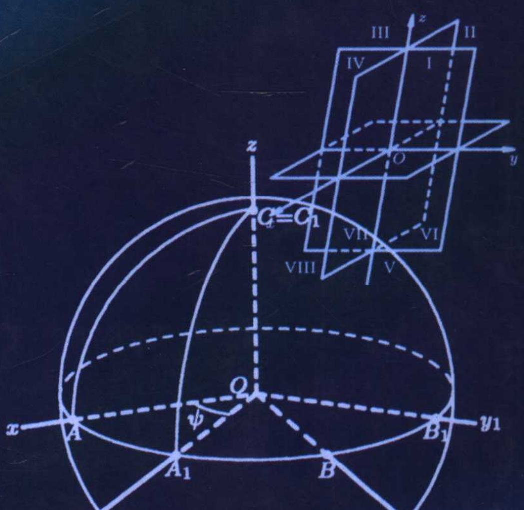
高等代数与解析几何（上）

习题解析

王德生 编著



辽宁师范大学出版社

《高等代数与解析几何(上)》
习题解析

王德生　编著

辽宁师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

《高等代数与解析几何(上)》习题解析/王德生编著—大连:辽宁师范大学出版社,2001.8

ISBN 7-81042-577-3

I.高… Ⅱ.王… Ⅲ.数学-高等学校-教材
Ⅳ.H1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 055828 号

辽宁师范大学出版社出版

(大连市黄河路 850 号 邮政编码 116029 电话:0411-4206854)

大连海事大学印刷厂印刷 辽宁师范大学出版社发行

开本:850 毫米×1168 毫米 1/32 字数:466 千字 印张:17 5/8

印数:1~5000 册

2001 年 10 月第 1 版 2001 年 10 月第 1 次印刷

责任编辑:李 立 责任校对:赵玉琦

封面设计:李小曼 版式设计:白 水

定价:25.00 元

前 言

高等代数、解析几何是大学数学系教学计划中两门重要的基础课。随着我国数学高等教育的发展和教学改革的不断深入，把这两门课合并成一门课的主张近年来得到了越来越多的从教者的认同和广泛响应。陈志杰教授主编的《高等代数与解析几何》就是新近出版的这方面的教材之一。

高等代数与解析几何合并成一门课后，在教学上必然要突破高等代数和解析几何课程原来各自教学的思想、模式和惯性，体现代数与几何的融会贯通与结合，无论对于教者还是对于学者，都会有一个适应的过程。为了教学上的方便和帮助学生学习这门刚刚开始合并的课程，在征得陈志杰教授的同意后，编者编写了这本教学参考用书。本书的章节与陈志杰教授主编的教材《高等代数与解析几何（上)》完全一致，所使用的符号也基本一致。本书每节包括四个部分：一、基本概念，二、主要结论，三、学习指导，四、习题分析与解法点评。对于那些内容较为深刻或者难度相对较大的习题，本书在加强习题分析和解法点评的基础上尽可能地给出两种或两种以上的解法，以期活跃数学思想和开阔解题思路。读者应配合上述教材使用本书，并应仔细阅读每节中的学习指导和习题分析与解法点评部分的内容，但不可以本书代替教材。对于学生读者，编者特别提醒，千万切忌抄录本书中习题的解法过程以代替自己的独立思考和作业。通过你自己积极思维，很可能就会想出比书中更好的方法和思路，这样做你会受益匪浅的。

本书的部分习题参考了华东师范大学数学系的相关资料。数学博士后韩友发教授详细审阅了书稿，提出了许多很好的建议和修改意见，在此编者一并表示感谢。编者还特别感谢陈志杰教授所给予的支持和指导，并向他本人表示谢意。

由于时间仓促，加之水平所限，书中不当之处，拙方劣法在所难免，恳请读者斧正。

编　者

2001年10月

目录

第一章　向量代数

§1　向量的线性运算

一．基本概念

1．向量　既有大小又有方向的量叫做向量．向量用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，…这样的符号以及有向线段表示．在用有向线段表示向量时，有向线段的始点和终点就分别叫做该向量的始点和终点．

2．向量的长度，向量的相等　取定长度单位后，表示向量的有向线段的长度叫做被表示向量的长度．向量 $\vec{a}$（$\overrightarrow{AB}$）的长度记为 $|\vec{a}|$（$|\overrightarrow{AB}|$）．方向相同，长度相等的两个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 叫做相等的向量，记为 $\vec{a}=\vec{b}$．

3．零向量　长度为 0 的向量叫做零向量．零向量记为 $\vec{0}$ 或者 0．零向量的方向可以指向任何一个方向．

4．负向量　与一个向量长度相同，方向相反的向量叫做该向量的负向量．向量 $\vec{a}$ 的负向量记为 $-\vec{a}$．

5．向量的加法　对于向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，把 $\vec{a}$ 的终点与 $\vec{b}$ 的始点放在同一点后得到一个以 $\vec{a}$ 的始点为始点，以 $\vec{b}$ 的终点为终点的向量 $\vec{c}$，称 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相加的和，记为 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$．

6．向量的减法　规定 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$．

7. 向量的标（纯）量乘法　对于向量 $\overrightarrow{a}$ 和实数 k，按下述方法得到一个向量 $\overrightarrow{c}$：$|\overrightarrow{c}|=|k||\overrightarrow{a}|$，当 $k>0$ 时，$\overrightarrow{c}$ 与 $\overrightarrow{a}$ 方向相同；当 $k<0$ 时，$\overrightarrow{c}$ 与 $\overrightarrow{a}$ 方向相反. 称 $\overrightarrow{c}$ 为 k 与 $\overrightarrow{a}$ 的标量乘积，记为 $\overrightarrow{c}=k\overrightarrow{a}$.

8. 向量的线性运算　向量的加法和标量乘法统称为向量的线性运算.

二. 主要结论

1. 每一个向量都和它的负向量长度相同，即 $|\overrightarrow{a}|=|-\overrightarrow{a}|$.

2. 一个向量是零向量的充分必要条件是它的终点与始点重合.

3. 一个向量的负向量的负向量就是这个向量，即 $-(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{a}$.

4. 两个不平行的向量 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 相加形成三角形法则.

5. 两个不平行的向量 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 相加可以按平行四边形法则进行. 即把 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 的始点放在同一点 O 上，以 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 为邻边作平行四边形. 那么以点 O 为始点的对角线向量即为 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 的和 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$.

6. 向量加法具有下述性质：

（i）交换律，即对任意向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 有 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$；

（ii）结合律，即对任意向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 有 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$；

（iii）零向量关于加法相当于数的加法中的数 0，即 $\overrightarrow{0}+\overrightarrow{a}=$

$\vec{a}$，也就是说零向量在向量的加法中与数零在数的加法中起着同样的作用；

（ⅳ）关于加法任意向量 $\vec{a}$ 都有负元 $-\vec{a}$，即 $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$. 也就是说负向量在向量的加法中与相反数在数的加法中起着同样的作用.

7. 有限多个向量具有可加性，$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$ 是唯一确定的，可按多边形法则即折线法则进行. 即把 $\vec{a}_i$ 的始点放在 $\vec{a}_{i-1}$ 的终点上，$i=2, 3, \cdots, n$，那么以 $\vec{a}_1$ 的始点为始点，$\vec{a_n}$ 的终点为终点的向量就是 $\vec{a}_1+\cdots+\vec{a}_n$.

8. 向量的标量乘法具有下述性质：对任意向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 和任意实数 k，l 有

（ⅴ）$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$；

（ⅵ）$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$；

（ⅶ）$(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$；

（ⅷ）$1\vec{a}=\vec{a}$.

9. 向量加法等式满足移项法则，即

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}.$$

10. 向量加法等式满足消去律，即

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{b}\Rightarrow\vec{a}=\vec{c}.$$

11. 对于实数 k 和向量 $\vec{a}$ 有 $k\vec{a}=0\Leftrightarrow k=0$ 或者 $\vec{a}=0$.

12. 对任意向量 $\vec{a}$ 有 $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$. 一般地，对任意实数 k 和任意向量 $\vec{a}$ 有 $(-k)\vec{a}=-k\vec{a}$.

13．对任意实数 k 和任意向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 有

$$k(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=k\overrightarrow{a}-k\overrightarrow{b}.$$

14．对任意实数 k，l 和任意向量 $\overrightarrow{a}$ 有

$$(k-l)\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{a}-l\overrightarrow{a}.$$

15．对于不平行的向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=0$ 的充分必要条件是可以顺次将它们的终点与始点相连，从而形成一个三角形．一般地，对于有限多个向量 $\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，…，$\overrightarrow{a}_n$，$\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\cdots+\overrightarrow{a}_n=0$ 的充分必要条件是可以顺次将它们的终点与始点相连（最后 $\overrightarrow{a}_n$ 的终点与 $\overrightarrow{a_1}$ 的始点相连），即形成一条封闭折线．

三．学习指导

1．我们现在所说的向量是原始意义下的向量，当然是一个几何概念．以后我们会对向量概念进行推广和抽象，因此读者对不同阶段的向量概念既要注意它们外在的形式区别又要注意它们的内在联系．

2．一个向量由它的大小和方向惟一决定而与它在空间的位置无关，即可以把它的始点放在空间的任意一点上，由此才有自由向量的称谓．

3．利用向量有时可以使某些几何问题得到更为简洁的解决，读者要对这种思想和方法给予足够的注意和重视，尽快地掌握并能熟练运用．

4．向量的线性运算是本节的核心内容，是有效运用向量的基础，是几何结构代数化、数量化过程的开始，因此读者必须认真理解，准确掌握．关于向量的加法可以与质点若干次连续直线运动的累加过程和结果相参照．

5．向量线性运算所具有的八条基本性质（ⅰ）～（ⅷ）读者

要特别注意，它们既是我们现阶段进行向量的线性运算所必须遵循的规则，也是我们后面要建立的抽象向量空间的基本公理.

四. 习题分析与解法点评

1. 已知平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$，E、F 分别是棱 BC、C_1D_1 的中点，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. 试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 表示下列向量：

(1) $\overrightarrow{AC_1}$；(2) $\overrightarrow{BD_1}$；(3) $\overrightarrow{AF}$；(4) $\overrightarrow{EF}$.

分析：以 (4) 为例，在图中可以看出由点 E 到 F 有很多途径，其中的直线途径就是向量 $\overrightarrow{EF}$，其它途径都是折线途经. 例如由点 E 到点 C，再由点 C 到点 C_1，再由点 C_1 到点 F. 按向量加法的定义，这就是 $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1F}=\overrightarrow{EF}$. 再由题设条件不难得出 $\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{CC_1}$，$\overrightarrow{C_1F}$ 和 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 之间的关系，于是即可得出所要求的表达式.

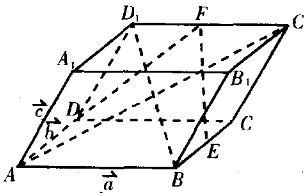


图 1-1-1

解：(1) $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$；

(2) $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+(-\overrightarrow{D_1C_1})=\vec{b}+\vec{c}+(-\vec{a})=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$；

(3) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1F}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{D_1C_1}=\vec{c}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{a}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$；

(4) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1F}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{D_1C_1})=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}+(-\dfrac{1}{2}\vec{a})=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$.

点评：1）读者见到这个题目时第一个反映应该是问所要求的表示是否存在，进而的问题是在什么情况下这样的表示存在，在什么情况下这种表示不存在．尽管我们现在还不能回答这样的问题，但是意识到这样的问题是至关重要的，对于数学思维的培养和训练是很有好处的．

2）仍以（4）为例．很明显从点 E 到点 F 的折线途径不是惟一的，例如由点 E 到点 B，再到点 A，再到点 A_1，再到点 D_1，再到点 F．因而又有 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1F}$．那么这种形式上的差异是否是实质性的呢，也就是说是否会因此得出 $\overrightarrow{EF}$ 用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 表示的不同表达式．实际上，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1F}=-\frac{1}{2}\vec{b}+(-\vec{a})+\vec{c}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$．这说明所要求的表示是惟一的，但却可以通过不同的过程得到．

2．要使下列各式成立，向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 应满足什么条件？

（1）$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

（2）$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$；

（3）$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$；

（4）$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$．

分析：本题与下一个题目是同类的问题．根据向量加法和减法的定义，$|\vec{a}+\vec{b}|$ 或者 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 与 $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ 之间的关系与 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是否平行有关，因此要区别这两种情况考虑．如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不平行，那么 $\vec{a}+\vec{b}$ 或者 $\vec{a}-\vec{b}$ 都可以通过三角形法则得出，我们的

问题就转化为三角形边长之间的关系；如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 平行，那么我们的问题就转化为一直线上线段长度之间的关系.

解：如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不平行，那么显然四个等式都不成立；如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 平行且方向相同，那么（1）成立；如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 平行但方向相反，那么（4）成立；如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向相反且 $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$，那么（2）成立；如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 方向相同且 $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$，那么（3）成立.

3．证明下列不等式，并说明等号什么时候成立.

（1）$|\vec{b}-\vec{a}|\geqslant|\vec{a}|-|\vec{b}|$；

（2）$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$.

证明：（1）如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不平行，那么由三角形法则和三角形任两边之差小于第三边即有 $|\vec{b}-\vec{a}|>|\vec{a}|-|\vec{b}|$；如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 平行但方向相反，那么 $|\vec{b}-\vec{a}|=|\vec{b}|+|\vec{a}|>|\vec{a}|-|\vec{b}|$；如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 平行且方向相同，那么 $|\vec{b}-\vec{a}|=|\vec{a}-\vec{b}|\geqslant|\vec{a}|-|\vec{b}|$，此时显然当且仅当 $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$ 时等号成立；

（2）根据向量加法的多边形法则和两点间直线距离最小公理即可得出 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$，而等号只有在 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 有相同方向时成立.

点评：1）这两个问题的关键是要把所有的可能性考虑全面，考虑清楚；

2）习题 3 的（2）可以推广到有限多个向量，即 $|\vec{a_1}+\vec{a_2}+\cdots+\vec{a_n}|\leqslant|\vec{a_1}|+|\vec{a_2}|+\cdots+|\vec{a_n}|$，等号当且仅当 $\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，…，

$\overrightarrow{a_n}$方向相同．当 $n=2$ 时即为三角不等式$|\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}|\leqslant|\overrightarrow{a_1}|+|\overrightarrow{a_2}|$．习题3的（1）还可利用三角不等式证明如下：$|\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{b}|\geqslant|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|$，所以$|\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}|\geqslant|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|$，等号当且仅当 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$与 $\overrightarrow{b}$方向相同，亦即 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$方向相同且$|\overrightarrow{a}|\geqslant|\overrightarrow{b}|$时成立．这个证法代数化特征更明显，应该认为是更规范的证明．习题3的（2）也可以采用如下的代数化的方法证明：$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})|\leqslant|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|\leqslant|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{c}|$，等号当且仅当 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$方向相同，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$方向相同，亦即 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$方向相同时成立．当然这个证明是以三角不等式为基础的．类似的，用数学归纳法可证$|\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\cdots+\overrightarrow{a_n}|\leqslant|\overrightarrow{a_1}|+|\overrightarrow{a_2}|+\cdots+|\overrightarrow{a_n}|$，等号当且仅当$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，…，$\overrightarrow{a_n}$方向相同时成立．

4．在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}$（$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$都是非零向量）．证明四边形 $ABCD$ 是梯形．

分析：只须证明四边形 $ABCD$ 中有两边平行且不相等，转化为向量问题就是证明$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$这四个向量中有两个平行且长度不等．

证明：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})+(-4\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})+(-5\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b})=-8\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}=2(-4\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=2\overrightarrow{BC}$．所以$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BC}$平行，且$|\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{BC}|$．所以四边形 $ABCD$ 是梯形．

点评：本题还可通过说明$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BC}$平行而$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$不平行得到

证明．应该注意，严格地说本题条件 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 都是非零向量的条件应为 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是不平行的非零向量．

5．设 $ABCDEF$ 是正六边形，求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$．

分析：实际上题目是一个向量加法式的化简问题．注意在正六边形 $ABCDEF$ 中四边形 $AEDB$ 和四边形 $AFDC$ 都是平行四边形并考虑向量加法的平行四边形法则即可得到化简的结果．

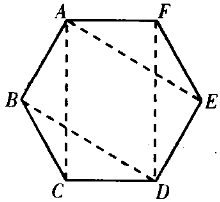


图 1-1-5

解：因为 $ABCDEF$ 是正六边形，所以四边形 $AEDB$ 和四边形 $AFDC$ 是平行四边形，因此

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF})+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AD}$．

6．设 L、M、N 分别是三角形 ABC 的三边 BC，CA，AB 的中点，证明三中线向量 $\overrightarrow{AL}$，$\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{CN}$ 可以构成一个三角形．

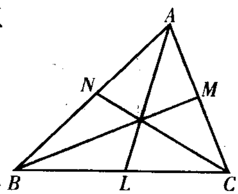


图 1-1-6

分析 1：只须证明 $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=0$．我们知道，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$，因此问题的关键是把中线向量 $\overrightarrow{AL}$，$\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{CN}$ 向三角形 ABC 的边向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$ 转化．

证明 1：注意 L，M，N 分别是三角形 ABC 三边中点．$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CL})+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN})=(\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA})=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})=0$，所以 $\overrightarrow{AL}$，$\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{CN}$ 可以构成一个三

角形.

分析 2：既然中线向量与边向量的关系是问题的关键，因此有必要对其进行一般性的讨论，再把讨论的结果应用于本题.

证明 2：因为 L 是 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{BL}=-\overrightarrow{CL}$. 又 $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}$，$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CL}$，所以 $2\overrightarrow{AL}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CL})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，因此 $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. 当然对于 $\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{CN}$ 也有同样的结论. 于是 $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=0$. 所以 $\overrightarrow{AL}$，$\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{CN}$ 可以构成一个三角形.

点评：证明 2 中所得到的结论：三角形一边上的中线向量是另两个边向量（方向都指向这一边）和的一半应予注意.

7. 在三角形 ABC 中求一点 O，使 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$.

分析：两条相交直线确定一个交点，因此要求出三角形 ABC 中满足条件的点 O，必须确定点 O 在三角形 ABC 内怎样的相交线段上. 由于条件对于点 O 的限定关于 A，B，C 三点都是对称的，所以找出点 O 所在的一个线段即可解决问题.

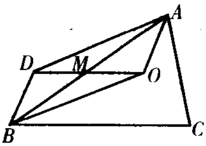


图 1-1-7

解：设 O 是 $\triangle ABC$ 中的一个点，且有 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$，以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $AOBD$，M 为对角线交点，于是 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}$. 由题设 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$，所以 $2\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OC}$. 这说明 O，M，C 三点共线. 由 M 为平行四边形 $AOBD$ 的对角线交点可知 M 为 AB 的中点. 所以 CM 为 AB 上的中线. 同理点 O 也在另两边的中线上，所以 O 是三角形 ABC 的重心.

点评：本题不可以直接取点 O 为三角形 ABC 的重心，然后验