

岩土加固理论 数值实现 及地下工程应用

侯公羽 刘 波 著

煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书主要包括:(1)以张量和矢量形式描述的岩土工程弹塑性力学基础;(2)基于弹塑性理论建立的岩土材料的本构理论、各种加固结构与岩土介质相互作用的模型及 FLAC/FLAC^{3D}的数值实现技术;(3)岩土工程的非线性理论方法及其应用实践;(4)地铁工程研究与应用,重点论述了作者承担的国家自然科学基金项目《暗挖地铁隧道诱发复杂岩土层环境损伤机理与预控研究》成果,包括地铁施工环境损伤的预控理论、计算机自动建模的数值实现、复杂红岩土水致损伤的微细观试验与数值仿真的若干进展,岩土加固理论在地铁工程中的多个应用实例等;(5)介绍了数值计算功能强大、效率高的 MATLAB 语言软件。本书非线性理论方法及应用的部分内容是基于 MATLAB 语言编程数值实现的。

本书主要供岩土工程、地下工程专业的研究生使用,也可供土木、交通、采矿、地质、市政、水利、工程力学等专业的高年级本科生、高等学校教师以及科研人员、工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

岩土加固理论数值实现及地下工程应用/侯公羽,
刘波著. —北京:煤炭工业出版社,2006
ISBN 7-5020-2872-2

I. 岩… II. ①侯… ②刘… III. ①岩土工程—加固—数值分析 ②岩土工程—加固—应用—地下工程—研究 IV. ①TU472 ②TU94

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 034151 号

煤炭工业出版社 出版
(北京市朝阳区芍药居 35 号 100029)
网址:www.cciph.com.cn
北京京科印刷有限公司 印刷
新华书店北京发行所 发行

开本 787mm×1092mm^{1/16} 印张 26^{3/4}
字数 651 千字 印数 1—1,500
2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷
社内编号 5659 定价 58.00 元

版权所有 违者必究

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,本社负责调换

前 言

随着我国经济建设的飞速发展,需要建设大批的土木工程和基础设施项目。尤其是基础设施的建设与发展,需要大批的岩土工程人才,并不断提出新需求、新问题。

岩土工程专业人才(特别是研究生)的培养与需求逐年增加,但较系统的并兼顾现代岩土工程技术、方法、原理与应用的专著或研究生教材少见。本专著是在作者近10年来的研究生教学与科研成果的基础上,经多次教学实践并不断完善撰写而成。它兼顾了岩土工程弹塑性力学基础、现代非线性理论方法,以及这些理论方法在岩土工程中的数值实现与具体应用,同时体现了少而精和实用的原则。

本书主要供岩土工程、地下工程专业的研究生使用,也可供土木、交通、采矿、地质、市政、水利、工程力学等专业的高年级本科生、高等学校教师以及科研人员、工程技术人员参考。

本书由循序渐进的、相互联系的如下内容组成:(1)以张量和矢量形式描述的岩土工程弹塑性力学基础。张量和矢量是弹塑性力学理论的重要数学工具。掌握这些内容,对于读者顺利阅读本书及查阅岩土工程领域高级别的文献是有益的。(2)岩土本构理论与加固的数值实现。介绍基于弹塑性理论建立的岩土材料的本构理论、各种加固结构与岩土介质相互作用的模型及FLAC/FLAC^{3D}的数值实现技术。(3)岩土工程的非线性理论方法及其应用实践。掌握这些非线性理论与方法,有助于读者更好地掌握岩土工程研究的现代理论与方法及研究的前沿与热点问题。(4)地铁工程研究与应用。重点论述了作者承担的国家自然科学基金项目《暗挖地铁隧道诱发复杂岩土层环境损伤机理与预控研究》成果,包括:地铁施工环境损伤的预控理论,计算机自动建模的数值实现,复杂红岩土水致损伤的微细观试验与数值仿真的若干进展,岩土加固理论在地铁工程中的多个应用实例等。(5)数值计算功能强大、可视化好、效率高的MATLAB语言软件。本书非线性理论方法及应用的部分内容是基于MATLAB语言编程数值实现的。

本专著得到国家自然科学基金(50304012)《暗挖地铁隧道诱发复杂岩土层环境损伤机理与预控研究》项目的资助,应用部分重点介绍了作者近年来在地铁工程理论研究与工程应用的若干成果。

本专著分为5篇共计18章,由侯公羽、刘波共同撰写。其中第1、2、3、4、5、6、9、11、12、13、18章由侯公羽撰写;第7、8、10、14、15、16、17章由刘波撰写。全书由田克运编审审阅。

作者衷心感谢香港大学岳中琦教授、英国诺丁汉大学余海岁教授、清华大学杨强教授、中国建筑工程总公司陈祥福教授在岩土工程加固理论与工程应用研究工作方面给予的大力帮助和有益的建议。

在这里,还要特别感谢陶龙光教授、李先炜教授多年的教诲与关爱。感谢中国矿业大学(北京)杨仁树教授、安里千教授、何满潮教授、高全臣教授、单仁亮教授、彭苏萍教授、姜耀东教授、江玉生博士等给予的帮助与指教。

感谢研究生卓发成、叶圣国、丁城刚、高志强、严继华、张定春、刘纪峰、陈军等在第7、8、

10、14、15、16、17 章的资料收集或项目研究方面付出的努力。感谢研究生杨春峰在第 12 章的资料收集和项目研究方面付出的努力。感谢研究生吴雪丽、黄浩、曲兴隆、韩小林、杨悦等在第 1、2、3、4、5、6、9、11、12、13、18 章的绘图及资料的收集方面付出的努力。

作者十分感谢国家自然科学基金(50304012)的资助,使项目研究得以顺利进行并促成了本书的出版。

由于作者水平有限,书中难免存在不妥之处,恳请读者批评指正。

侯公羽 刘 波

2005 年 10 月 18 日

目 录

第 1 篇 岩土工程弹性力学基础

第 1 章 应力分析	(3)
1.1 应力张量	(3)
1.2 Cauchy 应力公式	(6)
1.3 八面体应力	(7)
1.4 偏应力张量	(9)
1.5 平衡方程	(11)
第 2 章 应变分析	(12)
2.1 Cauchy 应变公式	(12)
2.2 八面体应变	(13)
2.3 偏应变张量	(14)
2.4 应变协调方程	(15)
第 3 章 弹性应力—应变关系	(17)
3.1 概述	(17)
3.2 各向同性材料的线弹性应力—应变关系(广义虎克定律)	(19)
3.3 弹性固体的应变能和余能密度	(26)
3.4 各向异性、正交各向异性及横观各向同性线弹性(Green)应力—应变关系	(29)
3.5 非线性弹性应力—应变关系	(32)
3.6 各向同性材料的增量应力—应变关系(亚弹性)	(34)
3.7 基于割线模量的增量关系	(36)
3.8 变模量增量应力—应变模型	(37)
3.9 本章小结	(40)

第 2 篇 岩土工程塑性力学基础

第 4 章 单轴状态下弹塑性材料的特征和模型	(45)
4.1 塑性和模型	(45)
4.2 单轴应力—应变特性	(45)

4.3 单轴状态下的全量应力—应变模型	(47)
4.4 单轴状态下的增量应力—应变模型	(49)
4.5 稳定材料的稳定性假设	(55)
4.6 循环塑性和模型	(57)
第5章 屈服准则	(58)
5.1 引言	(58)
5.2 与静水压力无关的材料	(59)
5.3 与静水压力相关的材料	(63)
5.4 各向异性屈服准则	(70)
第6章 塑性应力—应变关系	(71)
6.1 加载准则	(71)
6.2 流动法则	(72)
6.3 理想塑性材料的增量应力—应变关系	(75)
6.4 强化法则	(81)
6.5 有效应力和有效塑性应变	(85)
6.6 加工强化材料的增量应力—应变关系	(88)

第3篇 岩土本构理论与加固的数值实现

第7章 岩土材料模型的本构理论和数值实现	(95)
7.1 零模型	(95)
7.2 弹性模型	(95)
7.3 摩尔—库仑模型	(98)
7.4 德鲁克—普拉格(Drucker—Prager)模型	(101)
7.5 节理化模型	(105)
7.6 应变硬化—软化模型	(109)
7.7 双线性应变硬化—软化的节理化模型	(110)
7.8 双屈服模型	(115)
7.9 修正的剑桥粘土模型	(120)
7.10 霍克—布朗模型	(123)
第8章 岩土与结构相互作用的模型及数值实现	(127)
8.1 梁单元	(127)
8.2 锚索单元	(130)
8.3 桩单元	(136)
8.4 二维岩石锚杆单元	(140)
8.5 二维条带单元	(141)
8.6 二维支撑单元	(143)
8.7 三维壳体单元	(144)
8.8 衬砌单元	(146)

8.9 三维土工格栅单元	(149)
--------------------	-------

第 4 篇 岩土工程非线性理论、方法及应用

第 9 章 岩土工程的可靠度分析与应用	(155)
9.1 结构可靠度的基本理论和研究概况	(155)
9.2 改进的一次可靠度迭代算法	(161)
9.3 ANSYS 软件二次开发及其在岩土工程可靠度分析中的应用	(167)
9.4 基于优化算法的结构体系可靠度分析	(171)
9.5 灾害荷载下的结构体系可靠度近似计算	(176)
9.6 基于混沌动力学的一次可靠度方法收敛性探讨	(181)
第 10 章 锚杆支护大变形围岩的拉剪抗力设计理论及应用	(190)
10.1 经典应变张量的局限性及大变形力学基础	(190)
10.2 锚固粗糙节理岩石大变形剪切强度理论分析	(195)
10.3 大变形巷道的锚拉支架设计理论及应用	(205)
第 11 章 神经网络及其在岩土工程中的应用	(218)
11.1 概述	(218)
11.2 神经元模型与网络结构	(219)
11.3 线性神经网络	(224)
11.4 BP 神经网络	(225)
11.5 径向基神经网络(RBN、GRNN、PNN)	(228)
11.6 自组织竞争神经网络	(231)
11.7 学习矢量量化(LVQ)神经网络	(232)
11.8 神经网络在岩土工程中的应用	(234)
第 12 章 遗传算法及其在岩土工程中的应用	(237)
12.1 全局最优化方法简介	(237)
12.2 遗传算法发展简史	(238)
12.3 遗传算法概念	(239)
12.4 遗传算法特点	(240)
12.5 遗传算法与传统方法的比较	(241)
12.6 遗传算法的基本用语	(243)
12.7 遗传算法的研究方向	(244)
12.8 遗传算法的基本原理与方法	(245)
12.9 遗传算法的应用	(250)
12.10 遗传算法在岩土工程中的应用	(252)
12.11 进化策略在基坑桩锚(单排锚杆)支护中的应用研究	(253)
第 13 章 分叉与混沌及其在岩土工程中的应用	(260)
13.1 非线性动力学概述	(260)
13.2 分叉简介	(265)

13.3 混沌及其数值实验	(271)
13.4 层状断裂顶板锚拉支架支护系统的分叉特性研究	(281)

第 5 篇 地铁工程研究与应用

第 14 章 地铁施工诱发地层环境损伤理论的数值实现与实例分析	(289)
14.1 地铁隧道施工引起的地层沉降分析概述	(289)
14.2 地铁隧道施工对地层影响的弹塑性理论分析与数值实现	(292)
14.3 地铁隧道施工引起的横向地层沉降预测理论研究	(298)
14.4 地铁隧道施工的纵向地表沉降预测理论研究	(302)
14.5 双孔平行隧道施工的地表沉降预测理论	(304)
14.6 地表移动与变形预测理论的数值实现	(308)
14.7 地铁隧道施工诱发地层环境损伤预测与控制 STEAD 系统的研制	(311)
14.8 地铁隧道施工的实例研究	(313)
14.9 地铁施工诱发地面建筑物损伤预控的经验判据	(321)
第 15 章 地铁施工诱发地层沉降的计算机自动建模预测研究	(323)
15.1 地铁施工诱发地层沉降分析方法概述	(323)
15.2 单隧道施工过程模拟及其诱发地层环境损伤分析的自动建模	(324)
15.3 双隧道施工过程模拟及其诱发地层环境损伤预测的自动建模	(328)
15.4 本章小结	(332)
第 16 章 地铁施工诱发地层环境损伤三维预控的实例研究	(334)
16.1 地铁隧道下穿建筑物基础诱发地层变形空间效应的实例分析	(334)
16.2 北京地铁十号线区间双隧道下穿城铁车站实例分析	(340)
16.3 北京地铁双隧道短台阶矿山法施工地层沉降三维数值分析	(344)
16.4 盾构法隧道基础上扩挖地铁车站分析	(348)
16.5 北京地铁车站明挖施工动态过程三维数值分析	(355)
第 17 章 华南复杂红岩土水致损伤的微细观试验与数值仿真	(362)
17.1 华南复杂红层岩土对地铁工程的影响	(362)
17.2 广州地铁复杂红层岩土物理力学性质试验研究	(364)
17.3 广州地铁复杂红层岩土微细观试验研究概述	(369)
17.4 广州地铁复杂红层岩土 X 射线衍射分析	(371)
17.5 广州地铁复杂红层岩土扫描电镜试验分析	(378)
17.6 华南复杂红层岩土水致损伤过程的细胞自动机仿真模拟	(390)
17.7 复杂红层岩土水致损伤演化的微观结构模型探讨	(395)
第 18 章 MATLAB 语言及其在岩土工程中的应用	(399)
18.1 MATLAB 概述	(399)
18.2 MATLAB 语言特点	(401)
18.3 MATLAB7 的安装	(402)
18.4 MATLAB7 的新特点	(403)

18.5	MATLAB7 的新产品及更新产品	(404)
18.6	Simulink6.0 的新特点	(406)
18.7	MATLAB 在岩土工程中的应用	(407)
参考文献		(409)

第 1 篇

岩土工程弹性力学基础

第1章 应力分析

1.1 应力张量

图 1-1 表示一个单元体 $OABC$ ，在他的平面 OBC 、 OAC 、 OAB 和 ABC 上分别作用有应力 $\vec{T}^1$ 、 $\vec{T}^2$ 、 $\vec{T}^3$ 和 $\vec{T}^n$ ， F 表示单元体 $OABC$ 单位体积上的体力， h 表示 O 点到 ABC 上的垂直距离。

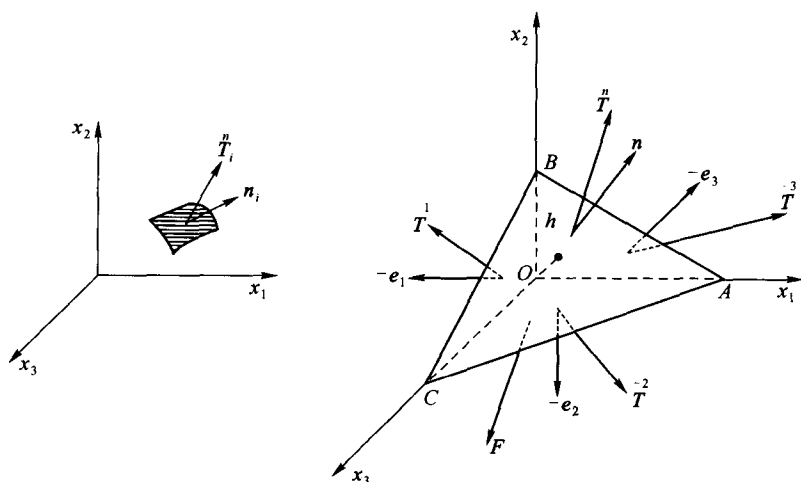


图 1-1 作用于任意平面上的应力矢量与作用于坐标平面上三个应力矢量的关系

单位矢量 $\mathbf{n}$ 可以写成分量形式：

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \quad (1-1)$$

其中，方向余弦 n_1 、 n_2 和 n_3 分别为

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) \\ n_2 &= \cos(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) \\ n_3 &= \cos(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (1-2)$$

设 A 为 $\triangle ABC$ 的面积，那么垂直于 x_i 轴的面的面积记为 A_i ，可由下式计算

$$A_i = A \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{n}) = A n_i \quad (1-3)$$

单元体 $OABC$ 的体积为

$$V = \frac{1}{3} A h \quad (1-4)$$

根据单元体 $OABC$ 的平衡及式(1-3),有

$$\bar{\mathbf{T}}^n(A) + \bar{\mathbf{T}}^{-1}(An_1) + \bar{\mathbf{T}}^{-2}(An_2) + \bar{\mathbf{T}}^{-3}(An_3) + \mathbf{F}\left(\frac{1}{3}Ah\right) = 0 \quad (1-5)$$

将式(1-5)除以 A , 并取 $h \rightarrow 0$ (即让 $\triangle ABC$ 面积移到 O 点),有

$$\bar{\mathbf{T}}^n = -\bar{\mathbf{T}}^{-1}n_1 - \bar{\mathbf{T}}^{-2}n_2 - \bar{\mathbf{T}}^{-3}n_3 \quad (1-6)$$

但

$$\bar{\mathbf{T}}^{-i} = -\bar{\mathbf{T}}^i \text{ 对 } i = 1, 2 \text{ 和 } 3$$

所以

$$\bar{\mathbf{T}}^n = \bar{\mathbf{T}}^1n_1 + \bar{\mathbf{T}}^2n_2 + \bar{\mathbf{T}}^3n_3 \quad (1-7)$$

或采用笛卡尔坐标 x 、 y 和 z , 则

$$\bar{\mathbf{T}}^n = \bar{\mathbf{T}}^xn_x + \bar{\mathbf{T}}^yn_y + \bar{\mathbf{T}}^zn_z \quad (1-8)$$

式(1-7)或式(1-8)表示任意点相对于截面 n 上的应力矢量 $\bar{\mathbf{T}}^n$, 该应力矢量可以用过该点的且垂直于 3 个坐标轴 x_1 、 x_2 和 x_3 的平面上的应力矢量来表示。显然, 这 3 个应力矢量 $\bar{\mathbf{T}}^1$ 、 $\bar{\mathbf{T}}^2$ 和 $\bar{\mathbf{T}}^3$ 完全确定了一点的应力状态。

很显然, 应力矢量 $\bar{\mathbf{T}}^n$ 并不一定垂直于他所作用的平面。通常, 将应力矢量 $\bar{\mathbf{T}}^n$ 分解为两个分量, 一个分量垂直于法线为 n 的平面, 称为正应力; 另一个分量平行于该平面, 称为剪应力。

与 3 个坐标平面 x_1 、 x_2 和 x_3 有关的应力矢量, 也可以分解成沿 3 个坐标轴方向的分量。例如, 与坐标平面 x_1 有关的应力矢量 $\bar{\mathbf{T}}^1$ 有 3 个应力分量, 即正应力 σ_{11} 、剪应力 σ_{12} 和 σ_{13} , 他们分别沿着坐标轴 x_1 、 x_2 和 x_3 的方向, 如图 1-2 所示。故有

$$\bar{\mathbf{T}}^1 = \sigma_{11}e_1 + \sigma_{12}e_2 + \sigma_{13}e_3 \quad (1-9)$$

或

$$\bar{\mathbf{T}}^1 = \sigma_{1j}e_j \quad (1-10)$$

同样, 对于坐标平面 x_2 和 x_3 , 有

$$\bar{\mathbf{T}}^2 = \sigma_{2j}e_j \quad (1-11)$$

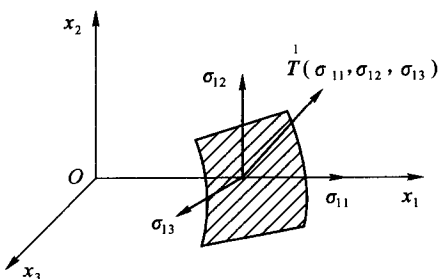
$$\bar{\mathbf{T}}^3 = \sigma_{3j}e_j \quad (1-12)$$

一般地

$$\bar{\mathbf{T}}^i = \sigma_{ij}e_j \quad (1-13)$$

式中 σ_{ij} ——应力矢量 $\bar{\mathbf{T}}^i$ 的第 j 个分量, 该应力矢量作用在一个单元面上(在 P 点), 该单元面的法线方向为 x_i 轴的正方向(图 1-2)。

确定 3 个应力矢量 $\bar{\mathbf{T}}^1$ 、 $\bar{\mathbf{T}}^2$ 和 $\bar{\mathbf{T}}^3$ 所需的 9 个基本量 σ_{ij} , σ_{ij} 称为应力张量的分量, 即

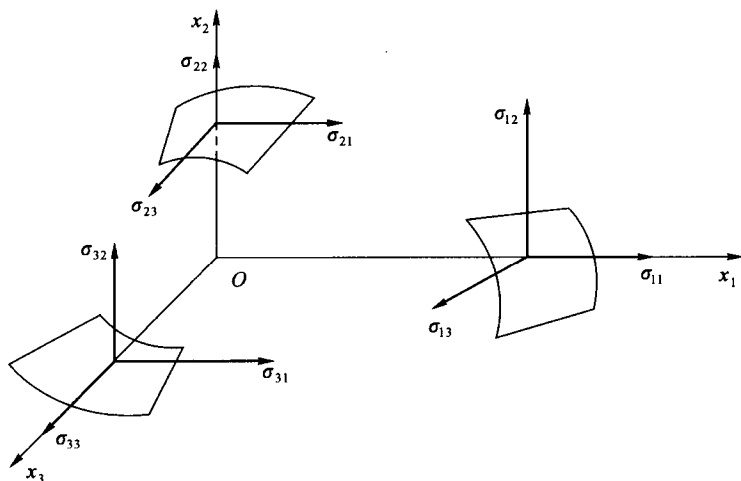
图 1-2 与垂直于 x_1 轴的坐标平面有关的应力矢量的笛卡尔分量

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

式中 σ_{11} 、 σ_{22} 和 σ_{33} ——正应力分量；

σ_{12} 、 σ_{21} 等——剪应力分量。

应力张量的分量的正方向在 x_i 坐标系中的表示如图 1-3 所示。

图 1-3 应力张量 σ_{ij} 在 x_i 坐标系的分量

采用 von Karman 标记,应力张量的分量可以写为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

式中 σ ——正应力分量；

τ ——剪应力分量；

σ_{ij} 和 τ_{ij} ——式(1-14)和式(1-15)中的应力张量分量。

应力张量 σ_{ij} 的双指标标记有以下几种形式：

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

将式(1-13)代入式(1-7),应力矢量 T_n 的分量可以写成

$$\overset{n}{T}_i = \sigma_{ji} n_j \quad (1-17)$$

可以证明 σ_{ij} 是对称的,即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$,所以,式(1-17)可以重新写成

$$\overset{n}{T}_i = \sigma_{ij} n_j \text{ 和 } i = 1, 2, 3 \quad (1-18)$$

式中的 σ_{ij} 由式(1-16)给出。

式(1-18)表示作用于某点法线为 n 的任意平面上的应力矢量分量,可以用该点的应力张量分量表示,所以,可以从包含有 9 个基本量的 σ_{ij} 计算出对应于任何 n_i 的 T_i 值。

在式(1-18)中, $\overset{n}{T}_i$ 是对应任意矢量 n_i 的一个矢量。根据张量的商法则中的交错定理, σ_{ij} 是一个二阶张量。如果已知在 x_i 坐标系中的 σ_{ij} , 那么 σ_{ij} 在 x'_i 坐标系中的分量 σ'_{ij} 也就知道了,即 $\sigma'_{ij} = l_{im} l_{jn} \sigma_{mn}$ 。反之,则有 $\sigma_{ij} = l_{mi} l_{nj} \sigma'_{mn}$ 。

另外,式(1-18)也可以作为问题求解的边界条件,即边界上任意点的应力分量 σ_{ij} 都必须满足式(1-18)。

1.2 Cauchy 应力公式

式(1-17)和式(1-18)是 Cauchy 应力公式的两种不同形式。但在实际应用中,需要根据某点的应力张量分量 σ_{ij} 来直接表示作用于过该点任意平面上的任意矢量 $\overset{n}{T}$ 的正应力分量 σ_n 和剪应力分量 S_n 。

正应力分量大小为

$$\sigma_n = \overset{n}{T} \cdot n = \overset{n}{T}_i n_i \quad (1-19)$$

将式(1-18)代入 $\overset{n}{T}_i$ 后,式(1-19)变为

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (1-20)$$

剪应力分量大小为

$$S_n^2 = (\overset{n}{T})^2 - \sigma_n^2 \quad (1-21)$$

式中的 $(\overset{n}{T})^2$ 由式(1-18)得出

$$(\overset{n}{T})^2 = \overset{n}{T} \cdot \overset{n}{T} = \overset{n}{T}_i \overset{n}{T}_i = (\sigma_{ij} n_j) \cdot (\sigma_{ik} n_k) \quad (1-22)$$

或

$$(\overset{n}{T})^2 = \sigma_{ij} \sigma_{ik} n_j n_k \quad (1-23)$$

式(1-20)和式(1-21)确定了作用于法线为 n 的任意面上的正应力分量和剪应力分量,是 Cauchy 应力公式中最重要的、应用最广的形式。

方向:矢量 σ_n 沿法线 n 的方向,矢量 S_n 位于矢量 $\overset{n}{T}$ 和法线 n 所形成的平面内。

【例 1-1】 某点的应力状态由应力张量 σ_{ij} 给出

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -80 & 16 & 26 \\ 16 & 26 & -28 \\ 26 & -18 & -36 \end{bmatrix} \text{ (应力单位)}$$

对于单位法线为 $\mathbf{n} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{11}}{4}\right)$ 的平面, 计算:

- (1) 对于法线为 $\mathbf{n}$ 的平面, 应力矢量 $\mathbf{T}$ 的大小;
- (2) 对于法线为 $\mathbf{n}$ 的平面, 正应力分量 σ_n 和剪应力分量 S_n 。

【解】

- (1) 由式(1-18)计算应力矢量 $\mathbf{T}$ 的分量 T_i , 得

$$T_1 = \sigma_{1j}n_j = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = 9.56$$

同样, 有

$$T_2 = \sigma_{2j}n_j = -6.22, \quad T_3 = \sigma_{3j}n_j = -37.35$$

所以, 应力矢量 $\mathbf{T}$ 的大小为

$$|\mathbf{T}| = [(\mathbf{T}_1)^2 + (\mathbf{T}_2)^2 + (\mathbf{T}_3)^2]^{\frac{1}{2}} = 39.10$$

- (2) 将数据代入式(1-20)得

$$\sigma_n = \sigma_{ij}n_i n_j = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 + 2(\sigma_{12}n_1 n_2 + \sigma_{23}n_2 n_3 + \sigma_{31}n_3 n_1) = -31.69$$

所以, 剪应力分量 S_n 的大小用式(1-21)计算得

$$|S_n| = [(\mathbf{T})^2 - \sigma_n^2]^{\frac{1}{2}} = [(39.10)^2 - (-31.69)^2]^{\frac{1}{2}} = 22.90$$

1.3 八面体应力

八面体(应力)平面是一个法线与每个应力主轴夹角相等的平面, 故在主坐标系中, 法线 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = |1/\sqrt{3}|(1, 1, 1)$ 的平面称为八面体(应力)平面。我们可以得到 8 个八面体(应力)平面, 如图 1-4 所示, 且 $OA = OB = OC = OA' = OB' = OC'$ 。

在主应力轴 1、2 和 3 的坐标系中, 应力张量 σ_{ij} 可以写成

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

在 O 点任何方向 $\mathbf{n}$ 的应力矢量的正应力分量可用式(1-20)中的 Cauchy 应力公式得到

$$\sigma_n = \sigma_{ij}n_i n_j$$

或

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1 n_1 + \sigma_2 n_2 n_2 + \sigma_3 n_3 n_3 \quad (1-25)$$

故, 在八面体一个平面上的正应力为

$$\sigma_{oct} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_1 \quad (1-26)$$

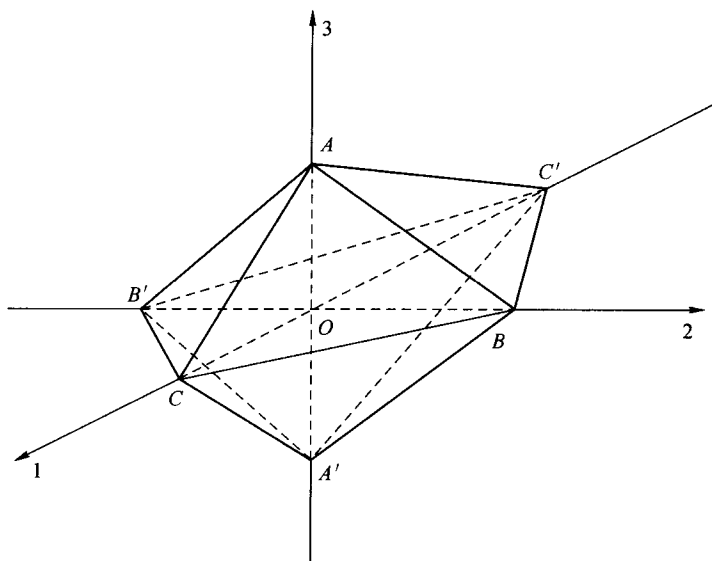


图 1-4 在主坐标系中的八面体(应力)平面

注意:

- (1) σ_{oct} 值是正应力平均值(或静水应力)。
- (2) 对于各向同性材料, σ_{oct} 仅由体积变化引起, 不受单元形状影响。
- (3) 在八面体(应力)平面的 8 个面上, σ_{oct} 的大小相等。

八面体面上的剪应力 τ_{oct} 可以从式(1-21)中得到

$$\tau_{oct}^2 = (\bar{T}_{oct}^n)^2 - \sigma_{oct}^2 \quad (1-27)$$

利用式(1-22)计算 $(\bar{T}_{oct}^n)^2$, 有

$$(\bar{T}_{oct}^n)^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \quad (1-28)$$

所以

$$\begin{aligned} \tau_{oct}^2 &= \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{3^2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \quad (1-29)$$

τ_{oct} 可以由主剪应力表示

$$\tau_{oct}^2 = \frac{4}{9}(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2) \quad (1-30)$$

式中 τ_{12} 、 τ_{23} 和 τ_{31} ——主剪应力。

所以
$$\tau_{oct} = \frac{2}{3}(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2} \quad (1-31)$$

应该指出, 式(1-31)为 J_2 的定义式。