



世纪高等继续教育精品教材



《线性代数》 习题集

主编 陈孝新

21 世纪高等继续教育精品教材

《线性代数》习题集

主编 陈孝新

中国人民大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

《线性代数》习题集/陈孝新主编.

北京: 中国人民大学出版社, 2006

21 世纪高等继续教育精品教材

ISBN 7-300-07350-6

I. 线…

II. 陈…

III. 线性代数-高等学校-习题

IV. O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 050854 号

21 世纪高等继续教育精品教材

《线性代数》习题集

主编 陈孝新

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242 (总编室)

010-62511239 (出版部)

010-82501766 (邮购部)

010-62514148 (门市部)

010-62515195 (发行公司)

010-62515275 (盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.ttrnet.com> (人大教研网)

经 销 新华书店

印 刷 北京七色印务有限公司

规 格 170×228mm 16 开本

版 次 2006 年 5 月第 1 版

印 张 8

印 次 2006 年 5 月第 1 次印刷

字 数 184 000

定 价 10.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

编者的话

线性代数是数学的一门重要基础课程，其知识在自然科学、工程技术和经济管理等领域都有广泛的应用，对培养学生的数学思维能力也具有重要作用。在当代高等教育知识体系中，线性代数是一门不可缺少的基础课程。

本书由三大部分构成：第一部分是配套习题及其解答；第二部分是自测试题及其解答，依教材每章内容分别给出；第三部分是两套模拟测试题及其参考答案。

本书的自测试题部分的设计是为了让读者检测自己对各章节内容学习的综合掌握程度。题后配有详细解答，方便读者使用。

本书的模拟测试题部分的设计是为了让读者检测自己对全书内容学习的综合掌握程度，最后配有参考答案。

本书是谭光兴主编的 21 世纪高等继续教育精品教材《线性代数》的配套学习书，在概念和内容叙述编排上均采用了原教材的体系，便于读者学习和使用。解题是学习数学的重要步骤，线性代数的许多题目都可以有多种解题方法，本书没有也不可能穷尽所有的方法，给读者留下了很大的思考余地。

限于编者水平，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

编者

2006 年 2 月

目 录

第一章 行列式	(1)
第二章 矩阵	(17)
第三章 向量	(36)
第四章 线性方程组	(55)
第五章 特征值与特征向量	(78)
第六章 二次型	(98)
模拟测试题一	(115)
模拟测试题二	(117)
模拟测试题一参考答案	(119)
模拟测试题二参考答案	(120)

第一章 行列式

习 题

1. 求下列排列的逆序数:

$$(1) 32514$$

$$(2) 624513$$

$$(3) 13 \cdots (2n-1) 24 \cdots (2n)$$

2. 求出 j, k , 使得 $284j56k7$ 为偶排列。

3. 选择 i 与 j , 使得 $1245i7j96$ 为奇排列。

4. 按“对角线法则”计算下列二、三阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & \sec \theta \\ \sec \theta & 1 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ b & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}$$

5. 用行列式定义计算下列行列式:

$$(1) D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6. 用行列式的性质计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

7. 计算行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$(3) D_n = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$(4) D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

8. 用克莱姆法则解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 22 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

9. 判别下列齐次线性方程组是否有非零解。

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$10. \lambda \text{ 取何值时, 齐次线性方程组 } \begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + \lambda x_2 = 0 \\ \lambda x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ 仅有零解? 有非零解?}$$

解 答

1. 解 (1) $\tau(32514) = 1 + 3 + 0 + 1 = 5$

(2) $\tau(624513) = 3 + 4 + 1 + 1 + 1 = 10$

(3) 因为 $k_{2n} = 0, k_{2n-2} = 1, k_{2n-4} = 2, \dots, k_{n+1} = n-1, k_{n+2} = \dots = k_1 = 0$

所以, $\tau(13 \cdots (2n-1)24 \cdots (2n)) = 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) + 0 + \dots + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$ 。

2. 解 当 $j = 3, k = 1$ 时,

$\tau(28435617) = 1 + 6 + 1 + 1 + 2 + 1 + 0 = 12$

当 $j = 1, k = 3$ 时,

$\tau(28415637) = 1 + 4 + 1 + 1 + 3 + 1 + 0 = 11$

故 $j = 3, k = 1$ 。

3. 解 当 $i = 3, j = 8$ 时,

$\tau(124537896) = 3 + 0 + 0 + 0 + 2 + 0 + 0 + 0 = 5$

当 $i = 8, j = 3$ 时,

$\tau(124587396) = 3 + 0 + 4 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 8$

所以 $i = 3, j = 8$ 。

4. 解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 9 - 4 \times 2 = 1$ 。

(2) $\begin{vmatrix} 1 & \sec\theta \\ \sec\theta & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - \sec\theta \times \sec\theta = 1 - \sec^2\theta = -\tan^2\theta$ 。

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 0 \times 2 + 1 \times 1 \times 1 + (-1) \times 0 \times 0 - 1 \times 0 \times (-1) - 0 \times 1 \times 1 - 2 \times 1 \times 0 = 1$ 。

(4) $\begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ b & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 \times 0 + b \times c \times b + (-b) \times (-c) \times (-a) - b \times 0 \times (-b) - (-c) \times c \times 0 - 0 \times b \times (-a) = cb^2 - abc$ 。

5. 解 (1) 由等价定义, $D = \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4} (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3 i_4)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} a_{i_4 4}$ 。因为 $a_{i_1 1}$ 取自第 1 列, 仅当 $i_1 = 4$ 时, 才有 $a_{i_1 1} \neq 0$, 故取 $i_1 = 4$; 同理, $a_{i_2 2}$ 取自第 2 列, 仅当 $i_2 = 1$ 时, 才有 $a_{i_2 2} = 1 \neq 0$, 故取 $i_2 = 1$; $a_{i_3 3}$ 取自第 3 列, 仅当 $i_3 = 3$ 时, 才有 $a_{i_3 3} = 2 \neq 0$, 故取 $i_3 = 3$; $a_{i_4 4}$ 取自第 4 列, 但第 1 行, 3 行和 4 行已经取元素, 故 $i_4 = 2$, 于是

$D = (-1)^{\tau(4132)} a_{41} a_{12} a_{33} a_{24} = (-1)^4 \times 1 \times 1 \times 2 \times 3 = 6$ 。

(2) D 中非零项仅一项, 即 $a_{1n} a_{2n-1} a_{3n-2} \cdots a_{n-12} a_{n1}$ 。因为 $\tau(n(n-1)(n-2) \cdots 321) = \frac{n(n-1)}{2}$

所以,由定义及 $a_{1n} = 1, a_{2n-1} = 2, \dots, a_{nl} = n$, 有 $D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!$

$$\begin{aligned} 6. \text{ 解 } (1) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -10 & -9 & -8 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -5 \\ 0 & -10 & -9 & -8 \\ 0 & -10 & -9 & -8 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & -y & 0 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & -y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \\ &= xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & -y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2 y^2 \end{aligned}$$

注:第一个等号是依次将第二行的 (-1) 倍加到第一行,第三行的 (-1) 倍加到第二行,第四行的 (-1) 倍加到第三行。

$$\begin{aligned} (4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1+2^2+3^2+\cdots+n^2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

注:第一个等号是分别将第2列乘以2,第3列乘以3,...,第n列乘以n加到第1列。

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = b_1 b_2 \cdots b_n$$

$$\begin{aligned} 7. \text{解} \quad (1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 160 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} \\ &= a \left(b \begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & d \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix} \\ &= a[b(cd+1)+d] + cd+1 \\ &= abcd + ab + ad + cd + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) D_n &= \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \\ &= a_0 x^{n-1} + D_{n-1} = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + D_{n-2} \\ &= \cdots = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \end{aligned}$$

注:将原行列式以第一行展开,得到其中一项与原行列式形状相似的 $n-1$ 阶行列式,以此类推可得结果。

(4) 将原行列式以第1列展开,得

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$= x^n + (-1)^{n+1} y^n$$

8. 解 (1) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 63, D_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 22 & -2 & 7 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 63$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & 22 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 126, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 22 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 189$$

故有 $x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, x_3 = \frac{D_3}{D} = 3$

(2) $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -10$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

故有 $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{5}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{9}{10}, x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{3}{10}$

9. 解 (1) $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 8 & -2 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$, 由克莱姆法则, 该齐次线性方程组解唯一, 又该齐次

方程组有零解, 故方程组仅有零解。

(2) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

故该齐次方程组有非零解。

$$10. \text{ 解 } D = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & 4 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

当 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 3$ 时, $D = 0$, 即当 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 3$ 时, 该齐次方程组有非零解。

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 3$ 时, $D \neq 0$, 即当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 3$ 时, 该齐次方程组仅有零解。

自测试题

1. 填空题

(1) 若排列 387j625 为奇排列, 则 $i = \underline{\hspace{1cm}}$, $j = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(2) 四阶行列式中带负号并含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 已知四阶行列式 D 的第三行元素分别为 1, 0, -2, 2, 第四行元素对应的代数余子式依次是 5, 10, a , 3, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(4) 在 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中, x^4 的系数是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

(5) 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$, 则 $\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11} - 3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21} - 3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31} - 3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(6) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(7) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(8) 设 a, b 为实数, 则当 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ 且 $b = \underline{\hspace{1cm}}$ 时, $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ 。

(9) 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, A_{ij} 为元素 a_{ij} ($j = 1, 2, 3, 4$) 的代数余子式, 则 $A_{41} + A_{42} + A_{43} +$

$A_{44} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(10) 若方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 则 $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 4a_{11} - a_{12} & -a_{13} \\ 3a_{21} & 4a_{21} - a_{22} & -a_{23} \\ 3a_{31} & 4a_{31} - a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

2. 单项选择题

(1) 若 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{44}a_{5j}$ 是五阶行列式中带正号的一项, 则 i, j 的值为()。

- A. $i = 1, j = 3$ B. $i = 2, j = 3$
C. $i = 1, j = 2$ D. $i = 2, j = 1$

(2) 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix} = 0$, 则 $a =$ ()。

- A. 2 B. 3 C. -2 D. -3

(3) 三阶行列式 $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} =$ ()。

- A. $abcdef$ B. $-4abcdef$ C. 0 D. $4abcdef$

(4) 设 D 为 n 阶行列式, 则 D 为零的充分必要条件是()。

- A. D 中有两行(列)的对应元素成比例
B. D 中有一行(列)的所有元素均为零
C. D 中有一行(列)的所有元素均可以化为零
D. D 中有一行(列)的所有元素的代数余子式均为零

(5) 下列行列式中不能被 13 整除的是()。

- A. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ B. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ C. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 12 \end{vmatrix}$ D. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

(6) 设 D 是 n 阶行列式, A_{ij} 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 则下列各式中正确的是()。

- A. $\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$ B. $\sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} = D \quad j = 1, 2, \dots, n$
C. $\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ji} = D \quad i = 1, 2, \dots, n$ D. $\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$

(7) $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充要条件是()。

- A. $k \neq -1$ B. $k \neq -1$ 且 $k \neq 3$
C. $k \neq 3$ D. $k \neq -1$ 或 $k \neq 3$

(8) 设方程组 $\begin{cases} ax_1 + bx_3 = 0 \\ -2cx_1 + 3bx_2 = 0 \\ ax_2 + cx_3 = 0 \end{cases}$ 则下列结论中不正确的是()。

- A. 当 $a = 0$ 时, 该方程组有非零解
B. 当 $b = 0$ 时, 该方程组有非零解
C. 当 $c = 0$ 时, 该方程组有非零解
D. 当 $a \neq 0$ 或 $b \neq 0$ 或 $c \neq 0$ 时, 该方程组仅有零解

(6) k 为何值时, 方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \\ -x_1 + (k-1)x_2 + x_3 = k \\ kx_1 + 2kx_2 + (3k-2)x_3 = 2k-1 \end{cases}$$
 有唯一解?

(7) 当 a, b 为何值时齐次线性方程组
$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 0 \\ ax_1 + x_3 = 0 \\ 2ax_2 + (a+3)x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解?

4. 证明题

(1) 证明:
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) 证明:
$$D_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

自测试题解答

1. 解 (1) 当 $i=1, j=4$ 时 $\tau(38174625) = 3+5+2+2+1+2+0 = 15$

当 $i=4, j=1$ 时 $\tau(38471625) = 3+5+2+4+1+1+0 = 16$

所以 $i=1, j=4$ 。

(2) 四阶行列式中所有含因子 $a_{23}a_{31}$ 的项以及奇偶性如下: $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 对应的 2314 为偶排列, $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 对应的 4312 为奇排列, 所以四阶行列式中带负号并含因子 $a_{23}a_{31}$ 的项为 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 。

(3) 根据行列式某一行各元素与另一行对应元素的代数余子式乘积之和等于零可求得 $a = 5.5$ 。

(4) 仅当四阶行列式的 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ 相乘时, 才能出现 x^4 , 该行列式是标排列的逆序数为 $\tau(1234) = 0$, 故有

$(-1)^{\tau(1234)} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = x^4$, 即 x^4 的系数为 1。

$$(5) \begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11} - 3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21} - 3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31} - 3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{11} - 3a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 2a_{21} - 3a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 2a_{31} - 3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a_{11} & -3a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -3a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = -12 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -12。$$

$$(6) \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ = a^n + (-1)^{1+n}(-1)^{n-1+1} \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = a^n - a^{n-2}$$

$$(7) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a \\ 0 & 0 & \cdots & -a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^n$$

$$(8) \text{ 因为 } \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(a^2 + b^2)$$