王后雄学案

教材完全解读

总策划：熊 辉

修订版

高一数学（上）

丛书主编：王后雄
本册主编：田祥高

导航 丛书系列

中国青年出版社

王后雄学案

教材完全解读

高一数学（上）

主编：田祥高

编委：余子君　刘杰峰
胡汉明　夏海军
姜　可　邵海建
吴小明　黄浩胜
田　军　陈　芳
占　华　余方圆
周金涛　王长发
郭倩芳　吴支明
王国华　胡清华

X导航 丛书系列

中国青年出版社

(京)新登字 083 号

图书在版编目(CIP)数据

教材完全解读. 高一数学. 上：2006 年修订版/田祥高主编.
3 版. —北京：中国青年出版社，2005
ISBN 7－5006－5304－2

Ⅰ. 教...　Ⅱ. 田...　Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 033628 号

策　　划：熊　辉
责任编辑：李　扬
封面设计：小　河

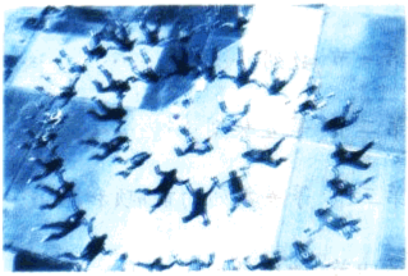
教材完全解读

高一数学

2006 年修订版

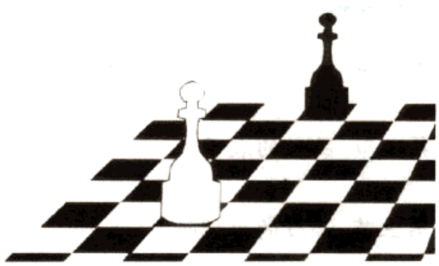
中国青年出版社出版 发行
社址：北京东四 12 条 21 号　邮政编码：100708
网址：www.cyp.com.cn
编辑部电话：(010)64034328
营销中心：(010)64065904
聚鑫印刷有限责任公司印制　新华书店经销
889×1194　1/16　13 印张　351 千字
2003 年 7 月北京第 1 版　2005 年 5 月北京第 3 版　2005 年 7 月河北第 5 次印刷
印数：96001—106000 册
定价：17.70 元
本书如有任何印装质量问题，请与印务中心质检部联系调换
联系电话：(010)84047104

目录



目录

第三章 数列



第一章 集合与简易逻辑

第一节 集　　合

1 重难点聚集

1. 集合的概念

集合是数学中最原始的不定义的概念，只能给出描述性说明：某些指定的对象集在一起就成为一个集合. 组成集合的对象叫元素. 集合常用大写字母 $A,B,C\cdots$ 来表示，元素常用小写字母 $a,b,c\cdots$ 来表示.

集合是一个确定的整体，因此对集合也可以这样描述：具有某种属性的对象的全体组成一个集合.

注意：(1) 对于集合我们一定要从整体的角度来看待它. 例如由“我们班的同学”组成的一个集合 A，则它是一个整体，也就是一个班集体，也可以用我们班的序号来代替它.

(2) 要注意组成集合的“对象”的广泛性：一方面，任何一个确定的对象都可以组成一个集合，如人、动物、物体、数、方程、不等式等都可以作为组成集合的对象；另一方面，就是集合本身也可以作为集合的对象. 如果上面所提到的集合 A，可以作为以“我们高一年级各班”组成的集合 B 的元素.

特殊数集的表示：$\mathbf{N}^*=\{$正整数$\}$，$\mathbf{N}=\{$自然数$\}$，$\mathbf{Z}=\{$整数$\}$，$\mathbf{Q}=\{$有理数$\}$，$\mathbf{R}=\{$实数$\}$.

2. 元素与集合的关系

元素与集合的关系有属于与不属于两种：元素 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；元素 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$ 或 $a\bar{\in} A$.

注意：符号“$\in$”及“$\notin$”表示元素与集合之间的关系，即属于与不属于.

3. 元素的性质

确定性：给定一个集合，则任何一个对象是不是这个集合的元素必须是明确的；互异性：集合中没有两个元素是重复的；无序性：集合中的元素没有前后顺序.

集合的元素必须具备确定性、互异性、无序性；反过来，一组对象若不具备这三性，则这组对象也就不能构成集合.

集合的元素的“三性”，既是解决有些问题的切入点，又是我们解题的疏忽点、易错点.

例：你能否求出实数 q 和 d，使集合 $\{a,a+d,a+2d\}$ 与 $\{a,aq,aq^2\}$ 的元素完全相同？

解：由无序性知 $\begin{cases}a+d=aq,\\a+2d=aq^2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+d=aq^2,\\a+2d=aq,\end{cases}$

名师诠释

◈ [考题1]　以你所在的学校为例，举几例说明哪些对象能组成一个集合，哪些对象不能组成一个集合.

[解析]　看一组对象能否组成集合，关键是看这组对象是否是确定的，即任何一个对象，要么在这一组之中，要么不在，而没有第三种情况. 例如：

(1)“我所在班上的男同学”能组成集合；

(2)“班上高个子同学”就不能组成集合，因为“高个子”没有确定的标准；

(3)“我们学校一年级所有班”能组成集合.

[点评]　判断一组对象能否组成一个集合，关键是看是否有一个明确的标准，用来判定任何一个对象是否在这个集合中.

◈ [考题2]　下列各组对象能构成集合吗？

(1) 某校高一(1)班的男生；

(2) 关于 x 的方程 $ax^2+1=0$ 的实数解；

(3) 漂亮的女孩.

[解析]　在(1)中，任意一个人是不是某校的高一(1)班男生，是明确的，因此它能构成一个集合；在(2)中对于给定的常数 a，方程 $ax^2+1=0$ 的实数解是确定的，它也是一个集合；在(3)中，由于“漂亮”没有明确的标准，因此它不能构成一个集合.

[答案]　(1)、(2)能构成集合；(3)不能构成集合.

◈ [考题3]　下列命题中真命题的个数是(　　).

①$0\in\varnothing$；②$\varnothing\in\{\varnothing\}$；③$0\in\{0\}$；④$\varnothing\notin\{a\}$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

[解析]　要判断一个元素是否在某个集合中，关键在于弄清这个集合由哪些元素所组成的. 由于 $\varnothing$ 是不含任何元素的集合，故①错；而 $\{\varnothing\}$ 是由空集作为元素组成的一个集合，故②正确；同理③也正确；因为 $\notin$ 是表示元素与集合之间的关系，④不正确，故选 B.

[探究]　由本例你能领悟到如何区别符号“0”、“$\varnothing$”、“$\{0\}$”、“$\{\varnothing\}$”吗？

事实上“0”是一个数，它可以作为集合的元素；而“$\varnothing$”则是一个集合，由于集合也可以作为另一个集合的元素，因此“$\varnothing$”也可以作为某些集合的“元素”；“$\{0\}$”则是由数 0 组成的一个单元素集合，“$\{\varnothing\}$”是由“$\varnothing$”为元素组成的一个集合.

◈ [考题4]　由对象 x,x^2-x,x^3-3x 能组成一个集合吗？如果能组成一个集合，则说明理由；如果不能，则需要添加什么条件，使它组成一个集合.

[解析]　它不一定能表示成一个集合，因为 x,x^2-x、x^3-3x 之间有可能相等，因而不一定满足元素的互异性.

由 $x=x^2-x$，得 $x=0$ 或 $x=2$；

由 $x=x^3-3x$，得 $x=0$ 或 $x=\pm2$；

由 $x^2-x=x^3-3x$，得 $x=0$ 或 $x=2$ 或 $x=-1$.

故只需要添加条件 $x\neq0$ 且 $x\neq-1$，且 $x\neq2$，且 $x\neq-2$，

则 $\{x,x^2-x,x^3-3x\}$ 能表示成一个集合.

[点评]　集合的元素所必须具备的“三性”有着广泛的应用，在解题时，特别是在题目解答快完毕之时，我们必须问问自己，这里的集合的元素是否满足三性.

若 $a=0$ 或 $q=1$，则集合 $\{a,aq,aq^2\}$ 的元素完全相同，这与无序性矛盾．$\therefore a\neq0$ 且 $q\neq1$.

解 $\begin{cases}a+d=aq,\\a+2d=aq^2,\end{cases}$ 得 $q=1$. 矛盾．

解 $\begin{cases}a+d=aq^2,\\a+2d=aq^2,\end{cases}$ 得 $q=1$（舍）或 $q=-\dfrac{1}{2}$.

由 $q=-\dfrac{1}{2}$ 得 $d=-\dfrac{3}{4}a$.

故存在这样的实数 q 和 d，只要 $q=-\dfrac{1}{2}$ 且 $d\neq0$ 即可．

4. 集合的分类

按集合的元素个数的多少，可分为有限集、无限集．

空集就是不含任何元素的集合，空集可用"$\varnothing$"或"$\{\ \}$"表示．

空集就像一个无处不在的幽灵，要处处设防，时刻提高警惕，才不致于掉进空集这一陷阱之中．

例：若集合 $A=\{x|ax^2-(2-a)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$ 中的元素都是集合 $B=\{1,2\}$ 的元素，求 a 的值．

此时应该考虑几种情况呢？应该既考虑 $A=\{1\}$ 或 $A=\{2\}$，或 $A=\{1,2\}$，还要考虑 $A=\varnothing$，即 $\Delta<0$ 的情况．

2 方法·技巧平台

5. 列举法

用列举法表示集合，就是把集合的元素一一列举出来，并写在大括号内．

用列举法表示集合时，必须注意如下几点：(1)元素与元素之间必须用"，"隔开；(2)集合的元素必须是明确的；(3)不必考虑元素出现的先后顺序；(4)集合的元素不能重复；(5)集合的元素可以表示任何事物；(6)对含有较多元素的集合，如果构成该集合的元素具有明显的规律，可用列举法表示，但是必须把元素间的规律显示清楚后，才能用省略号表示，如 $\mathbf{N}^*=\{1,2,3,\cdots\}$.

6. 描述法

描述法就是把集合的元素所具有的属性叙述出来，并写在大括号内．它又分为：(1)文字描述法——用文字把元素所具有的属性描述出来，如{自然数}；(2)符号描述法——用符号把元素所具有的属性描述出来，即 $\{x|p(x)\}$ 或 $\{x\in A|p(x)\}$ 等．

用符号描述法表示集合时注意：(1)弄清元素所具有的形式（即代表元素是什么），是数、还是有序实数对（点）、还是集合、还是其他

◈［考题5］ 已知集合 $M=\{a,b,c\}$ 中的三个元素可构成某一个三角形的三边长，那么此三角形一定不是（　　）.

A. 直角三角形　B. 锐角三角形　C. 钝角三角形　D. 等腰三角形

［解析］ 根据集合中元素的互异性可知 $a\neq b\neq c$. 由它们组成的三角形一定不是等腰三角形．

［答案］ D

◈［考题6］ 已知集合 $A=\{x|ax^2-2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 A 中至多只有一个元素，求实数 a 的取值范围．

［解析］ 由符号描述法可知集合 A 就是关于 x 的方程 $ax^2-2x+1=0$ 的实数解集．因此要使 A 中的元素至多只有一个，首先要考虑此方程是不是一元二次方程；其次，当它是一元二次方程时，由于集合的元素具有互异性，因此当它有两个相等的根，则只能作一个元素；此外还要考虑此一元二次方程没有实数解的情形．

(1) 当 $a=0$ 时，$A=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

(2) 当 $a\neq0$ 时，若 $\Delta=4-4a=0$，即 $a=1$，则 $A=\{1\}$；

若 $\Delta=4-4a<0$，即 $a>1$，则 $A=\varnothing$.

故所求的 a 的取值范围是 $a=0$ 或 $a\geq1$.

［提醒］ 在解题时，我们应该如何提防掉进"空集"这个陷阱之中呢？首先在分析问题时，应该问问自己，需不需要考虑"空集"这种情况呢？其次，在题目解答出来之时，再问问自己，是否漏了"空集"这种情况呢？

◈［考题7］ 用列举法表示下列集合：

(1)不大于10的非负偶数集；

(2)自然数中不大于10的质数集；

(3) $\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b},a,b\text{ 为非零实数}\right\}$.

［解析］ (1)因为不大于10是小于或等于10；非负是大于或等于0的意思，所以不大于10的非负偶数集是 $\{0,2,4,6,8,10\}$.

(2)在自然数中，除1外只能被1和本身整除的数叫质数，1既不是质数也不是合数，2是质数，所以答案为 $\{2,3,5,7\}$.

(3)关键是根据绝对值的意义化简 $x=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}$，当 $a>0,b>0$ 时，$x=2$；当 $a<0,b<0$ 时，$x=-2$；当 a,b 异号时，$x=0$，故用列举法表示为 $\{-2,0,2\}$.

［点评］ 列举法的优点是元素清晰可见，一目了然；缺点在于不易看出元素所具有的属性．

◈［考题8］ 集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|x=a+b\sqrt{2},a\in\mathbf{Z},b\in\mathbf{Z}\}$，判断下列元素 x 与集合 A 间的关系：

(1) $x=0$；(2) $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$；(3) $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$；(4) $x=x_1+x_2$（其中 $x_1\in A,x_2\in A$）；(5) $x=x_1x_2$（其中 $x_1\in A,x_2\in A$）.

［解析］ 先把 x 写成 $a+b\sqrt{2}$ 的形式，再观察 a,b 是否为整数，便可判定 x 是否为 A 中的元素．

(1)中，$\because x=0+0\times\sqrt{2}$，$\therefore x\in A$.

(2)中，$\because x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1=1+1\times\sqrt{2}$，$\therefore x\in A$.

(3)中，$\because x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，则 $\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$，$\therefore x\notin A$.

(4)中，$\because x_1\in A,x_2\in A$，可设 $x_1=a_1+b_1\sqrt{2},x_2=a_2+b_2\sqrt{2}$（$a_1,b_1,a_2,b_2$ 均为整数），则 $x=x_1+x_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}$，而 $a_1+a_2\in\mathbf{Z},b_1+b_2\in\mathbf{Z}$，$\therefore x\in A$.

形式?(2)元素具有怎样的属性?当题目中用了其他字母来描述元素所具有的属性时,要去伪存真,而不能被表面的字母形式所迷惑.

用描述法表示集合时,若需要多层次描述属性时,可选用逻辑联结词"且"与"或"等联结;若描述部分出现元素记号以外的字母时,要对新字母说明其含义或指出其取值范围.

例如:用描述法表示下列集合:

$\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7}\right\}$.

解:集合$\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7}\right\}$可以写成$\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\frac{5}{7}\right\}$,因而用描述法表示为$\left\{x\left|x=\frac{n}{n+2},n\in\mathbf{N}^*\text{且}n<6\right.\right\}$.

思考:用描述法表示集合的优、缺点在哪里?

描述法突出了元素所具有的属性,其中文字描述法通俗易懂;而符号描述法则简洁概括,但有点抽象,不易看出集合中到底有哪些元素.

解决用符号描述法表示的集合的问题时,首先要弄清元素所具有的形式;其次透过符号的表象,弄清元素到底具有怎样的属性.这就需要仔细审题,透彻地理解题意,有时还需要借助特殊值的探讨方能顺利地解决问题.

例:已知$A=\{x|x=5n+1,n\in\mathbf{N}\}$,$B=\{x|x=5n+2,n\in\mathbf{N}\}$,$C=\{x|x=5n+3,n\in\mathbf{N}\}$,$D=\{x|x=5n+4,n\in\mathbf{N}\}$,若$\alpha\in A,\beta\in B,\theta\in C,\gamma\in D$,则

A. $\alpha^2\in A,\beta^2\in D,\theta^2\in D,\gamma^2\in A$

B. $\alpha^2\in A,\beta^2\in B,\theta^2\in C,\gamma^2\in D$

C. $\alpha^2\in A,\beta^2\in C,\theta^2\in B,\gamma^2\in A$

D. $\alpha^2\in B,\beta^2\in D,\theta^2\in D,\gamma^2\in B$

解析:$\because\alpha\in A$,$\therefore$存在$n_1\in\mathbf{N}$,使$a=5n_1+1$,$\therefore a^2=(5n_1+1)^2=25n_1^2+10n_1+1=5(5n^2+2n)+1$,$\therefore a^2\in A$.同理$\beta^2\in D,\theta^2\in D,\gamma^2\in A$.故选A.

7. 图示法

图示法就是用一条封闭的曲线围成一个区域来表示一个集合.如集合$A=\{2$的倍数$\}$和$B=\{3$的倍数$\}$可表示为图1-1-1.

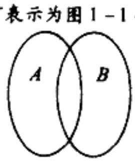


图1-1-1

8. 集合表示的常见错误

使用列举法和描述法表示集合最容易出现下述两类错误:

一是没有弄清集合的元素所具有的形式,就胡乱表示.

例:用列举法写出由$1,2,x^2-9=0$组成的集合.

(5)同(4)所设,则$x=x_1x_2=(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}$,而$a_1a_2+2b_1b_2\in\mathbf{Z},a_1b_2+a_1b_2\in\mathbf{Z}$,$\therefore x\in A$.

[答案] (1)$x\in A$;(2)$x\in A$;(3)$x\notin A$;(4)$x\in A$;(5)$x\in A$.

[点评] 在这里元素x所具有的属性是:它能表示两个$\sqrt{2}$与一个整数之积加上另一个整数.判断一个元素是否属于A,也就只要看它是否能写成这种形式即可.

◈ **[考题9]** 由下列各组对象所组成的集合是有限集,还是无限集?并用适当的方法表示出来:

(1)直角坐标平面上在第二象限内的点;

(2)方程$x^4+x^3+x^2+2=0$的实数根;

(3)6的约数;

(4)图1-1-2中阴影部分的点;

(5)既是2的倍数又能被3除余2的整数.

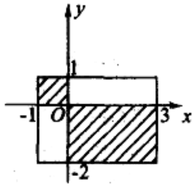


图1-1-2

[解析] 要弄清集合是有限集还是无限集,首先必须弄清集合是由哪些元素所组成的.何谓适当方法?一般来说,较简单、较和谐的表法方法就是适当方法.在(1)中,由于第二象限内的点有无数个,用列举法是无法办到的,因而宜用描述法,而文字描述法不能很好地显示元素所具有的属性,因而宜用符号描述法.在(2)中,由于$x^4+x^3+x^2+2=(x^2-x+1)(x^2+2x+2)=0$,所以方程$x^4+x^3+x^2+2=0$无实数根.在(3)中,6的约数有$\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$,宜用列举法表示.而(4)则宜用符号描述法来表示.在(5)中2的倍数中,除以3余2的整数是$2,8,14,\cdots$等,还有负整数$-4,-10,\cdots$等,因而宜用描述法来表示.

[答案] (1)是无限集合,可表示为$\{(x,y)|x<0\text{且}y>0\}$;

(2)是空集,可表示为$\varnothing$;

(3)是有限集,可表示为$\{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$;

(4)是无限集,可表示为$\{(x,y)|-1\leqslant x\leqslant3,-2\leqslant y\leqslant1,\text{且}xy\leqslant0\}$;

(5)是无限集,可表示为$\{x|x=6n-4,n\in\mathbf{Z}\}$.

◈ **[考题10]** 用图示法表示下列集合以及它们之间的关系:

$A=\{$四边形$\}$,$B=\{$平行四边形$\}$,$C=\{$梯形$\}$,$D=\{$菱形$\}$,$E=\{$正方形$\}$,$F=\{$矩形$\}$.

[解析] 用图示法表示,如图1-1-3所示.

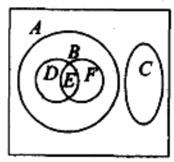


图1-1-3

[点评] 用图示法表示集合的优点在于形象直观,它特别适用于解决与抽象的集合(即集合由哪些元素所组成、元素具有怎样的属性不明确)有关的问题.缺点在于集合的元素具有怎样的属性不明显.

◈ **[考题11]** 方程组$\begin{cases}x+y=1,\\x-y=-1\end{cases}$的解集是______.

[错解] 解法一:解方程组$\begin{cases}x+y=1,\\x-y=1,\end{cases}$得$\begin{cases}x=0,\\y=1.\end{cases}$

故填$\{x=0,y=1\}$.

解法二:填$\{0,1\}$.

解法三:填$\{(x,y)|x=0\text{或}y=1\}$.

[解析] 由于这里的方程组是二元方程组,它的解是一组解$\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$而不是一个数,联想平面直角坐标系点的表示,因此可用有序实数

错解：$\{1,2,3,-3\}$.

解析：这里错在把$x^2-9=0$中的"x"可取的值当作是元素，事实上一个集合中的所有元素并不是都是要具有同一形式，它可以有的是数，有的是方程，有的是式，等等，因此方程$x^2-9=0$是这里的集合中的一个元素．

二是没有准确把握符号描述法中的符号所描述的具体属性．

9. 元素分析法

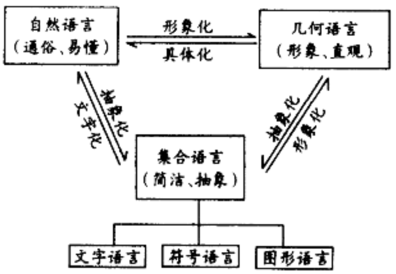
元素分析法就是抓住元素进行分析，也就是元素形式(即代表元)如何？元素应具有哪些属性？元素是否满足"三性"(确定、互异、无序)？

运用元素分析法解题，能准确理解和把握集合的内涵，能有意识地引导我们分析集合是由哪些元素所组成的，而且还能有效地避免解题的错误发生．

3 集合·创新拓展

10. 集合语言

集合语言是现代数学的基本语言，也就是用集合的有关概念和符号来叙述问题的语言．集合语言与其他语言的关系以及它的构成如下：



集合语言的不同形态各有自己的特点，符号语言比较简洁、严谨，可大大缩短语言表达的"长度"，有利于推理、计算；图象语言易引起清晰的视觉形象，它能直观地表达概念、定理的本质以及相互间的关系，在抽象的数学思维面前起着具体化和帮助理解的作用；普通语言比较自然、生动，它能将问题所研究的对象的含义更加明白地叙述出来，教科书上的概念、定理等多以普通语言叙述．在数学解题中，如果数学问题的抽象的字母和符号语言出现，解题能力强的人在审题时往往会先画出草图或把问题变为普通语言．如果问题是以普通语言形式表达的，如应用题，为了便于计算和进行推理，则往往需要引进字母变量建立数学模型．尤其是几何问题，离开符号语言将寸步难行．这些都说明解题时各种语言间的互译是必要的，它可达到简缩思维过程的目的，摆脱思维受阻的困境，有时还能产生妙解．

对来表示它，所以它的元素可写成$(0,1)$．而解法一中，方程$x=0$和方程$y=1$分别是集$\{x=0,y=1\}$中的元素，因此它不是原方程组的解集．解法二中集合$\{0,1\}$的元素是数，也不是原方程组的解集．解法三中，由于"$x=0$或$y=1$"中"$x=0$"与"$y=1$"不一定要同时成立，因而它有无穷个元素，如$(0,1),(0,0),(0,3),\cdots$等都是它的元素，也不是原方程组的解集．

[正解]　填$\{(0,1)\}$ $\left(\text{或}\{(x,y)\mid x=0\text{且}y=1\},\text{或}\left\{(x,y)\mid\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\right\}\right)$.

◇ **[考题12]**　集合$A=\{x\mid y=\sqrt{x^2-1},x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=\sqrt{x^2-1},x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，集合$A$与$B$是否是同一集合？

[解析]　由于集合A的元素形式是x，而它满足的属性是：$x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}$，且$y=\sqrt{x^2-1}$，$\therefore x^2-1\geqslant0$，即$x\geqslant1$或$x\leqslant-1$．$\therefore A=\{x\mid x\geqslant1$或$x\leqslant-1\}$．而集合$B$的元素形式是$y$，具有属性仍为：$x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R},y=\sqrt{x^2-1}$，由此得$y\geqslant0$，$\therefore B=\{y\mid y\geqslant0\}$．故$A$与$B$不为同一集合．

◇ **[考题13]**　下列命题：

(1)方程$\sqrt{x-2}+|y+2|=0$的解集为$\{2,-2\}$；

(2)集合$\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$与$\{y\mid y=x-1,x\in\mathbf{R}\}$的公共元素所组成的集合是$\{0,1\}$；

(3)集合$\{x\mid x-1<0\}$与集合$\{x\mid x>a,a\in\mathbf{R}\}$没有公共元素.

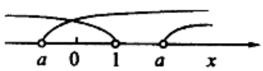
其中真命题的个数有(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

[解析]　要判断这些命题的真假，这就需要对用来描述的这些命题的集合语言进行转化，以弄清集合的构成．

在(1)中方程$\sqrt{x-2}+|y+2|=0$等价于$\begin{cases}x-2=0,\\y+2=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x=2,\\y=-2.\end{cases}$其解应为有序实数对，因此其解集应为$\{(2,-2)\}$，故命题(1)是假命题．

而在(2)中，由于集合$\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$的代表元素是$y$，而$y$满足属性："$y=x^2-1,x\in\mathbf{R}$"．由于当$x\in\mathbf{R}$时，$y=x^2-1\geqslant-1$，所以集合$\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$是由大于或等于$-1$的实数所组成的集合．同理$\{y\mid y=x-1,x\in\mathbf{R}\}$是$\mathbf{R}$，因此(2)也是错误的．



1－1－4

在(3)中，集合$\{x\mid x-1<0\}$即为不等式$x-1<0$，即$x<1$的解集，而$\{x\mid x>a,a\in\mathbf{R}\}$即为不等式$x>a$的解集．由图1－1－4可知，这两个集合可能有公共的元素，也可能没有公共的元素，因此(3)也是错误的．

[答案]　A

[点评]　在(2)中，很容易被符号描述法的表象所蒙蔽，认为这两个集合中的"x"和"y"必须取相同的值．事实上，这是用相同字母来描述不同的集合的元素所具有的属性，因此象这类问题我们必须将它转化为不用字母描述的集合，进而弄清集合到底由哪些元素所组成．

◇ **[考题14]**　由正整数组成的集合A满足：①若$x\in A$，则$6-x\in A$；②A中有三个元素．试用列举法表示集合A.

[解析]　由题意，若$1\in A$，则$6-1=5\in A$；反过来，若$5\in A$，则$6-5=1\in A$．因此1和5要么同在A中，要么同不在A中．同理2和4也是成对地出现在A中．而$6-3=3$，$\therefore 3$是单个地出现在A中．

故$A=\{1,5,3\}$或$A=\{2,4,3\}$.

11. 解集合问题的关键

解决集合问题的关键：弄清集合由哪些元素所构成的. 如何弄清呢？关键在于把抽象问题具体化、形象化. 也就是把用描述法表示的集合用列举法来表示，或用图示法来表示抽象的集合，或用图形来表示集合. 例如在考题8中，用数轴来表示这些集合；再如，当集合的元素为有序实数对时，可用平面直角坐标系中的图形表示相关的集合等.

例如，在判断集合 $A=\{x|x=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$ 与集合 $B=\{y|y=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}$ 是否为同一集合时，若从代表元素入手来分析它们之间的关系，则比较抽象，而用列举法来表示两个集合，则它们之间的关系就一目了然. 即 $A=\{\cdots,-1,1,3,5,\cdots\}$，而 $B=\{\cdots,-1,1,3,5,\cdots\}$

$\therefore A$ 与 B 是同一集合.

◈ [考题15] 设集合 $A=\{a|a=n^2+1,n\in\mathbf{N}^*\}$，集合 $B=\{b|b=k^2-4k+5,k\in\mathbf{N}^*\}$，若 $a\in A$，试判断 a 与集合 B 的关系.

[解析] 解法一：$\because a\in A$，

$\therefore a=n^2+1=(n^2+4n+4)-4(n+2)+5$

$=(n+2)^2-4(n+2)+5.$

$\because n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore n+2\in\mathbf{N}^*$，$\therefore a\in B.$

解法二：$\because A=\{2,5,10,17,\cdots\}$，

$B=\{2,1,5,10,17,\cdots\}$

$\therefore$ 若 $a\in A$，则 $a\in B$.

[点评] 解法一：是从一般角度入手，即要证明一个元素是否属于某个集合，则只需看这个元素是否具备该集合的元素所具有的属性；而解法二则把问题具体化了，因而答案一目了然.

能力题型设计

协议考场

[预测1] 下列表示同一集合的是(　　). 测试要点3、6、9

A. $M=\{(2,1),(3,2)\}$，$N=\{(1,2),(2,3)\}$

B. $M=\{2,1\}$，$N=\{1,2\}$

C. $M=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{N}\}$

D. $M=\{(x,y)|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{N}\}$

[预测2] 集合 $A=\left\{x\,\middle|\,y=\dfrac{12}{x+3},x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\right\}$ 的元素个数为(　　). 测试要点9、11

A. 4　　B. 5　　C. 10　　D. 12

[预测3] 下列各条件中，不能确定一个集合的是(　　). 测试要点1

A. 充分接近 $\sqrt{7}$ 的所有实数的全体

B. 某校身高不超过1.7米的所有学生

C. 小于100的所有偶数

D. 数轴上到原点的距离不超过一个单位的点的全体

[预测4] 设有下列四个关系式：$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$，$0.3\in\mathbf{Q}$，$0\in\mathbf{N}$，$0\in\{0\}$，其中正确的个数是(　　). 测试要点1、2

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

[预测5] 设 a,b,c 为非零实数，则 $M=\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{c}{|c|}+\dfrac{abc}{|abc|}$ 的所有值组成的集合为(　　). 测试要点9

A. $\{4\}$　　B. $\{0\}$　　C. $\{-4\}$　　D. $\{4,0,-4\}$

[预测6] 由实数 $x,-x,\sqrt{x^2},-\sqrt[3]{x^3},\sqrt[3]{x^3},|x|$ 所组成的集合用列举法表示为__________. 测试要点5

[预测7] 被5除余2的正整数集合为______. 测试要点6

[预测8] 用图示法表示下列集合：$A=\{$三角形$\}$，$B=\{$等腰三角形$\}$，$C=\{$锐角三角形$\}$，$D=\{$钝角三角形$\}$，$E=\{$直角三角形$\}$，$F=\{$等边三角形$\}$，$G=\{$等腰直角三角形$\}$. 测试要点7

[预测9] 已知集合 $A=\{x|ax^2-3x-4=0,x\in\mathbf{R}\}$， 测试要点4、6

(1) 若 A 中有两个元素，求实数 a 的取值范围；

(2) 若 A 中至多有一个元素，求实数 a 的取值范围.

[预测10] 已知实数集 A 满足条件：若 $a\in A$，则有 $\dfrac{1+a}{1-a}\in A$ $(a\neq0$，且 $a\neq\pm1)$，则集合 A 中至少有几个元素？并证明你的结论. 测试要点10

[预测11] 当正整数的集合 A 满足："若 $x\in A$，则 $10-x\in A$"时，则 测试要点11

(1) 试写出只有一个元素的集合 A；

(2) 试写出只有两个元素的集合 A；

(3) 这样的集合 A 至多有多少个元素？

[预测12] 一个小镇上只有一名理发师，他设定一个不成立的规矩，规定自己只给那些不给自己理发的人剃头. 试问理发师的规定能否形成一个集合？ 测试要点3

教材课后习题解答

1.1 集合　练习(第5页)

1. (1)$\{4,6,8,10\}$;(2)$\{1,-1\}$;(3)$\{1,3,5,15\}$.

提示:根据描述的元素的性质列举集合的元素,元素的"共性"很重要.

2. $1\in\mathbf{N},0\in\mathbf{N},-3\notin\mathbf{N},0.5\notin\mathbf{N},\sqrt{2}\notin\mathbf{N},1\in\mathbf{Z},0\in\mathbf{Z},-3\in\mathbf{Z},0.5\notin\mathbf{Z},\sqrt{2}\notin\mathbf{Z},1\in\mathbf{Q},0\in\mathbf{Q},-3\in\mathbf{Q},0.5\in\mathbf{Q},\sqrt{2}\notin\mathbf{Q},1\in\mathbf{R},0\in\mathbf{R},-3\in\mathbf{R},0.5\in\mathbf{R},\sqrt{2}\in\mathbf{R}$

提示:元素和集合的从属关系是集合的基本概念,这里着重要注意元素0,高中以前学生接触的定义0可能定为非自然数,但现在0是作为自然数的."N"、"Z"、"Q"、"R"是最常用的四个数集.

练习(第6页)

1. (1)$\{$大于10的自然数$\}$或$\{x|x>10,x\in\mathbf{N}\}$;(2)$\{1,2,3,6\}$或$\{$24与30的公约数$\}$;(3)$\{-2,2\}$或$\{x|x^2-4=0\}$;(4)$\{2,3,5,7\}$.

提示:(1)为无限集,(2)(3)(4)为有限集.集合的列举法与描述法是表示集合最常用的两种方法.注意1不是质数也不是合数.

2. (1)$\{x|x=12k,k\in\mathbf{Z}\}$或$\{$4与6的公倍数$\}$;(2)$\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$或$\{$偶数$\}$;(3)$\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$;(4)$\left\{x\left|x<\frac{11}{4}\right.\right\}$.

(1)(2)(4)为无限集,(3)为有限集.

提示:描述法表示集合的形成在大括号内,先写元素的一般形式,如数用x,占用(x,y),再"|"(有时用":"),后写元素满足的共性,一般用式子或方程形式表示.当元素的共性用文字描述时"|"前面部分省去不写.

练习(第7页)

1. (1)$-1\notin A$,(2)$3\notin B$,(3)$8\in C$,(4)$1.5\notin D$;

2. (1)$\{$红,黄$\}$,有限集;(2)$\{$珠穆朗玛峰$\}$,有限集;(3)$\{1,2,3,12,13,21,23,31,32,123,132,213,231,312,321\}$,有限集;(4)$\{P|PO=l,P、O$是定点,$l$是定长$\}$,无限集.

提示:这里(4)用的是描述法,(1)(2)(3)用的是列举法,列举时可遵循一定的规则:如按一位数、两位数、三位数且从小到大的顺序,也可按1开头,2开头,3开头的顺序.

3. (1)$\{$5的正约数$\}$或$\{x|(x-1)(x-5)=0\}$;(2)$\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$;(3)$\{$大于1且小于9的偶数$\}$或$\{x|x=2n,n\in\mathbf{N}^*$且$1\leqslant n\leqslant4\}$;(4)$\{4,5,6\}$.

提示:描述法表示集合时要注意:①表示元素的一般形式通常不能省,如$\{x\in\mathbf{R}|x^2-2=0\}$不能写为$\{x^2-2=0\}$;②集合中涉及到的参数都要作说明,如$\{x|x=2k\}$里的$k$就应作说明.

最新5年高考名题诠解

1. **(1999年全国高考题)**某电脑用户计划使用不超过500元的资金购买单价分别为60元、70元的单片软件和盒装磁盘.根据需要,软件至少买3片,磁盘至少买2盒,则不同的选购方式共有(　　).

A. 5种　　B. 6种　　C. 7种　　D. 8种

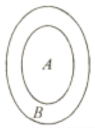
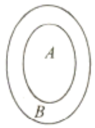
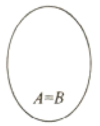
[解析]　视符合题意的不同的购买方式为一个集合,这个集合用列举法表示为$\{$3片软件2盒磁盘,3片软件3盒磁盘,3片软件4盒磁盘,4片软件2盒磁盘,5片软件2盒磁盘,6片软件2盒磁盘,4片软件3盒磁盘$\}$.

故共有7种不同的选购方式.

第二节　子集、全集、补集

1 重难点聚集

1. 集合间的关系

	子集	真子集	相等
记号	$\subseteq$	$\subsetneqq$	$=$
文字语言	若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集	若集合 A 是集合 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不在 A 中，则称 A 是 B 的真子集	若集合 A 是集合 B 的子集，且 B 也是 A 的子集，则称 A 与 B 相等
符号语言	若 $x\in A\Rightarrow x\in B$，则 $A\subseteq B$.	若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则 $A\subsetneqq B$.	若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.
图形语言			

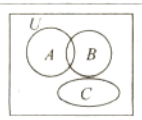
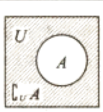
性质：①$\varnothing\subseteq A$；②$A\subseteq A$；③若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

判断两个集合之间的关系（特别是用符号描述法表示的集合）时，不能被其表象所蒙蔽，而应透过现象看本质，也就是它们到底是由哪些元素所组成．例如：

若集合 $A=\{y\mid y=x,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=\sqrt{2}x,x\in\mathbf{R}\}$．试判断集合 A 与 B 的关系．

解析：有的同学认为对于 x 所取的某个值，得到的集合 A 与 B 的元素是不同的，则据此判断 A 与 B 是不等的，这种观点对吗？他的这一判断是错误的．固然对于 $x=1$ 时，集合 A 中得到元素 1，而 B 中得到元素 $\sqrt{2}$，但是 A 中也有元素 $\sqrt{2}$，且 B 中也有元素 $1\left(x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，事实上，集合 A 中存在的任一元素，在集合 B 中也同样有，并且集合 B 的任一元素，在集合 A 中同样存在，它们都表示实数集 $\mathbf{R}$，故 $A=B$.

2. 全集与补集

	全集	补集
符号	U	$\complement_U$
文字语言	如果集合 U 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，则称 U 为全集	若集合 A 是全集 U 的一个子集，则称 U 中所有的不属于 A 的元素所组成的集合为 A 的补集
符号语言	若 $A\subseteq U,B\subseteq U,C\subseteq U,\cdots$，则 U 为全集.	$\complement_U A=\{x\mid x\in U$，且 $x\notin A\}$
图形语言		

名师诠释

◇［考题 1］　写出集合 $\{a,b,c\}$ 的所有子集.

［解析］　按子集的元素个数的多少分别写出所有子集，这样才能达到不重复、无遗漏，同时还要注意两个特殊子集：$\varnothing$ 和本身.

故其子集有：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$，$\{a,b,c\}$.

［探究］　由四个元素组成的集合 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 有多少个子集？5 个呢？n 个元素呢？（2 个元素组成的集合有 4 个子集；3 个元素组成的集合有 8 个子集；4 个元素组成的集合有 16 个子集；5 个元素组成的集合有 $32=2^5$ 个子集．归纳到一般，n 个元素组成的集合有 2^n 个子集.）

◇［考题 2］　设集合 $A=\{1,2\}$，集合 $B=\{x\mid x\subseteq A\}$，用列举法写出 B，并指出集合 A 与集合 B 的关系.

［解析］　集合 B 的元素是集合 A 的子集，问题归结为写出集合 A 的所有子集.

［解答］　$\because A$ 的子集为 $\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$，$\varnothing$，

$\therefore B=\{x\mid x\subseteq A\}=\{\{1\},\{2\},\{1,2\},\varnothing\}$.

$\therefore$ 集合 A 是集合 B 的一个元素，$\therefore A$ 与 B 的关系是 $A\in B$.

［点评］　以集合为元素组成新的集合，说明了集合的元素呈多样性．你能在身边找到这样的实例来解释这一点吗？（例如班上的学生组成一个班，再以班为元素组成一个“年级”）

◇［考题 3］　集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l$，其中 $m,n,l\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{u\mid u=20p+16g+12r$，其中 $p,g,r\in\mathbf{Z}\}$ 的关系为（　　）.

A. $M=N$　　B. $M\not\subseteq N,N\not\subseteq M$　　C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\supsetneqq N$

［解析］　对 N 中任一元素 u 有，$u=20p+16g+12r=12r+8(2g)+4(5p)\in M$，从而 $N\subseteq M$，另一方面，对 M 中任一元素 $u=12m+8n+4l=20n+16l+12(m-n-l)\in N$ 从而 $M\subseteq N$，故 $M=N$，选 A.

◇［考题 4］　设集合 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^2-a+1\}$，且 $B\subsetneqq A$，求 a 的值.

［解析］　由于 $B\subsetneqq A$，$\therefore B$ 中的元素 $a^2-a+1\in A$，即 a^2-a+1 为 A 中的某一个元素．由互异性可知 $a^2-a+1\neq1$．因此 $a^2-a+1=3$ 或 $a^2-a+1=a$.

［解答］　因 $B\subsetneqq A$，故可分两种情况.

（1）当 $a^2-a+1=3$ 时，解得 $a=-1$ 或 $a=2$，经检验满足题设条件.

（2）当 $a^2-a+1=a$ 时，解得 $a=1$，此时集合 A 中元素重复，故 $a=1$ 不合题意.

综上所述，$a=-1$ 或 $a=2$.

◇［考题 5］　已知全集 $U=\{a,1,3,b,x^2-2=0\}$，集合 $A=\{a,1\}$，则 $\complement_U A=$________.

［解析］　在全集 U 中除去 A 中的元素后所组成的集合即为 $\complement_U A$，故 $\complement_U A=\{b,3,x^2-2=0\}$.

［探究］　在这里由 $x^2-2=0$，得 $x=\pm\sqrt{2}$，$\therefore\complement_U A=\{1,3,\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$．对吗？为什么？（不对，这是因为组成集合的对象可以是数，也可以是字母和方程，而且这些不同类型的对象可以同时出现在同一个集合中．因此方程 $x^2-2=0$ 只能是全集中的一个元素，而不是数“x”.）

◇［考题 6］　已知全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，求实数 a 的值.

［解析］　$\complement_U A=\{5\}$ 表明了什么意思？它有两层含义，即 $5\in U$ 且 $5\notin A$.

［解答］　$\because\complement_U A=\{5\}$，$\therefore 5\in U$ 且 $5\notin A$.

$\therefore a^2+2a-3=5$，即 $a=2$ 或 $a=-4$.

说明:(1)全集是相对于研究的问题而言,如我们只在整数范围内研究问题,则 $\mathbf{Z}$ 为全集;而当问题扩展到实数集时,则 $\mathbf{R}$ 为全集,这时 $\mathbf{Z}$ 就不是全集.

(2)$\complement_U A$ 表示 U 为全集时 A 的补集,如果全集换成其他集合(如 $\mathbf{R}$)时,则记号中"U"也必须换成相应的集合(即 $\complement_{\mathbf{R}} A$).

(3)求集合 A 的补集的前提是 A 是全集 U 的子集.

(4)性质:$\complement_U \varnothing = U$;$\complement_U U = \varnothing$;$\complement_U(\complement_U A) = A$.

注意:在解题时,我们要注意利用全集与其补集之间是包含关系来解决问题.

例:已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$,$A=\{x|x^2-5x+q=0\}$,求 $\complement_U A$.

解:设 x_1,x_2 为方程 $x^2-5x+q=0$ 的两根,则 $x_1+x_2=5$,$\therefore x_1\neq x_2$(否则 $x_1=x_2=\frac{5}{2}\notin U$,这与 $A\subseteq U$ 矛盾).而由 $A\subseteq U$ 知 $x_1,x_2\in U$,或 $A=\varnothing$. 又 $1+4=2+3=5$,$\therefore q=4$ 或 $q=6$. $\therefore$ $\complement_U A=\{2,3,5\}$ 或 $\complement_U A=\{1,4,5\}$ 或 $\complement_U A=U$.

2 方法·技巧平台

3. 集合符号的区分

区分易混淆的符号,是突破符号障碍的关键:

(1)$\in$ 与 $\subseteq$ 的区别:前者表示元素与集合之间的关系,如 $0\in\mathbf{N}$,而后者则表示集合与集合之间的关系,如 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$.

(2)a 与 $\{a\}$ 的区别:a 表示一个元素,而 $\{a\}$ 表示只有一个元素的集合.

(3)$\{0\}$ 与 $\varnothing$ 的区别:$\{0\}$ 是含有一个元素的集合,$\varnothing$ 是不含任何元素的集合.

4. 子集的理解

正确理解子集、真子集的概念是解决与子集有关问题的关键.要注意:

(1)空集是任何集合的子集.

(2)空集是任何非空集合的真子集.

(3)任何集合是它本身的子集.

(4)子集、真子集都具有传递性.

解决与子集有关问题时,一定要注意提防空集和本身两个"陷阱".

例:设集合 $A=\{x|x^2+4x=0\}$,$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,a\in\mathbf{R}\}$,若 $B\subseteq A$,求实数 a 的值.

解:由 $B\subseteq A$ 知,$B=\varnothing$ 或 $B\subsetneqq A$ 或 $B=A$.

①当 $B=\varnothing$ 时,则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$,$\therefore a<-1$.

②当 $B\subsetneqq A$ 时,则 $B=\{0\}$ 或 $B=\{4\}$.

由 $\Delta=0$,解得 $a=1$,此时 $B=\{0\}$ 适合.

③当 $B=A$ 时,则 $B=\{0,4\}$,$\therefore -2(a+1)=4$ 且 $a^2-1=0$,解得 $a=-1$.

综上所述所求实数 a 的值为 $a\leqslant-1$ 或 $a=1$.

在解决与子集有关问题时,要注意集合的元素是否满足三性(确定、互异、无序).

当 $a=2$ 时,$|2a-1|=3\neq5$;当 $a=-4$ 时,$|2a-1|=9$,但 $9\notin U$. 故所求的值为 $a=2$.

[探究]　如果将集合 A 换成"$A=\{m,n\}$",能否求出实数 a,m,n?(可以,如 $m=2,n=3,a=2$ 等共有六组这样的 a、m、n.)

◈[考题7]　已知某校高一年级有10个班,集合 $A=\{$某校高一(1)的学生$\}$,$B=\{$某校高一(1)班的男生$\}$,$D=\{$某校高一年级(1)~(10)班$\}$.

(1)若 A 为全集,求 $\complement_A B$.

(2)若 D 为全集,能否求出 $\complement_D B$? 为什么?

[解析]　(1)$\complement_A B=\{$某校高一(1)班的女生$\}$.

(2)不能求出 $\complement_D B$,因为 D 的元素是某校高一年级各班,而 B 的元素是学生,$\therefore B$ 不是 D 的子集,故无法求出 $\complement_D B$.

[思考]　你还能在身边找到这样类似的实例来说明子集的关系以及补集的运算?

◈[考题8]　以下各组是什么关系,用适当的符号表示出来.

(1)0与$\{0\}$;(2)0与$\varnothing$;(3)$\varnothing$与$\{0\}$;(4)$\{0,1\}$与$\{(0,1)\}$;(5)$\{(b,a)\}$与$\{(a,b)\}$.

[解析]　首先要分清是"元素与集合"的关系,还是"集合与集合"的关系.如果是集合与集合间的关系时,还要分清是子集,还是真子集.

故有:(1)$0\in\{0\}$;(2)$0\notin\varnothing$;(3)$\varnothing\subsetneqq\{0\}$;(4)$\{0,1\}\neq\{(0,1)\}$;(5)当 $a=b$ 时,$\{(a,b)\}=\{(b,a)\}$;当 $a\neq b$ 时,$\{(a,b)\}\neq\{(b,a)\}$.

[探究]　集合的符号语言好处在哪里? 使用它时其障碍在哪里?(集合的符号语言十分简洁,因而被广泛用于现代数学之中.其障碍在于这些符号与具体意义之间没有直接联系,突破方法是熟练地掌握这些符号的具体含义.)

◈[考题9]　若集合 $A=\{x|x^2+x-6=0\}$,$B=\{x|mx+1=0\}$,$B\subsetneqq A$,求 m 的值.

[解析]　要解答本题,首先要搞清楚集合 A 的元素是什么,然后根据 $B\subsetneqq A$,求 m 的值.

[解答]　$A=\{x|x^2+x-6=0\}=\{-3,2\}$,

$\because B\subsetneqq A$,$\therefore mx+1=0$ 的解为 -3 或 2 或无解.

当 $mx+1=0$ 的解为 -3 时,由 $m\cdot(-3)+1=0$,得 $m=\frac{1}{3}$;

当 $mx+1=0$ 的解为 2 时,由 $m\cdot2+1=0$,得 $m=-\frac{1}{2}$;

当 $mx+1=0$ 无解时,$m=0$.

综上所述,$m=\frac{1}{3}$ 或 $m=-\frac{1}{2}$ 或 $m=0$.

[点评]　在这里易出现未考虑"$B=\varnothing$,即方程 $mx+1=0$ 无解"这一情形的错误.

◈[考题10]　设集合 $A=\{1,a,b\}$,$B=\{a,a^2,ab\}$,且 $A=B$,求实数 a,b 的值.

[解析]　可根据集合中元素的性质(确定性、互异性、无序性),欲求出 a,b,只需列出关于 a,b 的两个方程.

由 $A=B$,因为 A、B 中均有元素 a,故只需 A、B 构成集合中的其余元素完全相同,即 $\{1,b\}=\{a^2,ab\}$,所以 $\begin{cases}1\cdot b=a^2\cdot ab,\\1+b=a^2+ab.\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=1,\\b=0,\end{cases}\begin{cases}a=-1,\\b=0,\end{cases}\begin{cases}a=1,\\b\in\mathbf{R},\end{cases}$ 代入 A、B 集合中只有 $a=-1,b=0$ 满足. $\therefore a=-1$ 且 $b=0$.

[探究]　本题解答中,以 A 与 B 的元素之和与之积分别相等建立方程组的依据在哪里?(由于 $\{1,b\}=\{a^2,ab\}$,因而这两个集合的元素完全相同,所以这两个集合的元素的和与积分别相等.)

◈[考题11]　已知集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant a,a>-1$ 且 $a\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y|y=2x-1,x\in A\}$,$C=\{z|z=x^2,x\in A\}$. 是否存在实数 a 的值,使 $C\subseteq B$? 若存在,求出 a 的取值范围;若不存在,则说明理由.

例：已知集合 $M=\{x,xy,\sqrt{x-y}\}$ 与集合 $N=\{0,|x|,y\}$ 相等，求 x,y 的值．

解：(1) 若 $x=0$，则 $M=\{0,0,\sqrt{x-y}\}$ 与元素的互异性矛盾，所以 $x\neq0$．

(2) 若 $xy=0$，因为 $x\neq0$，所以 $y=0$，这时 $N=\{0,|x|,0\}$．与元素的互异性矛盾，所以 $y\neq0$．

(3) 若 $\sqrt{x-y}=0$，则 $x=y$，这时 $M=\{x,x^2,0\}$，$N=\{0,|x|,x\}$，所以 $x^2=|x|$，解得 $x=\pm1$．

若 $x=1$，$M=\{1,1,0\}$，与元素互异性矛盾，所以 $x=y=-1$，这时 M 与 N 均为 $\{1,-1,0\}$．

故当 $x=y=-1$ 时，$M=N$．

5. 子集的个数

(1) 由特例归纳可知 n 个元素组成的集合的子集有 2^n 个；

(2) 解决求某些有特殊限制条件的子集的个数问题的关键是建立恰当的集合模型．

例：已知 $\{1,2\}\subseteq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，则这样的集合 M 有__________个．

解：显然集合 M 始终包含 1，2 这两个元素，因此 M 的个数等于集合 $\{3,4,5\}$ 的子集的个数，即 $2^3=8$ 个．

3 整合·创新拓展

6. 具体化与形象化

判断集合间的关系以及求补集运算的关键是弄清集合由哪些元素所组成的，也就是把较为抽象的集合具体化（如用列举法来表示集合）、形象化（用图示法来表示，或数形结合）．

例：集合 $A=\{a|a=2k,k\in\mathbf{N}\}$，集合 $B=\{b|b=\frac{1}{8}[1-(-1)^n]\cdot(n^2-1),n\in\mathbf{N}\}$，那么 A、B 间的关系是（　　）．

A. $A\subsetneqq B$　　B. $B\subsetneqq A$

C. $A=B$　　D. 以上都不对

解：由题意可知，集合 A 是非负偶数集，即 $A=\{0,2,4,6,8,\cdots\}$．集合 B 中的元素

$$b=\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$$

$$=\begin{cases}0,(n\text{ 为非负偶数时}),\\ \frac{1}{4}(n+1)(n-1),(n\text{ 为正奇数时}).\end{cases}$$

而 $\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$（n 为正奇数时）表示 0 或正偶数，但不是表示所有的正偶数．取 $n=1,3,5,7,\cdots$．由 $\frac{1}{4}(n+1)(n-1)$ 依次得到 $0,2,6,12,\cdots$，即 $B=\{0,2,6,12,28,\cdots\}$．

综上知，$B\subsetneqq A$，应选 B.

7. 补集思想

当直接求解一个问题比较困难时，我们不妨考虑问题的反面，也就是先求它的补集，再求补集的补集．

［解析］ 假设存在这样的 a 的值．由于 $y=2x-1$ 且 $x\in A$，即 $-1\leqslant x\leqslant a$，$\therefore -3\leqslant y\leqslant 2a-1$．

而 $z=x^2$ 且 $x\in A$．$\therefore$ 当 $-1<a\leqslant0$ 时，$a^2\leqslant z\leqslant1$；当 $0<a<1$ 时，$0\leqslant z\leqslant1$；当 $a\geqslant1$ 时，$0\leqslant z\leqslant a^2$．

若 $-1<a\leqslant0$，要使 $C\subseteq B$，则 $2a-1\geqslant1$，即 $a\geqslant1$，矛盾；同理当 $0<a<1$ 时，要使 $C\subseteq B$，则 $2a-1\geqslant1$，$a\geqslant1$ 不存在 a 的值；而 $a\geqslant1$ 时，要使 $C\subseteq B$，则有 $a^2\leqslant2a-1$，即 $(a-1)^2\leqslant0$，$\therefore a=1$．

故存在 $a=1$，使得 $C\subseteq B$．

◈［考题 12］ 求集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$ 的不含元素 1 的子集的个数．

［解析］ 此问题从正面去找这个"个数"将非常复杂，我们可以先求出 A 的"子集个数" $2^5=32$，然后找到含元素 1 的子集的个数 $2^4=16$，则得不含"1"的子集个数为 $32-16=16$．

◈［考题 13］ 设集合 $A\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7\}$，且若 $a\in A$，则 $6-a\in A$，试问这样的 A 共有多少个？

［解析］ 由"若 $a\in A$，则 $8-a\in A$"可知，1 与 7、2 与 6、3 与 5、成对地出现在 A 中，各取一个数作"代表"，于是问题转化为求集合 $\{1,2,3,4\}$ 的子集的个数．故这样的集合 A 共有 $2^4=16$ 个．

◈［考题 14］ 已知全集 U，M、N 是 U 的非空子集，且 $\complement_UM\supseteq N$，则必有（　　）．

A. $M\subseteq\complement_UN$　　B. $M\subsetneqq\complement_UN$

C. $\complement_UM=\complement_UN$　　D. $M=N$

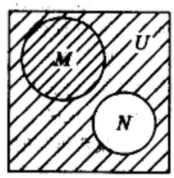


图 1-2-1

［解析］ 用图示法表示符合题意的集合 M、N，如图 1-2-1 所示．其中阴影部分为 $\complement_UN$，由图可知，必有 $M\subseteq\complement_UN$．故选 A.

［探究］ 若集合 $A\subseteq B\subseteq D\subseteq U$，则 $\complement_UA$、$\complement_UB$、$\complement_UD$ 的关系如何？（$\complement_UA\supseteq\complement_UB\supseteq\complement_UD$）．

◈［考题 15］ 已知全集 $U=\mathbf{Z}$，$A=\{x|x=4k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$．指出 A 与 $\complement_UB$，B 与 $\complement_UA$ 的关系．

［解析］ 解法一：求 $A=\{x|x=4k-1,k\in\mathbf{Z}\}$ 的补集，应从 A 的元素的特征入手，分析 A 的元素是怎样的整数，并能够找到规律，写出"通式"．

对于集合 A，元素 $x=4k-1,k\in\mathbf{Z}$，即 x 为被 4 除余 3 的整数，$x=4k_1+3,k_1\in\mathbf{Z}$

同理整数集 $\mathbf{Z}$ 中还有被 4 除余数是 0（整除），1，2 的三类整数，分别记为：　$x=4k(k\in\mathbf{Z})$，$x=4k+1(k\in\mathbf{Z})$，$x=4k+2(k\in\mathbf{Z})$．

因此，$\complement_UA=\{x|x=4k$，或 $x=4k+1$，或 $x=4k+2,k\in\mathbf{Z}\}$，

$\complement_UB=\{x|x=4k-1$，或 $x=4k$，或 $x=4k+2,k\in\mathbf{Z}\}$．

由子集的定义知，A 是 $\complement_UB$ 的真子集，B 是 $\complement_UA$ 的真子集，即 $A\subsetneqq\complement_UB$，$B\subsetneqq\complement_UA$．

解法二：$\because A=\{\cdots,-5,-1,3,7,11,\cdots\}$，$B=\{\cdots,-3,5,9,13,\cdots\}$．

$\therefore \complement_UA=\{\cdots,-4,-3,-2,0,1,2,4,5,6,8,9,10,\cdots\}=\{x|x\in\mathbf{Z}$ 且 $x\neq4k-1,k\in\mathbf{Z}\}$．

$\complement_UB=\{\cdots-4,-2,-1,0,2,3,4,6,7,8,10,11,12,\cdots\}=\{x|x\in\mathbf{Z}$，且 $x\neq4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$．

故 $B\subsetneqq A$，$A\subsetneqq B$．

［点评］ 本题解法二比解法一更直观得多，降低了思维难度．

◈［考题 16］ 若方程 $x^2+x+a=0$ 至少有一根为非负实数，求实数 a 的取值范围．

［解析］ 若方程 $x^2+x+a=0$ 无非负实根．即方程无实根或有两个负根，则有 $\Delta=1-4a<0$ 或 $\begin{cases}\Delta=1-4a\geqslant0,\\ x_1+x_2=-1<0,\\ x_1x_2=a>0,\end{cases}$

例：若三个方程 $x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$ 至少有一个方程有实数解，试求实数 a 的取值范围.

解：若三个方程都没有实数解，则有

$$\begin{cases}\Delta_1=(4a)^2-4(-4a+3)<0,\\ \Delta_2=(a-1)^2-4a^2<0,\\ \Delta_3=4a^2+8a<0,\end{cases}$$

解得 $-\frac{3}{2}<a<-1$.

而集合 $\left\{a\mid -\frac{3}{2}<a<-1\right\}$ 的补集为 $\left\{a\mid a\leqslant -\frac{3}{2}\text{或}a\geqslant -1\right\}$，

故所求的实数 a 的取值范围是 $a\leqslant -\frac{3}{2}$ 或 $a\geqslant -1$.

8. 有限数集的所有子集的元素之和

如何求有限数集的所有子集的元素之和？对于元素个数较少的数集，可以先写出所有的子集，再观察规律，进而求其和. 对元素个数较多的数集，则应从上述特例求和中归纳总结出一般规律，进而推广到一般.

9. 集合语言的应用

由于集合语言简洁，因此运用集合语言可以把本来比较含糊，较难解释的问题用比较简洁的语言清晰地表述出来. 因而我们要善于用集合的子集以及补集等语言来解决非集合的问题.

解得 $a>0$. 故所求的取值范围是 $\{a\mid a\leqslant 0\}$.

[探究] 选用补集思想来解题的原则是什么？（原则是"正难则反".）

◈**[考题17]** 已知集合 $A=\{1,3,5\}$，求集合 A 的所有子集的元素之和.

[解析] 集合 A 的子集分别是 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{3\}$，$\{5\}$，$\{1,3\}$，$\{1,5\}$，$\{3,5\}$，$\{1,3,5\}$. 注意到 A 中的每个元素 x 出现在 A 的 4 个子集，即在其和中出现 4 次. 故所求之和为 $(1+3+5)\times 4=36$.

[探究] A 中每个数出现在 A 的 4 个子集之中，这是由写出 A 的子集后，再观察得出的结果，能否不写出 A 的子集也得出这样结论呢？注意到 A 中的元素 1，出现在 A 的子集（$\{1\}$，$\{1,3\}$，$\{1,5\}$，$\{1,3,5\}$），如果把这些子集中排除这个数 1，剩下来的元素依次组成的集合（$\varnothing$，$\{3\}$，$\{5\}$，$\{3,5\}$）也就是 A 中除元素 1 组成集合（$\{3,5\}$）的子集，即有 4 个. 推广到一般，即"$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$，则 A 的所有子集的元素之和为多少？"（其和为 $(a_1+a_2+\cdots a_n)2^{n-1}$.）

◈**[考题18]** 若不等式 $|x|<1$ 成立时，不等式 $[x-(a+1)][x-(a+4)]<0$ 也成立，求实数 a 的取值范围.

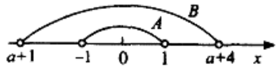


图 1-2-2

[解析] 设不等式 $|x|<1$ 的解集为 A，不等式 $[x-(a+1)][x-(a+4)]<0$ 的解集为 B. 即 $A=\{x\mid -1<x<1\}$，$B=\{x\mid a+1<x<a+4\}$.

依题意：当 $x\in A$，则 $x\in B$，即 $A\subseteq B$. 在数轴上作出包含关系图形（如图 1-2-2），由图可知，$\begin{cases}a+1\leqslant -1,\\ a+4\geqslant 1,\end{cases}$ 解得 $-3\leqslant a\leqslant -2$.

故所求的取值范围是 $-3\leqslant a\leqslant -2$.

4 能力题型设计

点击考点

[预测1] 下列六个关系式：①$\{a,b\}=\{b,a\}$；②$\{a,b\}\subsetneqq\{b,a\}$；③$\varnothing=\{\varnothing\}$；④$\{0\}=\varnothing$；⑤$\varnothing\subsetneqq\{0\}$；⑥$0\in\{0\}$，其中正确的个数是(　　).　　测试要点 3

A. 6 个　　B. 5 个　　C. 4 个　　D. 3 个及 3 个以下

[预测2] 满足 $\{a,b\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d,e\}$ 的集合 A 的个数是(　　).　　测试要点 5

A. 2 个　　B. 4 个　　C. 6 个　　D. 7 个

[预测3] 若 $A=\{x\mid x=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=4n-3,n\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{x\mid x=8n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，则 A,B,C 之间的关系是(　　).　　测试要点 7

A. $C\subsetneqq B\subsetneqq A$　　B. $A\subsetneqq B\subsetneqq C$　　C. $C\subsetneqq A=B$　　D. $A=B=C$

[预测4] 已知集合 $P=\{x\mid x^2=1\}$，集合 $Q=\{x\mid ax=1\}$，若 $Q\subseteq P$，那么 a 的值是(　　).　　测试要点 4、6

A. 1　　B. -1　　C. 1 或 -1　　D. 0、1 或 -1

[预测5] 已知 $\complement_{\mathbf{Z}}A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x<6\}$，$\complement_{\mathbf{Z}}B=\{x\in\mathbf{Z}\mid x\leqslant 2\}$，则 A 与 B 的关系是(　　).　　测试要点 1、2

A. $A\subseteq B$　　B. $A\supseteq B$　　C. $A=B$　　D. $\complement_{\mathbf{Z}}A\subsetneqq\complement_{\mathbf{Z}}B$

[预测6] 集合 $S=\{0,1,2,3,4,5\}$，A 是 S 的一个子集，当 $x\in A$ 时，若有 $x-1\notin A$，且 $x+1\notin A$，则称 x 为 A 的一个"孤立元素"，那么 S 中无"孤立元素"的 4 元子集的个数是(　　).　　测试要点 5

A. 4 个　　B. 5 个

C. 6 个　　D. 7 个

[预测7] 已知全集 $U(U\neq\varnothing)$ 和集合 A、B、D，且 $A=\complement_U B$，$B=\complement_U D$，则 A 与 D 的关系是______.　　测试要点 2

[预测8] 图 1-2-3 中的图形语言直观地表示一些四边形之间的关系，请改用集合的符号语言来表示它们之间的关系.　　测试要点 9

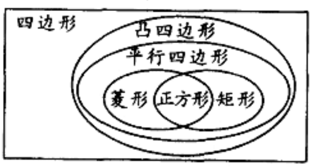


图 1-2-3

[预测 9]已知三元素集合 $A=\{x,xy,x-y\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，求 x 与 y 的值. 测试要点 4

[预测 10]设集合 $A=\{x|x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的值. 测试要点 6

[预测 11]若不等式 $0\leqslant x+1\leqslant 2$ 成立时，则关于 x 的不等式 $x-a-1>0$ 也成立. 求实数 a 的取值范围. 测试要点 9

[预测 12]求集合 $\{3,6,9,\cdots,30\}$ 的所有子集的元素之和. 测试要点 8

教材课后习题解答

1.2 子集、全集、补集 练习（第 9 页）

1. 子集：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$，$\{a,b,c\}$；
真子集：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$.
提示：$\varnothing$ 是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

2. (1) $\in$，(2) $\in$，(3) $\notin$，(4) $\subsetneqq$，(5) $=$，(6) $\subsetneqq$，(7) $\supsetneqq$，(8) $\subsetneqq$.

3. (1) $\{x|x=-16\}$ 或 $\{-16\}$，(2) $\{x|x>3\}$.

（第 10 页）

1. $\{4,5,6,7,8\}$，$\{1,2,7,8\}$.

2. (1) $\{x|x\in\mathbf{Z}$ 且 $x<0\}$；(2) $\mathbf{Q}$.

习题 1.2（第 10 页）

1. $A\subsetneqq B\subsetneqq C$.

2. (1) $A\supseteq B$，$A\supsetneqq B$ 成立；(2) $A\subseteq B$，$A\supseteq B$，$A=B$ 成立. $B=\{1,2,4,8\}$.

3. (1) 不正确；(2) 正确，2 是元素，元素与集合间是从属关系"$\in$"与"$\notin$"；(3) 正确；(4) 不正确，应为

$$\varnothing\subsetneqq\{x|x\leqslant 10\}$$

(5) 不正确；(6) 正确；(7) 正确；(8) 正确.

4. $\complement_S A=\{x|x$ 是梯形$\}$.

5. $\complement_U B=A$，$\complement_U A=B$.

最新5年高考名题诠解

1.（2004 年湖北高考题）设集合 $P=\{m|-1<m<0\}$，$Q=\{m\in\mathbf{R}|mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 x 恒成立$\}$，则下列关系中成立的是（　　）.

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $Q\subsetneqq P$　　C. $P=Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

[解析] 本题考查两个集合之间的关系. 由题可知 Q 满足 $\begin{cases}m<0\\ \Delta<0\end{cases}$ 或 $m=0\Rightarrow\begin{cases}m<0\\ (4m)^2-4m\cdot(-4)<0\end{cases}$ 或 $m=0\Rightarrow$ $-1<m\leqslant 0\Rightarrow P\subsetneqq Q$，故选 A.

2.（2003 年安徽春季高考题）集合 $S=\{a,b,c,d,e\}$，则 S 包含 $\{a,b\}$ 的子集个数共有（　　）.

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 5 个　　D. 8 个

[解析] 解法一：$\{a,b\}$，$\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,b,e\}$，$\{a,b,c,d\}$，$\{a,b,c,e\}$，$\{a,b,d,e\}$，$\{a,b,c,d,e\}$ 8 个. ∴ 选 D.

解法二：利用组合的方法在每个集合包含 a、b 时，c，d，e 三个元素可任选 0，1，2，所以 $C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=8$. ∴ 选 D.

3.（2002 年全国高考题）设集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},k\in\mathbf{N}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则（　　）.

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

[解析] 本题解法较多，常见有：分类讨论[即对 N 中的 k 分为 $k=2k'(k'\in\mathbf{Z})$ 和 $k=2k'-1(k'\in\mathbf{Z})$]、分析法、特殊值法（即取特殊值，在 M 中取 $k=0$、1、2；在 N 中取 $k=-1$，1，3）、排除法 $\left(\because\dfrac{1}{4}\in M\text{ 且 }\dfrac{1}{4}\in N\text{，排除 D；又 }1\notin M\text{，但 }1\in N\text{，排除 A、C}\right)$、列举法 $\left(M=\left\{\cdots,\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{4},\cdots\right\},N=\left\{\cdots,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},1,\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{4},\cdots\right\},\therefore M\subsetneqq N\right)$. 故选 B.

4.（2000 年广东高考题）已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，那么 A 的真子集的个数是（　　）.

A. 15　　B. 16　　C. 3　　D. 4

[解析] A 的真子集有 $2^4-1=15$. 故选 A.

5.（2001 年全国春季高考题）集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 的子集个数是（　　）.

A. 32　　B. 31　　C. 16　　D. 15

[解析] ∵ M 中有 5 个元素，∴ M 的子集有 $2^5=32$ 个. 故选 A.

6.（2003 年上海春季高考题）已知集合 $A=\{x||x|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$ 且 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是______.

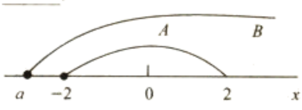


图 1-2-4

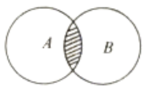
[解析] $a\leqslant -2$. ∵ $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，而 $A\subseteq B$，由图 1-2-4 可知 $a\leqslant -2$. 故填 $a\leqslant -2$.

第三节　交集、并集

1 重难点聚集

1. 交集

(1)交集的三种语言：

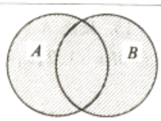
文字语言	由集合 A 和集合 B 的公共元素所组成的集合叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$
符号语言	$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$
图形语言	

注意：当 A 与 B 没有公共元素时，不能说 A 与 B 没有交集，而是 $A\cap B=\varnothing$.

(2)常运用性质：$A\cap A=A$；$A\cap U=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$；$A\cap B=B\cap A$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；$A\cap B\subseteq A$.

2. 并集

(1)并集的三种语言：

文字语言	集合 A 和集合 B 的元素合并在一起组成的集合叫做 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$
符号语言	$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$
图形语言	

(2)深刻领会“或”的内涵：并集的符号语言中的“或”与生活用语中的“或”的含义是不同的，生活用语中的“或”是“或此”、“或彼”只取其一，并不兼存；而并集中的“或”则是“或此”、“或彼”、“或此或彼”，可兼有．“$x\in A$，或 $x\in B$”包含三种情形：①$x\in A$ 且 $x\notin B$；②$x\in B$ 且 $x\notin A$；③$x\in A$ 且 $x\in B$.

(3)常用运算性质：$A\cup A=A$；$A\cup U=U$；$A\cup\varnothing=A$；$A\cup(\complement_U A)=U$；$A\cup B=B\cup A$；$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$A\cup B\supseteq A$.

注意：在 $A\cup B$ 中，A 和 B 的公共元素，只能出现一次．

名师诠释

◇［考题1］　设全集 $U=\mathbf{Z}$，将下列集合 $A=\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$、$B=\{y\mid y=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$、$C=\{z\mid z=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$、$D=\{w\mid w=6k+1,k\in\mathbf{Z}\}$ 的符号语言转化为文字语言，并求 $A\cap B$，$A\cap C$，$B\cap C$，$B\cap D$，$(\complement_U D)\cap B$.

［解析］　集合 $A=\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$ 表示 3 的倍数所组成的集合；集合 $B=\{x\mid x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$ 表示除以 3 余 1 的整数所组成的集合；集合 $C=\{x\mid x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$ 表示除以 3 余 2 的整数所组成的集合；集合 $D=\{x\mid x=6k+1,k\in\mathbf{Z}\}$ 表示除以 6 余 1 的整数所组成的集合.

$\therefore A\cap B=A\cap C=B\cap C=\varnothing$，$B\cap D=D$.

$(\complement_U D)\cap B=\{x\mid x=6k+4,k\in\mathbf{Z}\}$.

［探究］　集合 A、B、C 与 $\mathbf{Z}$ 的关系如何？能否用 A、B、C 的运算来表示 $\mathbf{Z}$ 呢？($\mathbf{Z}=A\cup B\cup C$.)

◇［考题2］　已知集合 $X=\{a,b\}$，$Y=\{b,c,d\}$. 求出 $X\cup Y$ 及其子集.

［解析］　先求出 $X\cup Y$，然后再写出其子集.

［解答］　$\because X=\{a,b\}$，$Y=\{b,c,d\}$，$\therefore X\cup Y=\{a,b,c,d\}$. 其子集有：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{a,d\}$，$\{b,c\}$，$\{b,d\}$，$\{c,d\}$，$\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,c,d\}$，$\{b,c,d\}$，$\{a,b,c,d\}$.

◇［考题3］　设全集 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}$，$P=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，那么 $\complement_U(M\cup P)$ 等于(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$　　C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)\mid y=x+1\}$

［解析］　集合 M 是由直线 $y=x+1$ 上除去点 $(2,3)$ 之后，其余点组成的集合．集合 P 是坐标平面上不在直线 $y=x+1$ 上的点组成的集合，那么 $M\cup P$ 就是坐标平面上不含点 $(2,3)$ 的所有点组成的集合．因此 $\complement_U(M\cup P)$ 就是点 $(2,3)$ 的集合．即 $\complement_U(M\cup P)=\{(2,3)\}$．故选 B.

［点评］　本题中将集合符号语言转化为文字语言后，便于我们弄清集合到底具有哪些元素，进而顺利地求出相关集合.

◇［考题4］　集合 U、A、B、C、D 如图 1－3－13 所示，则用符号语言写出图中的阴影部分所表示的集合是________.

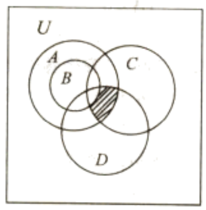


图 1－3－13

［解析］　要用符号语言表示图中的阴影部分所表示的集合，首先要知道的是阴影部分在哪些集合中，而不在哪些集合中，再用集合的运算把它表示出来．由于阴影部分既在 A 中，又在 C、D 中，但不在 B 中，因此阴影部分表示的集合为 $(A\cap C\cap D)\cap(\complement_U B)$.

◇［考题5］　设 $A\cap B=\varnothing$，$M=\{A$ 的子集$\}$，$N=\{B$ 的子集$\}$，那么下列关系中正确的一个是(　　).

A. $M\cap N=\varnothing$　　　B. $M\cap N=A\cap B$

C. $M\cap N=\{\varnothing\}$　　　D. $M\cap N=A\cup B$

［解析］　这个问题比较抽象，可以结合具体集合加以理解.

$\because M=\{A$ 的子集$\}$，$N=\{B$ 的子集$\}$.

$\therefore \varnothing\in M$，$\varnothing\in N$，$\therefore \varnothing\in M\cap N$，又 $\because A\cap B=\varnothing$，

$\therefore A$ 与 B 没有其它的公共子集，故 $M\cap N=\{\varnothing\}$，应选 C.

［点评］　此题若不注意“空集为任何集合的子集”这一性质，则极易错选 A.