纳法易证 $2^n>n(n-1)$ 对 $n\geqslant 2$ 成立，故

$$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)a_n+\frac{1}{2^n}<\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)a_n+\frac{1}{n(n-1)}\quad(n\geqslant 2).$$

令 $b_n=a_n+1(n\geqslant 2)$，则 $b_{n+1}\leqslant\left[1+\dfrac{1}{n(n-1)}\right]b_n$.

取对数并利用已知不等式得

$$\ln b_{n+1}\leqslant\ln\left[1+\frac{1}{n(n-1)}\right]+\ln b_n\leqslant\ln b_n+\frac{1}{n(n-1)}\quad(n\geqslant 2).$$

上式从2到 n 求和得

$$\ln b_{n+1}-\ln b_2\leqslant\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n}<1.$$

因 $b_2=a_2+1=3$，故 $\ln b_{n+1}<1+\ln 3$，$b_{n+1}<e^{1+\ln 3}=3e\quad(n\geqslant 2)$.

故 $a_{n+1}<3e-1\leqslant e^2$，$n\geqslant 2$，又显然 $a_1<e^2$，$a_2<e^2$，故 $a_n<e^2$ 对一切 $n\geqslant 1$ 成立.

【例19】　(湖北·理)已知不等式 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{2}[\log_2 n]$，其中 n 为大于2的整数，$[\log_2 n]$ 表示不超过 $\log_2 n$ 的最大整数. 设数列 $\{a_n\}$ 的各项为

正，且满足 $a_1=b(b>0)$，$a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$，$n=2,3,4,\cdots$

（Ⅰ）证明：$a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}$，$n=3,4,5,\cdots$；

（Ⅱ）猜想数列$\{a_n\}$是否有极限，如果有，写出极限的值（不必证明）；

（Ⅲ）试确定一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，对任意 $b>0$，都有 $a_n<\frac{1}{5}$.

本题考查数列、极限及不等式的综合应用以及递推的思想.

（Ⅰ）**证法 1**：$\because$ 当 $n\geqslant 2$ 时，$0<a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$，$\therefore\ \frac{1}{a_n}\geqslant\frac{n+a_{n-1}}{na_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{n}$，即

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\geqslant\frac{1}{n},$$

于是有

$$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\geqslant\frac{1}{2},\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\geqslant\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\geqslant\frac{1}{n}.$$

所有不等式两边相加可得$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

由已知不等式知，当 $n\geqslant 3$ 时有，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$.

$\because\ a_1=b\ \therefore\ \frac{1}{a_n}>\frac{1}{b}+\frac{1}{2}[\log_2 n]=\frac{2+b[\log_2 n]}{2b}\ \therefore\ a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}$.

证法 2：设 $f(n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，首先用数学归纳法证不等式

$$a_n<\frac{b}{1+f(n)b},n=3,4,5,\cdots$$

(1)当 $n=3$ 时，由 $a_3\leqslant\frac{3a_2}{3+a_2}=\frac{3}{\frac{3}{a_2}+1}\leqslant\frac{3}{3\cdot\frac{2+a_1}{2a_1}+1}=\frac{b}{1+f(3)b}$，知不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\geqslant 3)$时不等式成立，即 $a_k\leqslant\frac{b}{1+f(k)\cdot b}$，则

$$a_{k+1}\leqslant\frac{(k+1)a_k}{(k+1)+a_k}=\frac{k+1}{\frac{k+1}{a_k}+1}\leqslant\frac{k+1}{(k+1)\cdot\frac{1+f(k)b}{b}+1}$$

$$=\frac{(k+1)b}{(k+1)+(k+1)f(k)b+b}=\frac{b}{1+\left(f(k)+\frac{1}{k+1}\right)b}=$$