

21

世纪高等院校教材

试验设计方法

赵选民 编



科学出版社

www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

试验设计方法

赵选民 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书全面介绍了试验设计的原理、方法及应用. 内容包括试验设计简介、方差分析、回归分析、正交设计、参数设计、均匀设计和响应曲面分析法. 本书的特点是在介绍常用试验设计方法的同时, 突出试验设计技术在工业生产与工程实际中的应用. 本书章后附有适量习题, 以供学生在学习、复习中使用.

本书可作为数学与应用数学、信息与计算科学、统计学及经济、管理类本科生的教材, 也可作为工科其他相关专业本科生的教材或参考书, 亦可供工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

试验设计方法/赵选民编. —北京: 科学出版社, 2006

(21世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-017627-8

I. 试… II. 赵… III. 试验设计(数学)-高等学校-教材 IV. O212.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 077687 号

责任编辑: 胡华强 姚莉丽 王 静 / 责任校对: 赵桂芬
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 8 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2006 年 8 月第一次印刷 印张: 17 1/4

印数: 1—3 000 字数: 330 000

定价: 25.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈路通〉)

前 言

本书是根据作者 1995 年为西北工业大学应用数学及工科其他专业编写的《工业生产与工程实际中常用试验设计方法》讲义经多届教学使用修订而成的。可作为数学与应用数学、信息与计算科学、统计学、管理科学各专业本科生的教材，也可供工程科技人员参考。

本书第 1 章叙述了试验设计的基本概念、发展状况和它的统计模型；第 2 章、第 3 章介绍了经典的方差分析、回归分析方法；第 4 章详细介绍了各种正交试验设计方法；第 5 章讨论了参数设计方法；第 6 章介绍了由我国数学家方开泰、王元提出的均匀设计方法；第 7 章介绍响应曲面分析方法。本书的特点是以介绍方法为主，突出试验设计方法在工业生产与工程实际中的应用。对这些方法的统计理论感兴趣的读者可参阅有关专著。

由于作者水平有限，书中难免会有不妥之处，恳请读者与同行专家不吝赐教。在本书的编写过程中参阅了许多同行的专著、教材，在此向他们表示谢意。西北工业大学应用数学系的许多同事对本书的编写提出了宝贵的意见与建议，西北工业大学教材科及科学出版社对本书的出版给予了大力支持，在此一并致以衷心的感谢。

作 者

2005 年 4 月于西安

目 录

第 1 章 试验设计简介	1
1.1 试验设计的概念与意义	1
1.2 试验设计的发展概况与应用效果	4
1.3 试验设计的常用术语及统计模型	6
第 2 章 方差分析	10
2.1 单因素方差分析.....	10
2.2 两因素不重复试验的方差分析.....	18
2.3 两因素等重复试验的方差分析.....	23
习题 2	28
第 3 章 回归分析	31
3.1 一元线性回归分析.....	31
3.2 一元非线性回归分析.....	41
3.3 多元线性回归分析.....	46
3.4 正交多项式回归.....	56
习题 3	62
第 4 章 正交设计	64
4.1 正交表介绍.....	64
4.2 正交试验设计的基本方法.....	66
4.3 考虑交互作用的正交试验设计.....	71
4.4 多指标试验.....	75
4.5 正交试验设计的方差分析方法.....	78
4.6 重复试验与重复取样的正交试验的方差分析.....	84
4.7 正交试验设计的常用灵活应用方法.....	89
4.8 直和法	100
4.9 直积法	108
4.10 正交多项式回归在正交设计中的应用.....	114
习题 4	118
第 5 章 参数设计	123
5.1 参数设计的基本思想	123
5.2 稳健设计	130

5.3 灵敏度设计	141
5.4 望大、望小特性参数的设计	143
5.5 动态特性的参数设计	151
习题 5	166
第 6 章 均匀设计	169
6.1 均匀设计的基本思想	169
6.2 试验的安排	171
6.3 均匀设计的分析	176
6.4 均匀设计表的构造	179
6.5 均匀设计在质量工程中的应用	184
习题 6	189
第 7 章 响应曲面分析法	191
7.1 响应曲面分析法的基本概念	191
7.2 一阶响应曲面设计方法	192
7.3 二次响应曲面的设计与分析	204
7.4 基于多元正交多项式的响应曲面设计	217
7.5 二次响应曲面分析	221
习题 7	228
参考文献	231
附录 常用数理统计用表	232
附表 1 正态分布表	232
附表 2 t 分布表的双侧分位数 (t_α) 表	234
附表 3 χ^2 分布临界值表	235
附表 4 F 分布临界值表	236
附表 5 相关系数临界值表	244
附表 6 常用正交表	246
附表 7 常用正交多项式表	255
附表 8 q 表	256
附表 9 均匀设计表	258

第 1 章 试验设计简介

1.1 试验设计的概念与意义

在生产和科学研究中，经常需要做试验，如何做试验，这里面大有学问。试验工作搞得好，试验次数不多，就能达到预期的目的；试验工作搞得不好，会事倍功半，甚至劳而无功。搞好一个试验要做很多工作，其中有两部分工作是非常重要的，一是试验方案的设计，二是试验结果的数据分析。试验设计 (design of experiments) 是以概率论与数理统计为理论基础，经济地、科学地制定试验方案以便对试验数据进行有效的统计分析的数学理论和方法。但要设计出一个好的试验方案，除了具备概率论与数理统计知识外，还应有宽广的专业技术知识和丰富的实际经验，只有三者紧密结合起来，才能取得良好的结果。因此，如何合理地设计试验方案和有效地分析试验结果，是很值得研究的一个问题。

我们先看几个简单的例子。

例 1.1 某农场想移植外地的优良品种，选了 A, B, C 三种品种进行试验，看哪一种品种在本地更适合一些。

一种试验的方法是把三种品种种在图 1.1 (a) 所示的三块田里。如果试验的结果是品种 A 产量高，B 次之，C 最少，我们能否下结论说品种 A 在本地最适合呢？我们仔细观察一下就会发现，三种品种尽管种在相邻的三块地上，但三块地的土质不会完全一样，如果正好种 A 的这块田土质等条件最好，种 B 的那块田稍次，种 C 的那块田最差，那么 A 的产量高并不一定说明 A 最适合本地生产。这时品种的好坏与土壤的情况混杂在一起，给如何下结论带来了困难。因此，图 1.1 (a) 的设计是不好的。如何改善这种设计呢？可以采用的方法很多，一种是随机化的方法。把原来的三大块田每块各分成三小块，在每大块上三种品种都种，三种品种分别种在哪一块，由抽签的方法决定（或查一种随机数表来定），如图 1.1 (b) 所示。这种方法比图 1.1 (a) 所示的方法好，它使土质等因素对试验的影响大大减弱了，得到的结论就比较可靠。但是，这种方法还有不足之处，即土地从纵的方向来看是安排的比较好的，纵的每一大块上三种品种都有；但如果从横的方向把土地分成三大块来看，安排得就不那么好了。在最上面的一大块有两块种品种 A，没有品种 B，而在中间一大块上，两块种了品种 B，没种 A。如果土壤按横的三大块划分二者相差较大，则给结果又带来了干扰。于

是还有一种种植方法如图 1.1 (c) 所示，无论从纵的方向还是从横的方向来看，每大块三种品种都有，这样，品种的情况就不会和土壤等因素的作用混起来。从这样一个简单的例子我们就会明白试验设计是何等重要。

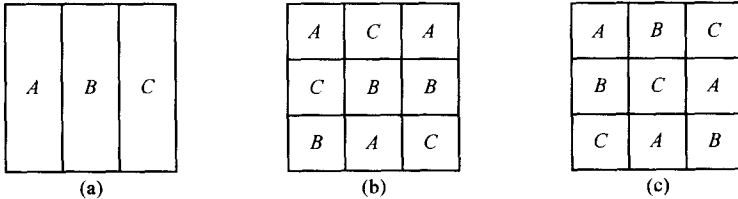


图 1.1 三种试验方法

在试验中经常遇到的另一个问题是多因素问题，我们还是先看一个简单的例子。

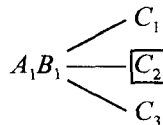
例 1.2 某厂想用高压聚乙烯与木屑混合物加温加压试制“人造再生木材”，选取三个有关因素各分三个位级进行试验，在统计上位级称做水平，因素和水平如表 1.1 所示。

表 1.1 人造再生木材试验因素水平表

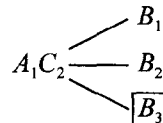
因素 \ 水平	A (配比)	B (加温温度)/°C	C (保温时间)/min
1	1 : 1	150	30
2	2 : 3	165	35
3	3 : 7	180	40

为了书写方便，A 的三个水平用 A_1, A_2, A_3 表示，因素 B, C 的表示法也一样。

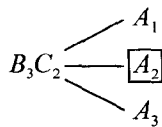
采用什么方法安排这个试验，能得到满意的效果呢？许多人常采用下面的方法：先固定 A 和 B 在 A_1 和 B_1 ，变化 C



试验结果 C_2 最好。然后固定 A 为 A_1 ，C 为 C_2 ，变化 B

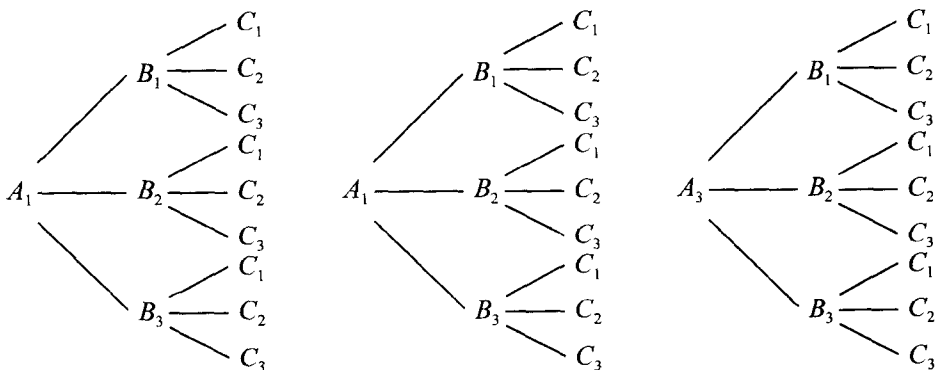


结果是 B_3 最好。最后固定 B 为 B_3 ，C 为 C_2 ，变化 A



结果是 A_2 最好. 于是下结论说 $A_2B_3C_2$ 最好. 这种方法叫简单对比法, 一般也能得到一定的效果. 但是这种方法有缺点, 当因素间相互影响比较大时, 结论就不一定可靠. 用这种方法做试验, 同样的试验次数, 提供的信息不够丰富. 另外, 用这种方法做试验, 如不做重复试验, 就给出不出误差的估计.

另一种方法叫全面试验法, 就是把三个因素的所有水平都一一搭配起来, 从而找出最好的生产条件. 即



这样共需做 $3^3 = 27$ 次试验. 一般若有 m 个因素, 每个因素有 n_k ($k=1, 2, \dots, m$) 个水平, 那么全部的试验次数是 $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$. 虽然全面试验能找出最好的生产条件, 但较浪费人力、物力和时间, 在许多情况下, 往往是难以实现的. 例如北京维尼纶厂遇到过过一个七水平五因素的试验, 全面试验共需 $7^5 = 16807$ 次, 要全部做, 显然是不可能的.

由上面的两个例子我们可以看出, 当因素较多时, 既要考虑试验次数少, 又要得出可靠的结论, 这就需要用科学的方法对试验进行合理的安排.

国内外实践表明, 试验设计可以帮助我们有效地解决如下问题:

- (1) 科学地、合理地安排试验, 可以减少试验次数, 缩短试验周期, 节约人力、物力, 提高经济效益, 尤其当因素水平较多时, 效果更为显著;
- (2) 在产品的设计和制造中, 影响指标值的因素往往很多, 通过对试验的设计和结果分析能使我们在众多的因素中分清主次, 找出影响指标的主要因素;
- (3) 通过试验设计可以分析因素之间交互作用影响的大小;
- (4) 通过方差分析, 可以分析出试验误差影响的大小, 提高试验的精度;
- (5) 通过试验设计能尽快地找出较优的设计参数或生产工艺条件, 并通过对试验结果的分析、比较, 找出达到最优化方案进一步试验的方向;

(6) 能对最优方案的指标值进行预测.

1.2 试验设计的发展概况与应用效果

试验设计是数理统计学的一个重要分支. 其基本思想是英国统计学家费歇耳 (R. A. Fisher) 在进行农业田间试验时提出的. 他发现在田间试验中, 环境条件难于严格控制, 随机误差不可忽视, 故提出对试验方案必须作合理的安排, 使试验数据有合适的数学模型, 以减轻随机误差的影响, 从而提高试验结论的精度和可靠度. 这就是试验设计的基本思想. 费歇耳在 1923 年与麦肯齐 (W. A. Mackenzie) 合作第一次发表了一个试验设计的实例, 1926 年公布了试验设计的基本思想, 1935 年出版了他的名著《试验设计》(*The Design of Experiment*), 从此开创了一门新的应用技术学科. 在试验设计的发展道路上, 大致经历了四个阶段, 即传统的方差分析, 正交试验设计, 信噪比试验设计与产品的三次设计, 电脑仿真试验.

20 世纪三四十年代, 英国、美国、苏联等国继续对试验设计法进行了研究, 并将试验设计法逐步推广到工业生产领域中去, 在采矿、冶金、建筑、纺织、机械、医药等行业都有所应用.

第二次世界大战期间, 英美等国在工业试验中采用试验设计法取得显著效果. 二次大战结束后, 英国皇家军需工厂管理局出版了一个备忘录, 公布了一批应用实例. 战后, 日本把试验设计作为管理技术之一, 从英美引进.

1949 年, 以田口玄一博士为首的一批研究人员, 在日本电讯研究所 (ECL) 研究电话通讯设备的系统质量时发现, 在农业生产上应用的试验设计技术, 不论是析因设计, 还是拉丁方设计等在工业生产中应用都受到限制. 于是, 田口玄一等人在实践中努力研究和改进了英国人的试验设计技术, 创造了用正交表安排分析试验的正交试验设计法.

1952 年, 田口玄一在日本东海电报公司, 运用 $L_{27}(3^{13})$ 正交表进行试验取得了成功之后, 正交试验设计法在日本的工业生产中得到迅速推广. 据统计, 推广正交试验设计法的头十年, 试验项目超过 100 万项, 其中三分之一的项目效果十分显著, 获得极大的经济效益. 例如电讯研究所研制“线形弹簧继电器”, 运用正交试验设计技术, 对数十个特性值 2000 多个变量进行研究, 经过七年努力取得了成功, 制造出比美国先进的产品. 这一产品本身只有几美元, 但研究成果给该所带来几十亿美元的利益. 几年之后, 他们的竞争对手美国西方电器公司 (Western Electric) 不得不停产, 转而向日本引进这种先进的继电器. 今天, 正交试验技术已成为日本企业界人士、工程技术人员、研究人员和管理人员所必备的一种通用技术, 成为日本工程师们共同语言的一部分. 在日本, 据说一个工程

师，如果没有试验设计这方面知识的话，只能算半个工程师。可见，正交试验设计技术在日本已经达到家喻户晓的程度。

信噪比试验设计和产品的三次设计是田口玄一博士分别于1957年和1978年首先提出的。信噪比试验设计和产品的三次设计把正交设计、方差分析与产品的质量、价格相联系，开辟了更为重要，更为广泛的应用领域，具有巨大的经济效益。日本二次大战后工业生产飞跃发展的原因之一，就是在各工业领域里普遍推广、应用正交试验设计与产品的三次设计。例如新日本电气公司生产的彩色电视机稳压电源进行三次设计后，每件产品因质量的改进可增加经济效益6700日元，以年产量100万件计，可增加67亿日元的收益。日本电子产品能打进美国市场，畅销世界各国的秘诀之一就在于运用正交试验设计和产品的三次设计这个得力工具。日本把试验设计誉为“国宝”是有一定道理的。

当美国人清醒地认识到战后日本经济飞速发展的秘诀之一就是在工业领域里普遍推广，应用了正交试验设计和产品的三次设计之后，于1983年成立了专门的机构AST在美国推广田口方法。例如贝尔公司的集成电路，成品率很低，不到20%，用正交表安排设计后，使成品率达到80%，轰动了整个美洲。美国威斯康辛大学一次就申请到87万美元的试验设计研究资助基金。20世纪80年代，美国出现了田口方法“热”。

我国从20世纪50年代后期，在著名统计学家许宝禄教授引导下，数学工作者才深入试验设计这个领域。20世纪60年代初，他领导了一个试验设计讨论班，为国家培养了一批试验设计工作者。60年代末，中国科学院数学研究所统计组、北京大学数学系等单位的研究人员在正交设计的观点、理论和方法上都有新的见解，编制了一套较为适用的正交表，简化了试验程序和试验结果分析方法，创立了简单易懂的正交试验方法。自20世纪70年代以来，国内在研究和推广正交试验设计方面有了很大的进展，成果日渐增多，已经取得了至少有上万项的好成果。例如北京化学工业总公司自1978年以来已在总公司的焦化染料、有机合成、高分子材料、涂料试剂、助剂、金属表面处理、橡胶加工及精细化工行业中得到了大力的推广应用，有的成果得到上级部门的嘉奖。从部分上报成果来看，当年已取得的收益累计达1500万元以上。中国船舶总公司1981年到1984年，上报成果已达一千三百余项，其中重大成果占三百多项，可计算并经财务部门认可的收益超过700万元。上海地区，据统计1978年至1984年5月，有227个工厂企业推广了正交试验设计，其中103个单位取得显著成效。上海机电一局所属30多个工厂在100多项课题中，攻克技术关键18项，取得2000多万元的经济效益。航空工业部自1973开始在部属各工厂推广了正交试验设计，曾编辑出版了三期成果汇编，从推广过程接触的课题来看，其中包括机械加工与特种加工工艺、冲压、钣金和高能成型工艺，非金属材料加工工艺，工具制造工艺，锻

造、铸造与焊接工艺，热处理与表面处理工艺，装配调试工艺，无损检验与化学分析，产品设计和工装设计，基础理论研究等方面。

20世纪80年代初产品的三次设计开始在我国进行研究，已取得可喜的成果。例如北京761厂在高频负反馈对电路的设计中，对140MHz主中放电路进行三次设计，仅其中3D644GC晶体管正确选择一项，一年就增加经济效益3万余元；杭州电视机厂对西湖牌黑白电视机的OTL电路的中点电压设计运用了三次设计技术，不仅找到高可靠性、高稳定性、高电性能以及低耗、不调整工艺、降低成本等方面的优化方案，而且给企业带来了较高的经济效益，仅此一项年收益为13591元。

随着系统工程和高科技的发展，电脑仿真试验成为统计试验设计的一个崭新的方向，要求“充满空间”（space filling）的试验设计方法。在20世纪70年代末，几乎同时，出现了两个最有影响的方法：拉丁超立方体抽样（Latin hypercube sampling）和均匀设计（uniform design）。拉丁超立方体抽样是M. D. McKay, R. J. Beckman和W. J. Conover于1979年在国际权威刊物*Technometrics*上首次提出的。均匀设计是由中国科学院院士王元和方开泰研究员于1978年提出的，目的是解决导弹弹道系统的指挥仪设计问题，该问题是一个5因素的试验，其中每个因素的水平个数均要多于10，而试验次数又要求不超过50。二十多年来，均匀设计的理论迅速发展，应用十分广泛，得到国际统计界的极大关注。

然而，在我国大多数工厂、企业、公司，试验设计的技术应用还不是很普遍。如何设计、制造出质量高、价格低廉、性质稳定、可靠性高的产品，这是对工程技术人员的挑战。面对这一挑战，一个行之有效的方法就是在产品的设计、制造、销售过程中运用先进的试验设计技术。

1.3 试验设计的常用术语及统计模型

1.3.1 常用术语

1. 因素及其水平

在一项试验中，凡欲考察的变量称为因素，如例1.2中的原料配比、加温温度、保温时间等。若因素的取值可以在某一区间内连续变化，称其为定量因素，如加温温度、保温时间等；若因素只能取有限个类别，称之为定性因素，如原材料产地、原材料品种等。我们常用A, B, C, …或 x_1, x_2, x_3, \dots 表示因素。因素所处的不同状态称之为因素的水平，如反应温度是因素A，它的取值范围是100~200℃，在此范围内若选择在150℃, 165℃, 180℃处做试验，则这些温度

称为因素 A 的水平, 并记为 $A_1=150^\circ\text{C}$, $A_2=165^\circ\text{C}$, $A_3=180^\circ\text{C}$.

2. 响应 (或输出)

试验的结果称为响应 (response) 或输出 (output), 用 y 表示.

试验设计的目的是研究因素及因素间的交互作用对响应的影响和它们之间的关系. 一个好的试验设计, 是用最少的试验来获取响应和因素之间关系的最多信息.

3. 随机误差

在试验中总存在一些不可控制的因素, 如气温、湿度、原材料不够均匀、操作人员的差异等, 它们的综合作用称为随机误差. 由于随机误差的存在, 在“相同的”条件下做的试验, 其响应不尽相同, 它们的波动大小反映了随机误差的大小. 随机误差有时会干扰试验者的视线, 甚至误导试验的结论. 一个好的试验设计, 可以大大降低随机误差的干扰, 体现统计试验设计的威力. 而数理统计提供的各种数据分析方法, 可帮助试验者从错综复杂的数据中, 从随机误差的干扰中去伪存真, 找到客观规律.

1.3.2 统计模型

统计试验设计的诸方法之所以能够高效率, 其主要原因之一是它们是在特定的数学模型下达到最优的方法. 例如, “正交设计”是在特定的方差分析模型下达到最优, “最优设计”是在特定的回归模型下达到最优, 而“均匀设计”是在特定的稳健回归模型下达到最优.

1. 方差分析模型

设试验者选择因素 x 的 r 个水平 $1, 2, \dots, r$, 并在每个水平下作 n_i 次重复试验, 试验模型可写为

$$y_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, n_i, \quad (1.1)$$

式中

y_{ij} : 在水平 i 下的第 j 次试验的响应值;

n_i : 在水平 i 下的试验重复数;

μ_i : 响应 y 在水平 i 下的真值;

ε_{ij} : 在水平 i 下的第 j 次试验的随机误差.

假定 $E(\varepsilon_{ij})=0$, $\text{Var}(\varepsilon_{ij})=\sigma^2$ (未知), $\{\varepsilon_{ij}\}$ 相互独立. 通过试验结果 $\{y_{ij}\}$ 我们可以用最小二乘法估计出所有的 μ_i 及 σ^2 , 若已知随机误差 ε_{ij} 的概率分布, 也可用极大似然估计法估计出 μ_i 及 σ^2 . 令

$$\mu = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \mu_i,$$

$$\alpha_i = \mu_i - \mu, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

则模型 (1.1) 又可表示为

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, \dots, n_i, \quad (1.2)$$

式中 α_i 称为因素 x 在水平 i 时的主效应, μ 称为响应的总均值, 显见

$$\sum_{i=1}^r n_i \alpha_i = 0. \quad (1.3)$$

当所有 α_i 都接近于 0 时, 因素 x 对响应的影响不大; 当 α_i 的值较大时, 表明因素 x 对响应的影响大. 由于随机误差的大小会干扰试验的结果, 所以 α_i 值波动的大小必须与 σ 的大小相比较, 方差分析及其 F 检验就是用来进行这种相对比较. 根据 F 检验结果可给出关于因素对响应的影响是否显著的结论, 详见第 2 章. 一个好的试验设计就是用最少的试验对 α_i 和 σ^2 获得精度最佳的估计.

2. 回归模型

若试验者根据以往的经验, 认为 y 与 x 间有回归模型, 例如

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_m x^m + \varepsilon, \quad (1.4)$$

式中 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ 为回归系数, ε 为随机误差, $E(\varepsilon) = 0$, $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2$, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m, \sigma^2$ 均未知. 试验者希望通过试验来最准确地建立模型 (1.4), 即对 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m, \sigma^2$ 作最准确的估计, 根据这一要求来设计因素 x 的取值. 基于这一思想产生的“最优设计”称之为“回归设计”, 这里“最优”是在一定的统计意义下定义的, 常见的有 D -最优、 A -最优、 E -最优等.

3. 非参数回归模型

如果试验者对模型没有太多的知识, 这时只能假定

$$y = g(x) + \varepsilon, \quad (1.5)$$

式中函数 $g(x)$ 未知, ε 为随机误差, 常假定 $E(\varepsilon) = 0$, $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2$, σ^2 未知. 试验者希望通过试验来建立模型 (1.5). 由于 $g(x)$ 未包括未知参数, 故 (1.5) 称为非参数回归模型. 一个好的试验设计能求得一个精度较高的估计 $\hat{g}(x)$. “均匀设计”就是这样一种试验, 它将试验点在试验范围内均匀分布.

4. 稳健回归模型

若试验者知道因素和响应之间为非线性回归模型, 但具体形式未知, 他还进

一步知道真模型与二次模型相近，于是他采用模型

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + h(x) + \epsilon, \quad (1.6)$$

式中 $h(x)$ 为真模型与二次模型之差。更一般的稳健回归模型为

$$y = f(x) + h(x) + \epsilon, \quad (1.7)$$

式中函数 $f(x)$ 已知，例如多项式， $h(x)$ 为模型偏差。稳健回归设计是研究当模型偏差在某一确定范围时，如何给出试验点使之能最精确地建立模型 (1.7)。

第 2 章 方差分析

方差分析是数理统计学中常用的数据处理方法之一，是工农生产和科学研究中分析试验数据的一种有效的工具。自 20 世纪 20 年代初问世以来，经过几十年的发展，方差分析已广泛应用到工农业生产和科学研究中的许多领域，取得良好的效果。在生产实际中，经常需要研究生产条件的改变对产品的质量和产量有无显著影响的问题，并希望知道显著作用的因素在什么时候对生产起最好的影响。例如，在化工生产中，需要考虑原料成分、原料剂量、反应温度、反应时间等因素对产品收率的影响，并希望知道哪些因素影响显著；在农业生产中，需要考察种子、土质、肥料、雨水、耕作技术等对不同农作物收获量有无显著影响等，这些都是方差分析所要解决的问题。

方差分析的内容很丰富，本章主要介绍单因素方差分析和两因素的方差分析问题。

2.1 单因素方差分析

在一项试验中，若只有一个因素的水平在改变，而其他因素的水平固定不变，试验的目的在于比较因素各水平上指标值之间的差别，这就叫做单因素试验问题。

2.1.1 方差分析的基本思想

我们用一简单实例来说明方差分布的基本思想。

例 2.1 考察生产某化工产品时反应温度 $A(^{\circ}\text{C})$ 对收率 $y(\%)$ 的影响。为此，比较两个反应温度 $A_1 = 30^{\circ}\text{C}$ ， $A_2 = 40^{\circ}\text{C}$ 。这是一个单因素二水平的试验。试验结果如表 2.1 所示。

表 2.1 某化工产品收率试验数据表

(单位: %)

水平 \ 试验号	1	2	3	4	5	平均值
$A_1(30^{\circ}\text{C})$	75	78	60	61	83	$\bar{y}_1 = 71.4$
$A_2(40^{\circ}\text{C})$	89	62	93	71	85	$\bar{y}_2 = 80.0$

显然，如果试验没有误差，那么只要对 A_1 和 A_2 各做一次试验，直接比较

其收率大小,就可判断反应温度高低的好坏.然而,试验结果总是受误差影响的.自然我们不能从第1号试验的两个结果中,由于89大于75就说 A_2 比 A_1 好,因为我们不能判断89大于75究竟是由 A_1 和 A_2 的不同所引起的,还是由于误差的影响造成的.同样,我们也不能从第2号试验的结果作出相反的结论.是否可以直接比较其平均值的大小,由 $\bar{y}_2=80.0>\bar{y}_1=71.4$ 就说 A_2 比 A_1 好呢?还是很难说.虽然平均值的代表性强一些,受误差的影响小一些,但由于不知道误差的大小,仍旧不能判断这个差别是否是由于因素水平的改变所引起的.因此,为了能作出一种合理的判断,首先我们必须对误差影响的大小或误差引起的指标波动有个定量的估计.同时,对指标总的波动以及因素水平改变引起的指标的波动也应给以数量表示.然后加以适当的比较,就可得出比较可靠的结论.

我们知道,全部10个试验数据与总的平均值 $\bar{y}=\frac{1}{10}(75+78+\cdots+85)=75.7$ 之差的离差平方和反映了指标观察值的总的波动,记为 S_T^2 ,即

$$\begin{aligned} S_T^2 &= (75-75.7)^2 + (78-75.7)^2 + \cdots + (85-75.7)^2 \\ &= 1294.10. \end{aligned}$$

可以设想,如果因素水平改变对指标不发生影响,而且也不存在试验误差,那么全部试验数据应该一样,此时 S_T^2 应为零.但 S_T^2 实际上不是零,说明 S_T^2 是由因素水平改变引起的指标波动和误差引起的指标波动两部分组成.

另一方面,如果没有试验误差, A_1 条件下的5个试验数据应该相同, A_2 条件下的5个试验数据也应该相同,现在两个条件下的5个数据不相同,说明存在试验误差.试验误差对指标的影响的大小或误差引起的指标的波动可用误差离差平方和 S_e^2 来表示,即

$$\begin{aligned} S_e^2 &= (75-71.4)^2 + (78-71.4)^2 + \cdots + (83-71.4)^2 \\ &\quad + (89-80.0)^2 + (62-80.0)^2 + \cdots + (85-80.0)^2 \\ &= 429.20 + 680.00 = 1109.20. \end{aligned}$$

对于因素A来说,当它取水平1时,平均收率为71.4,这个平均值可以用来近似表示水平1各次试验对指标的影响;当它取水平2时,收率的平均值为80.0,这个平均值可以用来近似表示水平2各次试验对指标收率的影响.因而,5个71.4和5个80.0与总平均值75.7之差的平方和

$$S_A^2 = 5(71.4-75.7)^2 + 5(80.0-75.7)^2 = 184.90$$

反映了因素的水平改变引起指标波动的大小,当然其中也包含了试验误差的影响.

可以看出,此处有

$$S_T^2 = S_A^2 + S_e^2 = 184.90 + 1109.20 = 1294.10,$$

即数据总的离差平方和等于因素水平改变引起的离差平方和加上误差离差平方